1.1. (a) La métrique s'écrit en coordonnées polaires sous la forme

$$g = g_{rr}\mathrm{d}r^2 + g_{r\theta}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2$$

où las fonctions scalaires g_{rr}, $g_{r\theta}$ et $g_{\theta\theta}$ expriment les produits scalaires entre les champs de vecteurs cordonnées $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ selon les formules $g_{rr} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)$, $g_{r\theta} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$ et $g_{\theta\theta} = g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$. Alors l'exercice consiste à expliciter ces fonctions g_{rr}, $g_{r\theta}$ et $g_{\theta\theta}$ en fonction de r et θ.

La paramétrisation du plan en coordonnées polaires,

$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

fournit un système de coordonnées locales et les champs associés sont

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta).$$

Il reste à calculer tous les produits scalaires (avec la métrique euclidienne) possibles entre ces deux champs de vecteurs. On trouve finalement

$$g = dr^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2.$$

Deuxième solution: On part de l'expression $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ de la métrique Euclidienne dans les coordonnées cartésiennes. On exprime x, y en fonction de r, θ comme avant, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et on calcule

$$\mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}y = \sin\theta\mathrm{d}r + r\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

puis on remplace dans l'expression $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ pour obtenir

$$g = dr^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2.$$

(b) La méthode est similaire puisqu'on dispose d'une paramétrisation de la surface donc d'un système de coordonnées locales. Les champs associés à ce système de coordonnées sont donnés par

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial u} = (r'(u)\cos\theta, r'(u)\sin\theta, z'(u))$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial S}{\partial \theta} = (-r(u)\sin\theta, r(u)\cos\theta, 0).$$

On calcule ensuite les produits scalaires entre ces champs. En utilisant $r'(u)^2 + z'(u)^2$ (qui traduit l'hypothèse que la courbe γ est paramétrée par longueur d'arc), on obtient

$$g = du^2 + r(u)^2 d\theta.$$

(c) Pour pouvoir rappeler la métrique de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, on utilise l'inverse de la projection stéréographique,

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n.$$

Cette application f (`https://fr.wikipedia.org/wiki/Projection_stéréographique`) s'explicite et on trouve

$$\varphi(y) = \left(\frac{2y}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right).$$

La métrique que l'on cherche est alors $g = \varphi^* g_{\mathrm{sp}}$ ou plus explicitement,

$$g_y(u,u) = (g_{\mathrm{sp}})_{\varphi(y)} (d_y\varphi \cdot u, d_y\varphi \cdot u).$$

On doit maintenant différentier φ. Calculons d'abord la différentielle de $||y||^2$:

$$d_y||.||^2 \cdot u = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ||y+tu||^2 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle y+tv, y+tv\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\langle y,y\rangle + 2\langle y,v\rangle + \langle tu,tu\rangle) = 2\langle y,v\rangle.$$

On obtient donc:

$$d_y\varphi \cdot u = \left(\frac{2u}{\|y\|^2+1} - \frac{4y\langle u,y\rangle}{(\|y\|^2+1)^2}, \frac{4\langle u,y\rangle}{(\|y\|^2+1)^2}. \right)$$

Il est maintenant facile de calculer l'expression de g; on obtient

$$g_y(u,u) = \frac{4\,\|u\|^2}{(\|y\|^2+1)^2}$$

(d) Le raisonnement est similaire; on trouve cette fois

$$\varphi(y) = \left(\frac{2a^2y}{\|y\|^2+a^2}, a\left(1 - \frac{2a^2}{\|y\|^2+a^2}\right)\right)$$

puis

$$g_y(u,u) = \frac{4a^2\,\|u\|^2}{\left(a^2+\|y\|^2\right)^2}.$$

1.2. On rappelle tout d'abord que l'ensemble sur lequel on prend l'inf n'est pas vide, c'est-à-dire qu'étant donnés p et q dans M, il existe bien un chemin qui joint p à q (autrement dit un espace topologique qui est à la fois connexe et une variété différentiable est connexe par arc). Ensuite on peut régulariser un chemin continu pour le rendre $\mathcal{C}^1$ (par un argument de densité). Admettons tout ça et vérifions seulement que d_g vérifie les axiomes d'une distance.

(a) $d_g(p,q) = d_g(q,p)$ est évident puisqu'un chemin de p à q se transforme en un chemin de q à p de même longueur en renversant le sens de parcours.

(b) Fixons trois points p, q et r de M et vérifions l'inégalité triangulaire. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'un inf, on sait qu'il existe un chemin c joignant p à q et un chemin c' joignant q à r et tels que

$$l(c) < d_g(p,q) + \varepsilon \quad \text{et} \quad l(c') < d_g(r,q) + \varepsilon.$$

La concaténation des chemins c et c' fournit un chemin de p à r de longueur $l(c) + l(c')$. Ainsi

$$d_g(p,r) \leqslant l(c \cup c') = l(c) + l(c') < d_g(p,q) + d_g(q,r) + 2\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitrairement petit, cette inégalité suffit.

(c) $d_g(p,p)=0$ est évident.

(d) Le point délicat de l'exercice consiste à montrer que si p et q sont deux point distincts, leur distance est strictement positive. Prenons donc une courbe c de p à q et montrons que sa longueur est uniformément minorée.

On dénote

$$B=\{x\in \mathbf{R}^n : \sum_i x_i^2<1\}$$

$$D=\{x\in \mathbf{R}^n : \sum_i x_i^2\leq 1\}=\overline{B}$$

$$S=\{x\in \mathbf{R}^n : \sum_i x_i^2=1\}=B\setminus D.$$

On peut choisir une carte (U,φ) de sorte que $p\in U$ et $q\neq U$, $\varphi(p)=0$ et que $\varphi(U)\supseteq D$. Noter que $\varphi^{-1}B$ est ouvert car B est ouvert et φ est continue. Noter aussi que l'ensemble $\varphi^{-1}\overline{B}$ est compact (car φ^{-1} est continue et $\overline{B}$ compact), donc il est fermé (car M est Hausdorff). On conclut que $\overline{\varphi^{-1}B}=\varphi^{-1}D$.

Soit $\gamma:[0,1]\to M$ une courbe différentiable tel que $\gamma(0)=p$ et $\gamma(1)=q$. Soit a le premier instant t tel que $\gamma(t)\notin\varphi^{-1}B$. On remarque que $\gamma(a)\notin\varphi^{-1}B$, mais $\gamma(a)\in\overline{\varphi^{-1}B}=\varphi^{-1}D$, donc $\gamma(a)\in\varphi^{-1}S$.

Nous allons trouver une borne inférieure pour la longueur de $\gamma|_{[0,a]}$. Pour ça on peut raisonner dans la carte. On considère donc la métrique h sur $\varphi(U)$ donnée par $h=\varphi^{-1*}g$ de sorte que maintenant, en plus d'être difféomorphes les ouverts U et $\varphi(U)$ sont *isométriques*. Il est donc équivalent de mesurer des longueurs dans U avec g ou dans $\varphi(U)$ avec h.

La boule fermée D est compacte donc il existe une constante $\lambda>0$ telle que pour tout $x\in B$ et pour tout $u\in\mathbb{R}^n$,

$$\lambda^2\left\|u\right\|^2\leqslant h_x(u,u)$$

(les normes sont équivalentes et la constante ne dépend pas du point par compacité). On note enfin β la courbe $\varphi\circ\gamma_{[0,a]}$. Alors

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &\geqslant \int_0^a \sqrt{g_{\gamma(s)(\gamma'(s),\gamma'(s)}}dt\\
&= \int_0^a \sqrt{h_{\beta(s)}(\beta'(s),\beta'(s)}dt\\
&\geqslant \int_0^a \sqrt{\lambda^2\left\|\beta'(s)\right\|^2}dt\\
&\geq \lambda.
\end{aligned}$$

1.3. (a) On va donner deux façons différentes de montrer que f est conforme si et seulement si $p=0,-1$.

- Première façon:
  Calculons d_xf, en utilisant le calcul de la différentielle de la norme au carré effectué dans l'exercice 1.1 c) et la règle de dérivation en chaine.

$$\begin{aligned}
d_xf\cdot v &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(x+tv)=||x||^{2p}v+2p||x||^{2p-2}\langle x,v\rangle x\\
&= ||x||^{2p}\left(v+2p\frac{\langle x,v\rangle}{||x||^2}x\right)
\end{aligned}$$

Ceci est l'identité dans le cas où $p = 0$ et est une réflexion à travers un plan perpendiculaire à x multiplié par une dilatation par $||x||^{-2}$ si $p = -1$. Si p n'a pas une de ces deux valeurs, alors f n'est pas une similitude, et ne peut donc pas être conforme.

- Seconde façon (Cette approche est plus Riemannienne que la première).
  Notons $y = f(x)$, $y^i = f^i(x)$ et Eucl la métrique Euclidienne. Si on note $g = f^\star\text{Eucl}$, alors

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= \langle f_\star\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), f_\star\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\rangle \\
&= \langle \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial f^\nu}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\rangle \\
&= \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^j}\langle \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial}{\partial y^\nu}\rangle \\
&= \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial f^\nu}{\partial x^j}\delta_{\mu\nu} \\
&= \sum_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial f^\mu}{\partial x^j}.
\end{aligned}
$$

  On a $f^\mu(x) = ||x||^{2p}x^\mu$, par conséquent

$$
\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}(||x||^{2p})x^\mu + ||x||^{2p}\delta_i^\mu = ||x||^{2p}\left(\delta_i^\mu + 2p\frac{x^i x^\mu}{||x||^2}\right).
$$

  Donc on obtient, en posant $r = ||x||$

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= r^{4p}\sum_\mu \left(\delta_i^\mu + 2p\frac{x^i x^\mu}{r^2}\right)\left(\delta_j^\mu + 2p\frac{x^j x^\mu}{r^2}\right) \\
&= r^{4p}\sum_\mu \left(\delta_i^\mu\delta_j^\mu + 2p\delta_i^\mu\frac{x^\mu x^j}{r^2} + 2p\delta_j^\mu\frac{x^\mu x^i}{r^2} + \frac{4p^2}{r^4}(x^\mu)^2 x^i x^j\right).
\end{aligned}
$$

  Si $i \neq j$, alors

$$
g_{ij} = r^{4p}\left(4p\frac{x^i x^j}{r^2} + \frac{4p^2}{r^2}x^i x^j\right).
$$

  Si $i = j$, alors

$$
g_{ii} = r^{4p}\left(1 + \frac{4(p+p^2)}{r^2}(x^i)^2\right).
$$

  On a donc que $p = 0$ ou $p = -1$ si et seulement si $g_{ij} = r^{4p}\delta_{ij}$ ce qui est bien la définition de métrique conforme à la métrique Euclidienne.

(b) Soit

$$
g_y(u,u) = \frac{4\,\|u\|^2}{\left(1 + \|y\|^2\right)^2}.
$$

Si $p = -1$, l'application f devient $f(x) = \frac{x}{||x||^2}$.
Il s'agit de montrer que $f^\star g = g$.
Par le point précédent, on a que $d_x f \cdot v = \frac{1}{||x||^2}\left(v - 2\frac{\langle x,v\rangle}{||x||^2}x\right)$. Donc:

$$
(f^\star g)_{ij} = \frac{1}{||x||^4}\left(\frac{4\delta_{ij}}{(1+||y||^2)^2}\right) = \frac{4\delta_{ij}}{(1+||x||^2)^2}
$$

où on a posé $||y|| = \frac{1}{||x||}$.

1.4. Fixons donc deux systèmes de coordonnées $x^1, \cdots, x^n$ et $y^1, \cdots, y^n$. On a donc deux expressions de la métrique

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$$

et

$$g = \sum_{ij} \tilde{g_{ij}} dy^i dy^j$$

associées aux deux choix de coordonnées. Ces deux expressions sont reliées par la formule de changement de coordonnées des tenseurs vue en cours :

$$\tilde{g_{ij}} = \sum_{\nu\mu} g_{\nu\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}.$$

On reconnaît d'ailleurs la formule de changement de bases pour les formes quadratiques. Notons en effet A la matrice de terme général

$$a_i^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}.$$

La formule de changement de coordonnées se réécrit de manière synthétique

$$(g_{\nu\mu}) = A^t (\tilde{g_{ij}}) A.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_g(U) &= \int_U \sqrt{|\det(g_{\nu\mu})|} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_U \sqrt{|\det\ A^t (\tilde{g_{ij}}) A|} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_U \det(A) \sqrt{|\det(\tilde{g_{ij}})|} dx^1 \cdots dx^n.
\end{aligned}$$

On reconnaît la formule de changement de variable pour les intégrales ($\det(A)$ étant le jacobien du changement de variables). Ainsi

$$\mathrm{Vol}_g(U) = \int_U \sqrt{|\det(\tilde{g_{ij}})|} dy^1 \cdots dy^n,$$

ce qu'on voulait.

1.5. (a) On considère une application "changement de paramétrisation",

$$f : [c, d] \to [a, b].$$

On peut supposer que f est croissante (sinon l'exercice se traite de la même façon). On a alors $\dot{\overline{\gamma \circ f}} = f'(t)\dot\gamma(f(t))$ donc $\left\| \dot{\overline{\gamma \circ f}} \right\| = f'(t) \left\| \dot\gamma(f(t)) \right\|$ (f est croissante) puis

$$\begin{aligned}
l(\gamma \circ f) &= \int_c^d \left\| \dot{\overline{\gamma \circ f}} \right\| dt \\
&= \int_c^d f'(t) \left\| \dot\gamma(f(t)) \right\| dt \\
&= l(\gamma)
\end{aligned}$$

après avoir fait le changement de variables associé à f.

(b) L'énergie n'est pas invariante par reparamétrisation. En effet les deux courbes (dans $\mathbb{R}$) définie par

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \gamma_2 : & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \frac{t}{2} \end{array}$$

ont même image mais $E(\gamma_1) = \frac{1}{2}$ alors que $E(\gamma_2) = \frac{1}{4}$.

(c) On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} l(\gamma)^2 &= \left(\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \right)^2 \\ &\leqslant \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \, dt \int_a^b dt \\ &= 2(b-a)E(\gamma). \end{aligned}$$

L'égalité a lieu s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, c'est-à-dire si les fonctions $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$ et $t \mapsto 1$ sont proportionnelles, autrement dit, si γ est parcourue à vitesse constante.