EPFL - Printemps 2018	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 2– corrigé	6 mars 2020

2.1. Soit (M,g) une variété riemannienne et $\theta \in \Omega^1(M)$ une 1-forme sur M. On note alors $\theta^\sharp \in \Gamma(M)$ le champ de vecteurs défini par

$$g(\theta^\sharp, X) = \theta(X), \quad \forall X \in \Gamma(M).$$

(a) Montrer que $\theta^\sharp$ est bien défini.

(b) Exprimer $\theta^\sharp$ en coordonnées locales pour la forme $\theta = a_i dx^i$ (relativement à la métrique $g_{ij}dx^i dx^j$).

(c) Le *gradient* d'une fonction $f \in C^1(M)$ est le champ de vecteurs $\mathrm{grad}(f) = df^\sharp$. Donner une expression du gradient de f en coordoonées locales (relativement à la métrique $g_{ij}dx^i dx^j$).

(d) Calculer le gradient d'une fonction f sur $\mathbf{R}^2$ (avec la métrique euclidienne) en coordoonées cartésiennes (x,y), puis en coordoonées polaires.

2.2. Considérer $\mathcal{H}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : -x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = -1 \text{ et } x_0 > 0\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la métrique $h = -dx_0^2 + dx_1^2 + ... + dx_n^2$ (remarquer que h est bien une métrique Riemannienne sur $\mathcal{H}^n$).
Ceci est appelé le modèle de l'hyperboloïde de l'espace hyperbolique. Dans cet exercice, nous allons trouver d'autres modèles de l'espace hyperbolique et exhiber les isométries entre ces modèles.
Tout au long des séries d'exercices, nous allons étudier cet espace, car il est un bel exemple de géométrie Riemannienne muni d'une très riche structure et un exemple de géométrie dans laquelle, par un point exterieur à une droite passe une infinité de parallèles.

(a) Considérer $\mathbb{D}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\right\}$. Prouver que la projection centrée sur le point $(1,0,\dots,0)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{D}^n$ à $\mathcal{H}^n$, puis rappeler la métrique h sur $\mathbb{D}^n$ pour en faire un autre modèle de l'espace hyperbolique.

(b) Trouver une isométrie entre (D^n, h) et le demi-plan $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ muni de la métrique $\frac{1}{x_n^2}\sum_i \mathrm{d}x_i^2$.

Solution. Voir John M. Lee, "Riemannian Manifolds", prop. 3.5 □

2.3. Le *demi-plan de Poincaré* est le domaine $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ muni de la métrique riemannienne

$$h = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}.$$

(a) Calculer l'aire de la région $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a,\ b < y\}$ pour cette métrique.

Solution. L'aire de la region est l'integrale de la fonction $\sqrt{|\det(g_{ij})|} = \frac{1}{y^2}$ dans la region. Le resultat est $\frac{a}{b}$. □

(b) On identifie (x,y) à $z = x + iy$. Montrer que l'application (homographie) définie par $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$ est une isométrie pour la métrique h.

Solution. Toute homographie $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ac - bd = 1$ peut être obtenue en composant une translation réelle (ça veut dire, dans la direction x), suivi de la transformation $z \mapsto -\frac{1}{z}$ (nécessaire seulement si $c \neq 0$), suivi d'une homothétie réelle $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda > 0$, suivi d'une deuxième translation réelle. Les transations réelles évidemment preservent la métrique hyperbolique, donc il reste analyser des cas particulièrs simples: les homothéties $z \mapsto \lambda z$ et la transformation $z \mapsto -\frac{1}{z}$.

On commence pour analysér les homothéties. Si $f(z) = \lambda z$, alors $f^*h = \frac{\mathrm{d}(\lambda x)^2 + \mathrm{d}(\lambda y)^2}{(\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)}{\lambda^2 y^2} = h$.

Pour la fonction $f : z \mapsto w = -\frac{1}{z}$ on calcule d'abord sa dérivée complexe $f'(z) = \frac{1}{z^2}$, donc $\mathrm{d}_z f : z' \in T_z\mathbb{H}^2 \mapsto w' = \frac{1}{z^2}z'$. D'ici on concluit que $|w'| = \frac{1}{|z|^2}|z'|$, mais on doit calculer les normes de z' et w' selon la métrique h. On dénote $z = x + \mathrm{i}y$ et $w = u + \mathrm{i}v$ et on écrit

$$w = \frac{-\overline{z}}{|z|^2} = \frac{-x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2},$$

d'ou on extrait $v = \frac{y}{x^2+y^2}$. Alors

$$\|w'\|_w = \frac{1}{v}|w'| = \frac{1}{\frac{y}{x^2+y^2}} \frac{1}{|z|^2}|z'| = \frac{1}{y}|z'| = \|z'\|_z.$$

Cela montre que $\mathrm{d}_z f$ préserve la métrique h. □

(c) Trouver l'inverse de cette isométrie.

Solution. $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. □

(d) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$ définie par

$$\varphi(z) = -\mathrm{i} \cdot \left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

est un diffeomorphisme ($\mathbb{D}^2$ est le disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$).

Solution. L'application φ est une homographie du plan complexe qu'envoie le cercle unitaire à la ligne réelle, parce que $\varphi(1) = \infty$, $\varphi(-1) = 0$ et $\varphi(\mathrm{i}) = 1$. Alors φ envoye l'interieur du cercle unitaire au semiplan supérieur ou au semiplan inférieur. Pour exclure la deuxième possibilité on calcule $\varphi(0) = \mathrm{i}$. □

(e) Calculer l'application inverse $\varphi^{-1} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$.

(f) Calculer la métrique riemanienne $g = \varphi^*(h)$.

Solution. Pour $z' \in T_z\mathbb{D}^2$, on doit calculer

$$\|z'\|_{g_z} = \|\mathrm{d}_z\varphi \cdot z'\|_{h_{\varphi(z)}} = \frac{1}{\Im(\varphi(z))}|\mathrm{d}_z\varphi \cdot z'|,$$

donc on doit calculer la differentielle $\mathrm{d}_z\varphi$ et la partie imaginaire de $\varphi(z)$.

La dérivée d'une homographie $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ac - bd = 1$ est $f'(z) = -\frac{1}{(cz+d)^2}$, donc $\varphi'(z) = \frac{\mathrm{i}}{(z-1)^2}$ et $|\varphi'(z)| = \frac{1}{|z-1|^2}$.

Pour calculer la partie imaginaire de $\varphi(z)$ on fait

$$\begin{aligned}
\Im(\varphi(z)) &= \Im\left(-\mathrm{i}\frac{z+1}{z-1}\right)\\
&= -\Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\\
&= -\Re\left(\frac{z+1}{z-1}\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-1}}\right)\\
&= -\Re\left(\frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2}\right)\\
&= -\Re\left(\frac{z\overline{z}+\overline{z}-z-1}{|z-1|^2}\right)\\
&= -\Re\left(\frac{|z|^2-1-2\mathrm{i}\Im(z)}{|z-1|^2}\right)\\
&= \frac{1-|z|^2}{|z-1|^2}
\end{aligned}$$

Alors on peut continuer le calcul

$$\|z'\|_{g_z} = \frac{1}{\Im(\varphi(z))}|\mathrm{d}_z\varphi\cdot z'| = \frac{|z-1|^2}{1-|z|^2}\frac{1}{|z-1|^2}|z'| = \frac{1}{1-|z|^2}|z'|.$$

Cela montre que $g = \frac{\sum_i \mathrm{d}x_i^2}{(1-|z|^2)^2}$. $\square$

2.4. Une immersion de varietées riemanniennes $f:(M,g_0)\to(N,g_1)$ est conforme si la métrique rappel $h=f^*g_1$ est une déformation conforme de g_0, ça veut dire, il existe une fonction $\lambda: M\to(0,+\infty)$ tel que $h=\lambda^2 g_0$.

(a) Montrer que f est conforme si et seulement si elle préserve des angles: pour chaque $p\in M$ et pour toute paire de vecteurs non-nuls $X,Y\in T_pM$, l'angle entre X et Y, arccos $\left(\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\,\|Y\|}\right)$ est égale à l'angle arccos $\left(\frac{\langle f_*X,f_*Y\rangle}{\|f_*X\|\,\|f_*Y\|}\right)$.

Solution. L'immersion f est conforme si, et seulement si, il existe une fonction $\lambda: M\to(0,+\infty)$ tel que $\|f_*X\| = \lambda(p)\,\|X\|$ pour tout vecteur $X\in T_pM$. Dans ce-cas là, on voit aussi que $\langle f_*X,f_*Y\rangle = \lambda(p)^2\langle X,Y\rangle$ en utilisant la formule $\langle X,Y\rangle = \frac{\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{2}$. Alors la préservation d'angles est évidente.

Si d_pf preserve angles, on peut prendre une base ortonormée de vecteurs $E_i\in T_pM$ et il est claire que les vecteurs $E_i' = f_*E_i$ sont orthogonaux. Il reste voire que leurs tailles $\lambda_i = \|E_i'\|$ sont tous les mêmes. Mais si il y a une paire $\lambda_i<\lambda_j$, est claire que $E_i'+E_j'$ fait un angle de moins de 45 degrées avec E_j' et fait un angle de plus de 45 degrées avec E_i'. Cela montre que il existe un facteur unique $\lambda(p)$ tel que $\|f_*E_i\| = \lambda_p\|E_i\|$, et en géneral $\|f_*X\| = \lambda_p\|X\|$ pour tout $X\in T_pM$. $\square$

(b) Dans le cas où M et N sont sous-ensembles ouverts du plan complexe $\mathbb{C}$ avec la métrique euclidienne, montrer que f est conforme si et seulment si $z\mapsto f(z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable ou $z\mapsto\overline{f(z)}$ est $\mathbb{C}$-dérivable.

Solution. On doit ajouter une hypothèse qui manque: M doit être connexe. Alors $\det \mathrm{d}_p f$ a le même signe pour tout p.
La transformation $\mathbb{R}$-lineaire $\mathrm{d}_p f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une similarité si et seulement si, dans son expression matricielle dans la base canonique, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, la deuxième colonne $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est ortogonale à la première colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et du même longueur. Il y a deux possibilités: soit $\mathrm{d}_p f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, soit $\mathrm{d}_p f = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Le premier cas peux arriver seulement si $\det_p f > 0$, et le deuxième cas si $\det_p f < 0$. Dans le premier cas, $\mathrm{d}_p f$ est $\mathbb{C}$-lineaire, en fait elle est l'operateur de multiplication par le nombre complexe $a + b\mathrm{i}$. Dans le deuxième cas, $\mathrm{d}_p f$ est le même operateur suivi de la conjugaison complexe. $\square$

2.5. En 1696 Johann Bernoulli pose le problème suivant. Soit un monde euclidien où les choses tombent avec acceleration $\mathbf{a}$, où $\mathbf{a} \neq 0$ est un vecteur vertical. Soit p un point et soit q un deuxième point moins haut que p. On à la possibilité de construire une glissière idéale de p à q, ça veut dire, une courbe γ de p à q le long de laquelle les particules glissent sans perte d'énergie. Bernoulli demande de trouver la courbe γ qui minimise le temps de voyage de p à q pour une particle qui part de p avec vitesse initiale nulle. La courbe souhaitée est appellée brachistochrone de p à q.

(a) Utiliser la conservation d'énergie (cinétique plus potentielle) pour exprimer la vitesse en fonction de l'hauteur pour les particules qui partent de p avec vitesse nulle.

Solution. On utilise coordonées x, y, où y est l'hauteur negatif à partir du point $p = (0,0)$, donc dans le point q on a $y > 0$. L'énergie potentiel d'une particule de masse 1 située dans un point (x, y) est $U = -ay$ et l'énergie potentielle est $K = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$. L'énergie total $U + K$ est constante et égale a 0 parce que dans l'instant initial on a $U = 0$ et $K = 0$. Par consequent on a toujours $K = -U = ay$ et donc la vitesse est $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2K} = \sqrt{2ay}$. $\square$

(b) Trouver une métrique riemanniene g dont le differential de longueur est le differential de temps pour les particles qui partent de p avec vitesse nulle.

Solution. Soit Euc la métrique euclidienne, soit g une métrique riemannienne à définir, et soient $\mathrm{d}\ell_{Euc}$ et $\mathrm{d}\ell_g$ leurs respectifs élements differentials de longeur. Le temps de glissade $\tau(\gamma)$ le long d'une courbe γ est

$$\tau(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\ell_{Eucl}}{v} = \int_\gamma \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2ay}} = \int_\gamma \mathrm{d}\ell_g = \ell_g(\gamma)$$

si on définit la métrique $g = \frac{1}{2ay}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. $\square$

(c) Prouver que la distance riemannienne de p à q est égale au temps minimum de glissade de p à q.

Solution.

$$d_g(p, q) = \min_\gamma \ell_g(\gamma) = \min_\gamma \tau(\gamma)$$

où le minimum est calculé sur les courbes γ de p à q. $\square$

(d) Quelle est l'effet dans la métrique des homothéties centrées en p?

Solution. Pour $\lambda > 0$ on définit l'homothétie $f(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ et on calcule

$$f^*g = \frac{1}{2a\lambda y}(\mathrm{d}(\lambda x)^2 + \mathrm{d}(\lambda y)^2) = \lambda\frac{1}{2ay}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)n\lambda g.$$

Cela montre que pour un courbe γ on a $\ell_g(f \circ \gamma) = \sqrt{\lambda}\ell_g(\gamma)$ (parce que la métrique est multiplié par le facteur λ, mais la métrique mesure le carré du longueur). □

(e) Essayer de trouver la brachistochrone de p a q. (C'est difficile maintenant parce que on n'a pas encore parlé de géodésiques.)

Solution. Les courbes qui minimisent le temps de glissade sont les courbes qui minimisent le g-longueur. Mais en fait on va chercher les g-géodésiques, qui sont extremales pour la g-action. On sait que ces courbes sont extremales aussi pour le g-longueur. En plus, les g-géodésiques sont parcourues avec g-vitesse constante, et puisque le g-longueur est le temps de glissade, on va obtenir des courbes parametrées proportionellement au temps de glissade! Le lagrangien q'on doit utiliser est l'énergie cinétique K_g selon la métrique g (qui n'est pas égale à la vraie énergie cinétique K de la particule!). Le lagrangien est

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = K_g = \frac{1}{2}g_{(x,y)}((\dot{x}, \dot{y}), (\dot{x}, \dot{y})) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{4ay}.$$

Pour trouver les géodésiques il n'est pas nécessaire d'écrire les équations d'Euler–Lagrange complètes. Le lagrangien L ne depend pas de la coordonée x, donc le momentum associé

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{2ay}$$

est une constante de mouvement. Une autre constante de mouvement est l'énergie cinétique $K_g = L = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{4ay}$. Ces deux constantes de mouvement suffisent pour trouver les géodésiques. En effet, on peux se débarasser de la variable $\dot{x}$ dans l'équation d'énergie en exprimant $\dot{x}$ en fonction de y à l'aide de l'équation de momentum. On obtient

$$L = \frac{(2ap_x y)^2 + \dot{y}^2}{4ay}$$

Voilà une equation differentielle où on peux séparer les variables y et t. On commence pour dégager $\dot{y}$,

$$\dot{y}^2 = 4aLy - (2ap_x y)^2 = 4a^2p_x^2\left(\frac{L}{ap_x^2}\,y - y^2\right).$$

Avant de prendre racine carré, pour économiser des signes on définit $k = 2ap_x$ et $c = \frac{L}{2ap_x^2}$ et on continue

$$\dot{y}^2 = k^2(2cy - y^2),$$
$$\dot{y} = k\sqrt{2cy - y^2}.$$

On écrit $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ et on sépare les variables y et t, puis on prépare pour integrer:

$$k\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2cy - y^2}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c^2 - (c-y)^2}} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - (1 - \frac{y}{c})^2)}}$$

Dans l'instant initial on a $t = 0$ et $y = 0$. En integrant on obtient $kt = \arccos(1 - \frac{y}{c})$, et on peux inverser cette fonction $t(y)$ pour obtenir

$$y(t) = c(1 - \cos(kt)).$$

Pour trouver $x(t)$ on reprends l'equation de momentum

$$\dot{x} = 2ap_x y = ky = kc(1 - \cos(kt))$$

et on integre à partir de l'instant initial $t = 0$, $x = 0$. On trouve

$$x(t) = c(kt - \sin(kt)).$$

Cela montre que les braquistochrones qui sortent du point $p = (0, 0)$ sont des cycloides. Le paramètre c à l'effet d'une homothètie. Il doit être reglé pour obtenir une cycloide qui contient le point q. Le paramètre k n'est pas important pour la construction de la glissiere mais il peut être reglé pour obtenir la parametrisation par temps de glissade. $\square$