4.1. Prouver que pour toute connexion ∇ sur une variété M, l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \Gamma(M)\times\Gamma(M) & \longrightarrow & \Gamma(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}$$

est un tenseur sur M, c'est-à-dire qu'elle bilinéaire sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(M)$.

4.2. (a) Calculer les symboles de Christoffel en chaque point de la métrique euclidienne en coordonnées polaires.

(b) On considère le demi-plan

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) |\ y>0\}$$

muni de la métrique hyperbolique

$$g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

Calculer les symboles de Christoffel.

4.3. Soit (M,g) une variété riemannienne et $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse quelconque.

(a) Montrer que si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g alors, pour tout couple de champs parallèles $X, Y \in \Gamma_\gamma$, $g(X,Y)$ est constant le long de γ.

(b) En déduire que P_t est une isométrie de $T_{\gamma(0)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$ puis qu'il existe des champs de vecteurs qui forment une base orthonormée en tout point et qui sont parallèle le long de γ.

(c) Soit X un champs parallèle le long de γ. Montrer que ses coordonnées dans un repère du type précédent sont constantes.

(d) On suppose maintenant que M est de dimension 2. Montrer que γ est une géodésique si et seulement si $\|\dot\gamma\|$ est constante et si $\|X\|$ et $\angle(X,\dot\gamma)$ sont constants le long de γ pour tout champ parallèle X.

4.4. Soit ∇ une connexion (quelconque) et P_t l'application de transport parallèle associée. Montrer que

$$\nabla_t V_0 = \lim_{t\to 0} \frac{P_t^{-1}V(t) - V(0)}{t-t_0}.$$

Interpréter cette formule.

4.5. Soit (M,g) une variété riemannienne connexe et soit H_p l'ensemble des endomorphisme de T_pM donnés par des transports parallèles le long de courbes $c:[0,1]\to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telles que $c(0)=c(1)$. Montrer que H_p est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ et que H_p et H_q sont isomorphes.

4.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et soit

$$\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

un plongement lisse. On munit la sous-variété $M=\psi(\Omega)\subset\mathbb{R}^n$ de la métrique riemannienne induite par la métrique usuelle de $\mathbb{R}^n$. On note $u^1,\dots,u^k$ les coordonnées sur M associées à la carte ψ^{-1}. On peut alors représenter la base associée de l'espace tangent en un point $p = \psi(u)$ de M par les vecteurs “concret”

$$\xi_i = \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial u^i} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Montrer que les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée sont reliés aux composantes tangentielles des dérivées seconde de ψ de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right)^\top = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \xi_k.$$