EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2020

Série 5

Groupes Quotients & Produits semi-directs

Exercice 1. Soit $G \supset H \supset K$ une suite de sous-groupes emboites dans G. On note

$$G/K = \{g.K,\ g \in G\}$$

le quotient de G pour l'action de K par translation a droite (on ne suppose pas forcement que c'est un groupe, ie. que K est distingue). On note le cardinal ce ce quotient

$$[G : K] := |G/K|$$

qui s'appelle l'indice de K dans G.

1. On note
$$K\backslash G = \{K.g,\ g \in G\}$$
le quotient pour l'action par translation a gauche. Montrer qu'on a une bijection
$$K\backslash G \simeq G/K$$
(de sorte que l'indice a droite est egalement l'indice a gauche
$$[G : K] = |G/K| = |K\backslash G|).$$
2. Montrer l'equivalence
$$G/K \text{ est fini } \iff G/H\&H/K \text{ sont finis.}$$
3. Montrer que dans ce cas on a la formule de transitivite
$$[G : K] = [G : H].[H : K].$$
Pour cela on motrera que si
$$G/H = \{g_iH,\ i \in I\},\ H/K = \{h_jK,\ j \in J\}$$
sont les ensembles d'orbites (l'ensemble des classes a gauches) alors
$$G/K = \{g_i.h_j.K,\ (i, j) \in I \times J\}.$$

Produits semi-directs

Etant donne deux groupes $(H, \times)$ et $(K, .)$ on peut construire un nouveau groupe,*le produit direct* $(H \times K, (., .))$ dont les elements sont les paires $(h, k),\ k \in H, k \in K$ et dont la loi de groupe est

$$(h, k) \star (h', k') = (h \times h', k.k').$$

On va generaliser cette construction et le resultat est appele produit semi-direct :

Exercice 2 (Produit semi-direct externe)**.** Soit H et K deux groupes et une action a gauche $H \curvearrowright K$ de H sur K (notee $h \odot k$) par *automorphismes* de groupes (pour tout $h \in H$,

$$k \in K \mapsto h \odot k \in K$$

est un morphisme de groupes).

1. Montrer que l'ensemble produit $H \times K$ muni de la loi

$$\star : \ ((h, k), (h', k')) \mapsto (h, k) \star (h', k') = (h \times h', k.h \odot k')$$

est un groupe d'element neutre (e_H, e_K) et dont l'inversion est donnee par

$$(h, k)^{\star(-1)} = (h^{-1}, h^{-1} \odot k^{-1}).$$

On note ce groupe $H \ltimes_{\odot} K$ et on l'appelle produit semi-direct externe de H par K.

2. Montrer que les applications

$$i_1 : \begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & H \ltimes_{\odot} K \\ h & \mapsto & (h, e_K) \end{array}, \quad i_2 : \begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & H \ltimes_{\odot} K \\ k & \mapsto & (e_H, k) \end{array}$$

sont des morphismes de groupes injectif ce qui permet d'identifier H et K aux sous-groupes images $i_1(H)$ et $i_2(K)$.

3. Montrer qu'avec ces identifications le groupe $K \simeq i_2(K)$ est distingue dans $H \ltimes_{\odot} K$ et $H \simeq i_1(H)$ agit sur K par conjugaison. De plus le quotient $H \ltimes_{\odot} K/i_2(K)$ est isomorphe a H.

4. Montrer que le produit direct est un cas particulier du produit semi-direct quand H agit trivialement sur K :

$$\forall h \in H,\ k \in K,\ h \odot k = k.$$

Reciproquement on a

Exercice 3. Soit $(G, .)$ un groupe ; $H, K \subset G$ des sous-groupes avec $K \lhd G$ (K est distingue dans G). On suppose que

— $H.K = G$,

— $H \cap K = \{e_G\}$.

Soit $H \ltimes K$ le produit semi-direct externe obtenu en faisant agir H sur K par conjugaison dans G :

$$h \odot k = \mathrm{Ad}(h)(k) = h.k.h^{-1}.$$

(on rappelle que K est distingue dans G donc est stable par conjugaison par tout element de H).

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} H \ltimes K & \mapsto & G \\ (h, k) & \mapsto & k.h \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes ; en particulier tout element $g \in G$ se decompose de maniere unique en un produit $g = k.h$ avec $h \in H$ et $k \in K$.

Vers Fedorov pour les isometries non-speciales

Exercice 4 (Examen 2017)**.** Soit G le groupe des isométries d'un pavage $\mathcal{P}$ du plan euclidien (on utilisera les nombres complexes pour representer ces isométries). On note

$$T \subset G^+ \subset G$$

les sous-groupes de G des translations et des rotations (affines). On note

$$\Gamma \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

le réseau de nombres complexes associe, ie.

$$T = \{T_\gamma : Z \mapsto Z + \gamma,\ \gamma \in \Gamma\}.$$

On note egalement $G_0^+ \subset G_0$ les groupes formés par les images des parties linéaires des éléments de G. Quitte à conjuguer G par une translation une rotation et une homothétie (cela remplace le groupe G par une groupe isomorphe), on peut toujours supposer que

$$G_0^+ \subset G^+$$

et que le réseau Γ est de la forme $\Gamma = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}.\omega$ avec 1 de module minimal parmi tous les modules des éléments de Γ et ω de module $\geqslant 1$ et minimal parmi tous les modules des éléments de Γ qui ne sont pas $\mathbb{R}$-colinéaires à 1. On fera ses hypothèses dans la suite.

On va étudier la structure du groupe G si ce dernier est different de G^+. On suppose donc qu'il existe $s \in G - G^+$.

1. Montrer que
$$G - G^+ = s \circ G^+ = G^+ \circ s.$$
2. On note s_0 la partie linéaire de s et on decompose (de maniere unique) s en
$$s = t_z \circ t_w \circ s_0$$
avec w perpendiculaire a l'axe de s_0 et z colinéaire a cet axe. Montrer que $2z \in \Gamma$ (calculer s^2.)
3. Soit $\gamma \in \Gamma$, calculer $s \circ t_\gamma \circ s^{-1}$ en fonction de s_0 et γ. En déduire que $s_0(\Gamma) = \Gamma$.
4. On suppose dans toute la suite que G^+ est de type $p6$. Alors (cf. le cours) le groupe des rotations linéaires G_0^+ s'identifie au groupe des racines 6-iemes de l'unité :
$$G_0^+ \simeq \mu_6 = \omega_6^{\mathbb{Z}},\ \omega_6 = \frac{1 + \iota\sqrt{3}}{2} \text{ et } \Gamma = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}.\omega_6.$$
De plus tout élément de G^+ est de la forme $t_\gamma \circ r_0$ avec $\gamma \in \Gamma$ et $r_0 \in G_0^+$. On va montrer que G possede une symétrie linéaire.
Montrer que les seuls éléments de Γ de module 1 sont les éléments de μ_6 et en déduire que $s_0(\mu_6) = \mu_6$.
5. Montrer que quitte a composer s avec une rotation convenable de G^+ on peut toujours supposer que $s_0(1) = \omega_6$ et que quitte a composer s avec une translation on peut supposer que
$$z = 0 \text{ ou bien } z = \frac{1}{2}(1 + \omega_6).$$
6. Si on est dans le second cas montrer que $t_{-\omega_6} \circ s$ est une symétrie axiale et que dans tous les cas G possede une symétrie axiale s d'axe parallèle à la droite $\mathbb{R}(1 + \omega_6)$.
7. Montrer que Γ est l'ensemble des centres des rotations du groupe G^+ qui sont d'ordre 6 et en déduire que $s(\Gamma) \subset \Gamma$ (noter que que G^+ est distingué dans G) puis que $w \in \mathbb{Z}\omega_6^2$ et enfin que G contient la symétrie linéaire d'axe $\mathbb{R}(1 + \omega_6)$.

Quotient du demi-plan de Poincare

Les exercices suivants concernent le groupe
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\},$$

des matrices reelles de determinant 1 et son action par homographies,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d},$$

sur le demi-plan de Poincare

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C},\ y > 0\}$$

(cf. Serie 2). On rappelle que $\mathbb{H}$ est l'une des trois orbites pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la sphere de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ainsi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$, ie. :

$$\forall z \in \mathbb{H},\ \mathbb{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).z$$

Exercice 5. (La decomposition d'Iwasawa.) On considere les sous ensembles

$$N = \{n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\},\ A = \{a(y) = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R}_{>0}\},$$

$$K = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a^2 + b^2 = 1\}.$$

La decomposition d'Iwasawa est le resultat suivant

Théorème 1. *Toute matrice g de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ se decompose de maniere unique sous la forme*

$$g = n.a.k,\ n \in N,\ a \in A,\ k \in K.$$

Pour demontrer ce resultat on utilisera l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincare $\mathbb{H}$.

1. Montrer que le stabilisateur du point i dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$, est K. En deduire une bijection
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/K \simeq \mathbb{H}.$$
2. Montrer que N et A sont des sous groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, que N est isomorphe a $(\mathbb{R}, +)$ et que A est isomorphe a $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$.
3. Montrer que
$$N.A = \{n.a,\ n \in N,\ a \in A\}$$
est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et que $N.A \cap K = \{\mathrm{Id}\}$.
4. Etant donnes $n \in N$ et $a \in A$, a quoi correspondent les transformations de $\mathbb{C}$, $z \mapsto n.z$ et $z \mapsto a.z$. Quelles sont les orbites de N et A dans $\mathbb{H}$; donner un domaine fondamental pour chaque groupe.
5. Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{H}$, il existe un unique $n \in N$ et un unique $a \in A$ tels que $n.a.i = z$.

6. Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, en considerant le complexe $z := g.i$ et en l'ecrivant sous la forme $z = n.a.i$, montrer qu'il existe $k \in K$ tel que
$$g = n.a.k,\ \ n \in N, a \in A, k \in K.$$
7. Montrer qu'une telle representation est unique.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1\}$$

est engendre par les deux matrices

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, n = n(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c'est a dire que tout matrice $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ peut s'ecrire comme un produit de matrices formees de puissances de n et de puissances de w.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
2. Verifier que ces matrices appartiennent a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, Calculer w^k et n^k.
3. Soit une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer qu'en multipliant γ, a gauche, par une puissance convenable de n on peut obtenir une matrice $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que
   — ou bien $c = 0$,
   — ou bien $|a'| < |c|$.
4. Dans le premier cas, montrer que γ est un produit de puissances de w et de n.
5. Dans le second cas, montrer que $w.\gamma' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ verifie $|c''| < |c|$.
6. Conclure

Exercice 7. On considere le sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincare $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C},\ y > 0\}$ par transformations de Moebius

$$\gamma.z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(on rappelle que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$ avec une seule orbite.) Le but de cet exercice est de trouver un domaine fondamental pour le quotient (ie. l'espace des orbites) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Pour cela on utilisera les generateurs n et w de l'exercice precedent.

1. Soit $z \in \mathbb{H}$ et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, montrer la formule
$$\operatorname{Im} \gamma.z = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$
2. Etant donne $z \in \mathbb{H}$, calculer $n^k.z$ et montrer que etant donne $z \in \mathbb{H}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\Re(n^k.z) \in [-1/2, 1/2[$.
3. Montrer que la transformation $z \mapsto w.z$ est une bijection entre le demi-disque $\{z \in \mathbb{H},\ |z| < 1\}$ et l'espace $\{z \in \mathbb{H},\ |z| > 1\} \subset \mathbb{H}$.
4. Que dire de l'action de w sur le demi-cercle $\{z \in \mathbb{H},\ |z| = 1\} \subset \mathbb{H}$?
5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$ il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma.z$ est contenu dans le sous-ensemble (voir le dessin)
$$\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \{z \in \mathbb{H}, \Re z \in [-1/2, 1/2[,\ |z| > 1\} \cup \{\Re z \in [-1/2, 0],\ |z| = 1\}.$$
6. Soit $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, montrer que pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a
$$\operatorname{Im}(\gamma.z) \leqslant \operatorname{Im} z$$
et examiner les cas d'egalite (il faudra bien sur utiliser le fin que a, b, c, d sont entiers avec $ad - bc = 1$).
7. Montrer que si z et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont tels que
$$z \text{ et } \gamma.z \text{ sont tous deux contenus dans } \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$
alors $z = \gamma.z$ et ou bien $\gamma = \pm\mathrm{Id}$ ou bien $z = i$ ou bien $z = \omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. Montrer que $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ est un domaine fondamental pour l'action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$.
9. Dans les deux derniers cas de la question 7, quelles sont les valeurs possibles pour γ ?

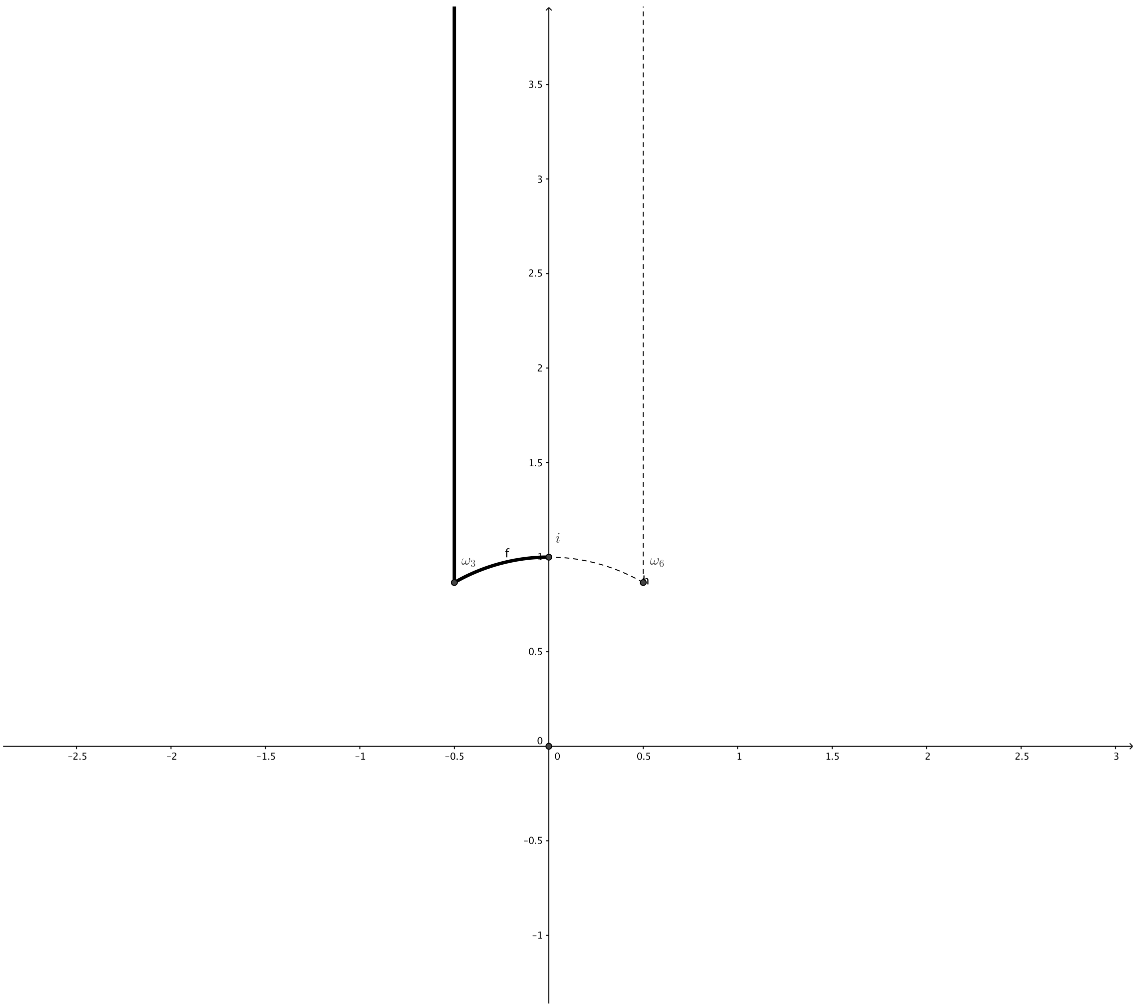

FIGURE 1 – Le domaine fondamental $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$