EPFL - Printemps 2020	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 3	03 Mars 2020

3.1. (a) Soit $L : T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un lagrangien sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que si $t \mapsto x(t)$ est une courbe extrémale pour l'action associée, alors le hamiltonien

$$H(x,v) = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v) - L(x,v)$$

est une constante de mouvement (cela signifie $H(x(t), \dot{x}(t))$ est constante par rapport à t).

(b) Montrer que si le Lagrangien $L(x,v)$ est homogène de poids $r > 1$ en v, alors la fonction L elle-même est une constante de mouvement. (Une fonction de classe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *homogène* de poids r si $h(\lambda v) = \lambda^r h(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$; dans ce cas on a la *relation d'Euler* $v^i \frac{\partial h}{\partial v^i} = r\, h(v)$ [écrire la preuve, qui est facile].)

(c) Montrer que si le Lagrangien est de la forme

$$L(x,v) = \frac{1}{2}\, g_{ij}(x)\, v^i\, v^j - U(x),$$

où $U : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et g_{ij} est une métrique riemannienne sur Ω, alors $\frac{1}{2}\, g_{ij}(x)\, v^i\, v^j + U(x)$ est une constante de mouvement.

i. Expliquer le lien avec le principe de conservation de l'Energie de la mécanique analytique.

ii. Montrer que toute géodésique d'une variété riemannienne est parcourue à vitesse constante.

(d) Montrer que si $L(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ ne dépend pas de la coordoonée x^i, alors le *moment conjugué* $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ est une constante de mouvement du système (dans ce cas on dit que x^i est une *coordonnée cyclique* pour le Lagrangien L).

(e) Soit M une surface de révolution autour de l'axe z dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et soit γ une géodésique dans M. Montrer que la curve γ, en plus d'avoir vitesse constante, garde constant aussi le momentum angulaire autour de l'axe z.

3.2. (a) Montrer que les équations des géodésiques du demi-plan de Poincaré $\{(x,y) \mid y > 0\}$ avec la métrique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ s'écrivent

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.$$

(b) Montrer que $\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ et $\frac{\dot{x}}{y^2}$ sont des constantes de mouvement pour ces équations.

3.3. Nous allons étudier la carte de Mercator. Mercator est un géographe Flamand qui présenta sa carte de la Terre en 1569, sans expliquer comment il l'avait construit. Cette carte est devenue la plus utilisée dans le monde, sans toutefois être exacte, car la taille des pays est d'autant plus grande que l'on s'approche des pôles.

Un grand avantage de cette carte est qu'elle préserve les angles et elle à la direction nord-sud comme direction vertical. Cela rend facile la tâche d'aller d'un point A à un point B : il suffit de dessiner une ligne droite de A à B dans la carte, mesurer l'angle de la ligne avec la direction vertical avec un rapporteur, puis naviguer le long de la route dessinée à l'aide d'une boussole. Ce type de courbe, qui fait un angle constant avec la direction sud-nord, s'appelle une loxodromie.

Pour construire la carte de Mercator on peut commencer pour mettre la Terre (soupçonné sphérique) dans une boîte de conserve (un cylindre) et la projeter horizontalement contre les paroies de cette boîte, puis de dérouler la boite en un plan. En ne faisant que ceci, nous obtenons une paramétrisation de la sphère qui n'est pas conforme car le facteur de dilatation horizontal n'est pas égal au facteur de dilatation vertical dans la plûpart des points. Or nous voulons une paramétrisation qui conserve les angles. Il faut donc encore modifier l'espacement entre les parallèles (les lignes de latitude constante) pour obtenir une répresentation conforme, et donc la carte de Mercator. (Voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_1569_world_map#legend3`.)

(a) Soit la paramétrisation $f : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{S}^2$ de la sphère $\mathbb{S}^2$ en coordonées polaires, donnée par $f(\phi, \theta) = (\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta))$. Calculer la métrique sur $\mathbb{S}^2$ dans les coordonnées (ϕ, θ).

(b) Calculer le rappel de la métrique de la sphère sur le cylindre, via la projection "boîte de conserve" c'est à dire la projection en (ϕ, z), et montrer que cette projection ne donne pas une répresentation conforme de la sphere.

(c) Obtenir une répresentation plate conforme de $\mathbb{S}^2$ où la direction nord-sud est verticale. Conseil : Proposer une répresentation $(x, y) = (\phi, f(\theta))$ et trouver la bonne fonction f. Qu'est-ce que se passe dans les pôles ?

(d) Montrer que la courbe loxodromie de A à B n'est pas en général le chemin le plus court. Réfléchir à la forme des géodésiques sur la carte de Mercator puis regarder l'image suivante.