Variétés Riemanniennes, 17.03.20

Rappel Une connection affine sur une variété M est une appl.

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M)$$

t.q.

1) ∇ est $\mathbb{R}$-bilinéaire

2) ∇ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à la 1ère variable :

$$\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y \qquad \forall\, X, Y \in \Gamma(M),\ f \in C^\infty(M)$$

3) Leibniz :

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) \cdot Y.$$

Torsion $T = T_\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M)$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Exercice T est tensoriel, i.e.

$C^\infty(M)$ - bilinéaire

Théorème (de Levi-Civita ~ 1917)

Si (M, g) est une variété (semi)-riemannienne alors il existe une unique connection ∇ telle que

4) ∇ est symétrique ($T = 0$)

5) ∇ est g-compatible :

$$Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

---

autre écriture

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

Terminologie ∇ = connexion de Levi-Civita de g (∇ = Connexion Riemannienne, canonique)

Preuve **Unicité** : les conditions (i) à (5)

$\Rightarrow$ en coordonnées

g-compatible

$$\boxed{\partial_i g_{ij} = \Gamma^m_{ij}\, g_{mk} + \Gamma^m_{ik}\, g_{im}}$$

et

$$\Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji} \quad (\text{symétrie} : T=0)$$

En permutant les indices i, j, k on a trois relations $\Rightarrow$

$$\Gamma^{\ell}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g^{ik}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$$

cela prouve l'unicité.

Existence : **On définit** ∇ par la formule ci-dessus (formule de Christoffel) où les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\,\partial_k$$

Dans un système de coordonnées.
Mais cette connexion ne dépend pas du choix des coordonnées, donc elle est définie globalement sur M

#

Variante de cette preuve :

On a

$$X\langle Y,Z\rangle \overset{(a)}{=} \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

et

$$Y\langle X,Z\rangle = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle$$

$$\overset{(b)}{=} \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle [X,Y], Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

$$\overset{(c)}{=} \big(\langle \nabla_X Z, Y\rangle - \langle [X,Z], Y\rangle\big) + \big(\langle X, \nabla_Y Z\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle\big)$$

(a) + (b) − (c) → Formule de Koszul

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle Z, [X,Y]\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle$$

Ceci entraîne l'unicité de ∇ (car cette formule détermine le covecteur $\alpha \in T^*M$

$$\alpha(Z) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle$$

et

$$\alpha = (\nabla_X Y)^\flat, \quad \nabla_X Y = \alpha^\sharp$$

Existence : On définit ∇ par la formule de Koszul. On vérifie que ∇ ainsi défini est une connexion et qu'elle est sans torsion et compatible avec g

#

Remarque Formule de Koszul ⇒ Christoffel
(directement)

on pose $X = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_k$

$[\partial_i, \partial_j] = 0$ etc. Alors Koszul dit

$$\underbrace{2 \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j , \partial_k \rangle}_{= 2 \langle \Gamma^m_{ij} \partial_m , \partial_k \rangle} = \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_k \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle$$

$$= \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}$$

$$= 2 \langle \Gamma^m_{ij} \partial_m , \partial_k \rangle$$

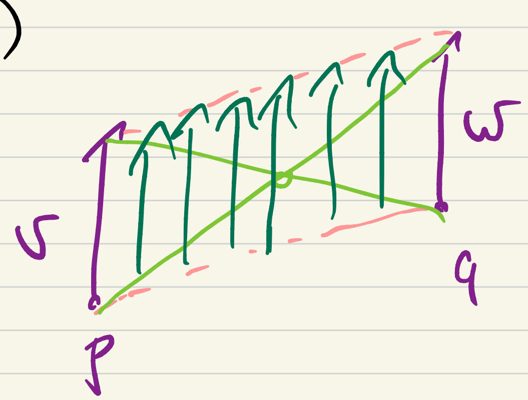
$$= 2 \, g_{mk} \cdot \Gamma^m_{ij}$$

On multiplie par $g^{\ell m}$ et on somme sur m.

§ Transport Parallèle

<u>Pb naïf</u> L'espace tangent $T_p M$ à une variété M est une construction abstraite.

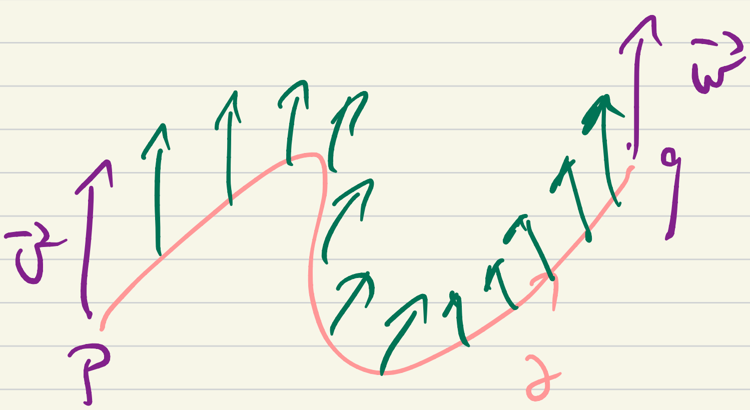
Comment "comparer" $T_p M$ et $T_q M$?
$(p \neq q)$



"$v = w$"

En géom. diff.

γ courbe de p à q



$\vec{w}$ est obtenu par <u>transport parallèle</u> le long de la courbe γ à partir de $\vec{v}$

si $\vec{v} = \xi_0$, $\vec{w} = \xi_1$, où $\xi_t \in T_{\gamma(t)} M$

où $\xi_t \in T_{\gamma(t)} M$ vérifie

$$\boxed{\nabla_{\dot\gamma(t)} \xi_t = 0} \quad \forall t \in [0,1]$$

(on dit que la dérivée covariante du champ ξ est nulle).

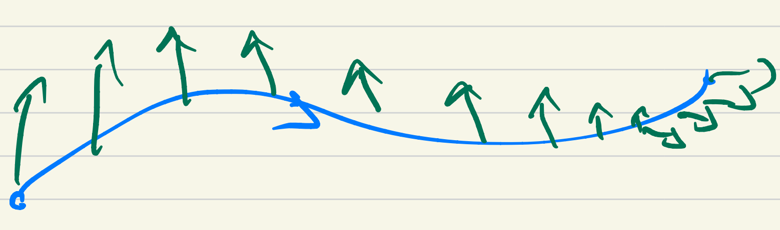
Formalisons Notation : Soit

$\gamma : [a,b] \to M$, courbe, C^1

(reliant p à q) On note

$$\Gamma_\gamma = \{ \eta : [a,b] \to TM \mid \eta_t \in T_{\gamma(t)} M \text{ et } \eta \text{ diff.} \}$$

= l'ensemble des champs de vecteurs le long de γ.

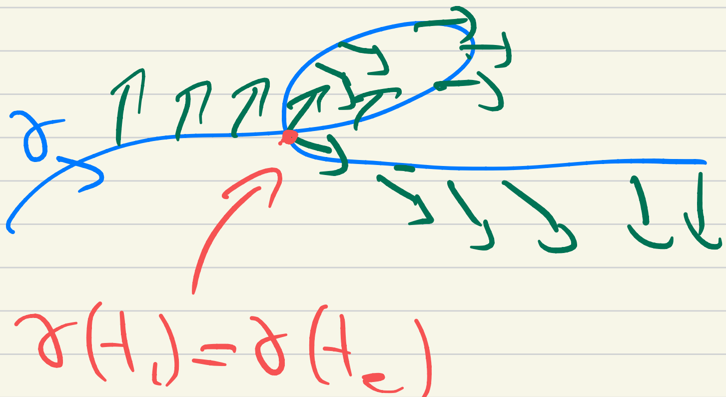


Remarque ① Γ_γ est un $\mathbb{R}$-espace vect. et est un module sur $C^\infty([a,b])$

$\eta \in \Gamma_\gamma$ et $h \in C^\infty([a,b])$

$\Rightarrow \quad t \longmapsto h(t) \cdot \eta_t \in T_{\gamma(t)} M$

② $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \not\Rightarrow \eta_{t_1} = \eta_{t_2}$



Définissons Si $\gamma : [a,b] \to M$ est une courbe C^∞ et $\xi \in \Gamma_\gamma$ est un champs C^∞, alors on note

$$\nabla_t \xi_t = \nabla_{\dot\gamma(t)} \xi$$

On a donc une opèration

$$\nabla = \nabla_t : \Gamma_\gamma \longrightarrow \Gamma_\gamma$$
$$\xi \longmapsto (t \mapsto \nabla_t \xi_t)$$

qui s'appelle la
dérivée covariante (de ξ)
le long de γ.

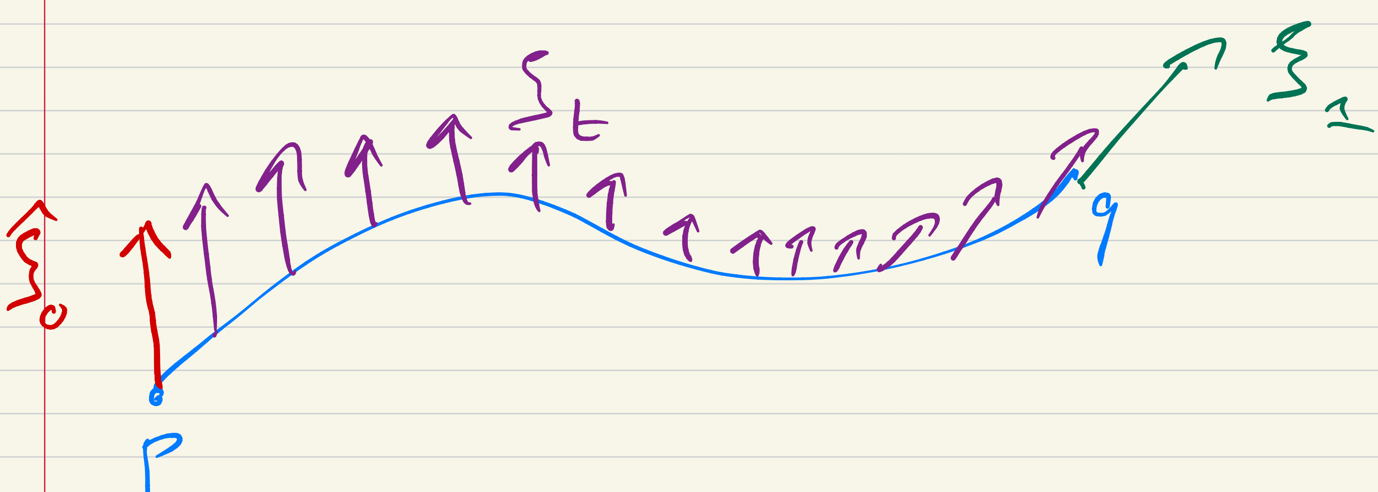
<u>Déf</u> 1) En particulier

$$\nabla_t \dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = \text{accélération covariante}$$

2.) Si $\boxed{\nabla_t \dot\gamma \equiv 0}$ on dit que
γ est une géodésique
par ∇

Théorème Soit (M, g) une variété C^∞ munie d'une connexion ∇.
Pour toute courbe $\gamma : [a,b] \to M$ reliant $p = \gamma(a)$ à $q = \gamma(b)$ et pour tout $\hat{\xi}_0 \in T_pM$ il existe un champ $\xi_t \in \Gamma_\gamma$ unique tel que

$$\boxed{\begin{aligned} &\xi_0 = \hat{\xi}_0 \in T_pM \\ &\nabla_t \xi_t = 0 \quad , \quad \forall t \end{aligned}}$$



$\gamma : [0,1] \to M$

Notations On note parfois

$$\xi_t = P_t \, \hat{\xi}_0 = P_{\gamma, t} \, \hat{\xi}_0$$

- $\hat{\xi}_0$ = Condition initiale
- $P_t \, \hat{\xi}_0$ est le transport parallèle de ξ_0

observer que

$$P : T_p M \longrightarrow T_\gamma$$

On note aussi

$$P_1 \text{ a } P_\gamma : T_p M \to T_q M$$

$$\hat{\xi}_0 \longrightarrow \xi_1$$

$p = \gamma(0)$

$q = \gamma(1)$

Preuve du théorème :

On applique le théorème d'existence et d'unicité des solutions des systèmes d'équations diff. d'ordre 1 linéaires.

En coordonnées l'équation $\nabla_t \xi = 0$ s'écrit

Si $\xi_t = \sum_{i=1}^{n} a^i(t)\,\partial_i \quad (0 \le t \le 1)$

alors

$$0 = \nabla_t \xi = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{\dot\gamma}\left(a^i(t)\cdot\partial_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{\dot\gamma}(a^i)\cdot\partial_i + a^i\cdot\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot a^i(t)\cdot\partial_i + a^i \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\,\partial_k\right)$$

$$= \sum_{k} \left(\dot a^k + \sum_{i=1}^{n} a^i\,\Gamma^k_{ij}\right)\partial_k = 0$$

On reprend ce calcul !

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \xi_t \quad , \quad \xi_t = \sum a^i \partial_i$$

où $\quad \dot{\gamma}(t) = \sum \dot{x}^j \partial_j \; ,$

$\left(\text{si} \quad \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \right)$

$\Rightarrow$

$$0 = \nabla_t \xi = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{\sum \dot{x}^j \partial_j} (a^i \partial_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{x}^j \, \nabla_{\partial_j} (a^i \partial_i) =$$

$$\sum_{i,j} \dot{x}^j \left(a^i \nabla_{\partial_j} \partial_i + (\partial_j a^i) \cdot \partial_i \right) =$$

$$\sum_{i,j,k} \dot{x}^j a^i \, \Gamma_{ji}^k \partial_k + \sum_i \dot{a}^i \partial_i = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$0 = \sum_k \left(\sum_{i,j} \dot{x}^j a^i \Gamma_{ij}^k + \dot{a}^k \right) \partial_k$$

Donc $\quad \nabla_t S = 0 \quad \Longleftrightarrow$

équation diff de transport parallèle $\quad (*) \quad \boxed{\dfrac{da^k}{dt} = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i a^i}$

Avec cond. initiale

$$a^k(0) = k^{ème} \text{ composante de } \hat{\xi}_0$$

$\Longleftrightarrow$ $$\hat{\xi}_0 = \sum_k a^k(0) \partial_k .$$

Le système de EDO $(*)$ est linéaire en $a = (a^1, \dots a^n)$

On a donc existence et unicité de la solution pour tout t

CQFD.

<u>Remarque</u> : On a utilisé que

$$\sum_j \dot{x}^j \partial_j h = \frac{dh}{dt} = \dot{h}$$

pour $h = h(t)$. à $h = a^i$

<u>Car</u>

$$\sum_j \dot{x}^j \partial_j = \dot{\gamma}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \sum \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} .$$

Fin pour aujourd'hui