5.1. Dans le demi-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique, expliciter l'application de transport parallèle le long d'un horocycle (une courbe de la forme $\gamma(t) = (t, c)$ où c est une constante).

5.2. Soit M une surface lisse dans $\mathbf{R}^3$. Si X et Y sont des champs tangents a M, on definit $\nabla_X Y =$ la composante tangente à M de la dérivée de Y dans la direction X. Montrer que ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique Euclidienne sur M.

5.3. Soit ∇ une connexion symétrique dans une varieté Riemanniene (M, g) tel que les ∇-géodésiques sont des g-géodésiques. Montrer que ∇ est la connexion de Levi-Civita de g.

5.4. On considère un cercle parallèle à l'équateur de la sphère $\mathbb{S}^2$. Calculer l'holonomie le long de cette courbe.
(Conseil: Introduire le cône de $\mathbf{R}^3$ tangent à la sphere le long de la courbe considérée.)

5.5. **Géodésiques dans les modèles de courbures constantes**

(a) Quelles sont les géodésiques de l'espace euclidien ?

(b) i. Les coordonnées sphériques de la sphère $\mathbb{S}^2$ sont données par l'application

$$(x, y, z) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

Exprimer la métrique ronde de $\mathbb{S}^2$ dans ces coordonnées. Puis calculer les symboles de Christoffel. En déduire enfin que les méridiens $((\theta(t), \varphi(t) = (\theta_0, t))$ sont des géodésiques.

ii. On s'intéresse maintenant au cas général de la sphère ronde $\mathbb{S}^n$. Soit

$$\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_{n+1}(t))$$

une géodésique partant du pôle nord et de vitesse initiale $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Montrer que cette géodésique est un grand cercle. En déduire une description de toutes les géodésiques de la sphère.
Indication : On pourra utiliser le fait que le groupe d'isométries de la sphère $\mathbb{S}^n$ est le groupe $O_{n+1}(\mathbf{R})$.

(c) On cherche maintenant les géodésiques du demi-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique.

i. Prouver que les courbes de la forme

$$\gamma(t) = (x_0, e^{at})$$

sont des géodésiques.

ii. On appelle "cercle généralisé" une courbe de $\mathbb{R}^2$ qui est soit une droite, soit un cercle. Montrer que le groupe des homographies

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \cup \{\infty\} \\ & z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

envoie tout cercle généralisé sur un cercle généralisé.

iii. Montrer aussi qu'une homographie conserve les mesures des angles.

iv. En déduire que les géodésiques du plan hyperbolique sont des droites verticales ou des demi-cercles orthogonaux au bord, paramétrés à vitesse constante.

5.6. (a) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le gradient de f par le champ de vecteurs $\mathrm{grad} f \in \Gamma(M)$ tel que $\langle \mathrm{grad} f, X \rangle = df(X) = X(f)$ pour tout $X \in \Gamma(M)$. Calculer l'expression du gradient en coordonnées.

(b) Soit $Y \in \Gamma(M)$ un champ de vecteurs, alors la divergence de Y est donnée par la fonction lisse $\mathrm{div}(Y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ définie par $\mathrm{div}(Y) = \mathrm{Trace}(\nabla Y)$ où $\nabla Y : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est donnée par $\nabla Y(X) = \nabla_X Y$. Calculer l'expression de la divergence en coordonnées.

(c) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le laplacien de f par la fonction $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$. Calculer l'expression du laplacien en coordonnées.

(d) Remarquer que si $M = \mathbb{R}^n$, les concepts de gradient, divergence et laplacien correspondent à ce que vous avez appris en deuxième année.