Géométrie Riemannienne, le 24.02.20

Je suggère de lire les § 2.2, 2.3 et 3.3 (quand vous avez le temps)

__Rappel__ la dérivée covariante est l'opérateur

$$\nabla_t : \Gamma_\gamma \to \Gamma_\gamma$$

défini par

$$\nabla_t X = \nabla_{\dot\gamma} X \quad (\forall X \in \Gamma_\gamma)$$

$$\left(\Gamma_\gamma = \{ X : [a,b] \to TM \mid X_t \in T_{\gamma(t)} M \}\right)$$

On va redémontrer la formule qui calcule ∇_t en coordonnées locales.

Soit $Y_t = b_j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma_\gamma$

On écrit

$$X_t = \dot\gamma(t) = \dot x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \dot\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Alors

$$\nabla_t Y = \nabla_{\dot\gamma} Y = \nabla_X Y = \nabla_X \left(b_j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$= X(b_j) \frac{\partial}{\partial x^j} + b_j \nabla_X \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$= X(b_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + b_j \nabla_{\dot x^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$= X(b_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + b_j \cdot \dot x^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$= X(b_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + b_j \cdot \dot x^i \cdot \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

or $X(b_j)$ avec $X = \dot{\gamma}(t)$ i.e.

γ est une courbe qui représente X

$$\Rightarrow X(b_j) = \frac{d}{dt} b_j(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} b_j(t)$$

$$= \dot{b}_j$$

Ainsi

$$\nabla_t Y = \dot{b}_j \frac{\partial}{\partial x^j} + b_j \dot{x}^i \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\nabla_t Y = \left(\dot{b}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i b^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

(dérivée covariante en coordonnées)

Cas particulier : l'accélération covariante est $\nabla_t \dot{\gamma} = \left(\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$

Lemme $\nabla_t : \Gamma_\gamma \to \Gamma_\gamma$ vérifie

1) ∇_t est $\mathbb{R}$-linéaire

2) $\nabla_t(hX) = \frac{dh}{dt} \cdot X + h \cdot \nabla_t X$

$\left(\forall\, h \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}) \right)$

3) Si ∇ est compatible avec une métrique g (e.g. si ∇ = Levi-Civita)
alors

Si $X, Y \in \Gamma_\gamma \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(g(X,Y)\right) = g(\nabla_t X, Y) + g(X, \nabla_t Y)$$

Preuve Exercice.

Th (Transport parallèle)

Soit $\gamma : [0,1] \to M$ courbe C^∞ et ∇ une connexion sur M. Alors $\forall\, \xi \in T_p M$ $(p = \gamma(0))$ il existe $X_t \in \Gamma_\gamma$ tq

$$X_0 = \xi \quad \text{et} \quad \nabla_t X \equiv 0.$$

De plus X est unique.

Preuve On se ramène aux théorèmes sur les EDO, linéaires

#

Autre point de vue :

Soit $\gamma : [0,1] \to M$, de classe C^∞ alors le transport parallèle définit une application (linéaire)

$$P = P_t^\gamma : T_p M \to \Gamma_\gamma \qquad (p = \gamma(0) \in M)$$

t.q.

1) $P_0 : T_p M \to T_p M$ est l'identité

2) $P_t(\xi)$ est parallèle $\forall \xi \in T_p M$

(i.e. $\nabla_t (P_t \xi) = 0$).

Preuve de l'existence et l'unicité de P :

On se donne n champs

$$Z_1, \dots, Z_n \in \Gamma_\gamma$$

tq. $\{Z_1(t), \dots, Z_n(t)\}$ est une base de $T_{\gamma(t)} M$, $\forall t$.

(on dit que $Z_1, \dots, Z_n$ est un repère mobile le long de γ.

On pose

$$\boxed{\nabla_t Z_i = d_i^j(t) Z_j}$$

On note

$$D(t) = \left(d_i^j(t)\right)$$

(On cherche une équation pour la matrice de transport parallèle dans la base $Z_j(t)$:)

Posons

$$P(Z_i(0)) = P_i^k(t) \cdot Z_k(t)$$

on a

$$0 = \nabla_t (P_i^k \cdot Z_k) = \dot{P}_i^k \cdot Z_k + P_i^k \cdot \nabla_t Z_k$$

$$= \dot{P}_i^k Z_k + P_i^k \cdot d_k^j \cdot Z_j$$

i.e.

$$\sum_k \left(\dot{P}_i^k + P_i^j d_j^k \right) \cdot Z_k = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\dot{P}_i^k = - P_i^j d_j^k$$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{dP}{dt} = - P \cdot D}$ $\quad P_0 = \mathrm{Id}$.

De nouveau le théorème sur les systèmes d'EDO linéaire nous donnent l'existence et l'unicité de

$$P : [0,1] \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

#

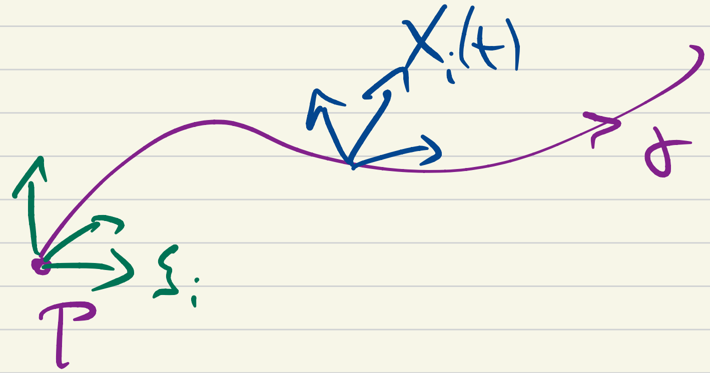
Conséquence

Toute base $\xi_1, \dots, \xi_n \in T_p M$ se prolonge en un repère $X_1, \dots, X_n$ mobile parallèle

i.e. $X_i(0) = \xi_i$, $\nabla_t X_i = 0$

De plus si ∇ est compatible avec g et $\xi_1, \dots, \xi_n$ est orthonormé

$\Rightarrow$ $X_1(t), \dots, X_n(t) \in T_{\gamma(t)} M$ est orthonormé $\forall t$



§3.5 Formule de variation première (par la longueur)

Soit M une variété, g = métrique Riem. sur M

et $\gamma : [a,b] \to M$ une courbe C^2

Question Calculer la variation de

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}\, dt$$

par une perturbation infinitésimale de γ.

Notation classique : $\delta \ell(\gamma) = ?$

Déf. Une variation de γ est une application C^2

$$\varphi : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad \text{t.q.}$$

$$\varphi(t,0) = \gamma(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

On note parfois $\gamma_s(t) = \varphi(t,s)$, c'est une famille à un paramètre (s) qui déforme la courbe $\gamma = \gamma_0$.

La question est donc

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \,?$$

Lemme Si on note

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varphi_* \frac{\partial}{\partial t}\ , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \varphi_* \frac{\partial}{\partial s}$$

alors

$$\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)$$

Explication heuristique on devrait avoir

$$\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = \varphi_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right]\right) = 0$$

Pour prouver le lemme rigoureusement on se donne de coordonnées locales au voisinage de $\gamma(t) \in \Pi$ et on pose

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi^k}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = \frac{\partial\varphi^k}{\partial t} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{\partial\varphi^k}{\partial t} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(\frac{\partial\varphi^j}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \frac{\partial\varphi^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial\varphi^j}{\partial s} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) +$$

$$\frac{\partial^k\varphi^j}{\partial t\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\Rightarrow \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial t \partial s} + \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial \varphi^i}{\partial s} \frac{\partial \varphi^j}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

On a une expression semblable pour

$$\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

on fait la différence et on utilise $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$

$\Rightarrow$ la difference est nulle

#

<u>Lemme 2</u> On suppose que $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$ $\forall t$. Alors

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \int_a^b \frac{\left\langle \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|} \cdot dt$$

Preuve On a

$$\ell(\gamma_s) = \int_a^b \|\dot{\gamma}_s(t)\| = \int_a^b \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,s)\right\| dt$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{ds}\ell(\gamma_s) = \int_a^b \frac{d}{ds}\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\| dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{ds} \sqrt{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle}\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle}{2\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle^{1/2}} dt = \int_a^b \frac{\left\langle \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle}{\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|} dt$$

$$= \int_a^b \frac{\left\langle \nabla_t \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle}{\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|} dt$$

#

Théorème (Formule de Variation 1^{er} par la longueur)

Soit $\gamma : [a,b] \to M$, une courbe C^2 dans la variété Riemannienne (M,g) parcourue à vitesse constante $(\neq 0)$. Alors pour toute variation φ de γ on a

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \frac{b-a}{\ell}\left[\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \dot\gamma \right\rangle \Big|_{t=a}^{b} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \nabla_t \dot\gamma \right\rangle dt \right]$$

Preuve On fait une intégration par partie dans le lemme précédent.

(ici $\ell = \ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma\| dt$)

Preuve Puisque γ est à vitesse constante, on a

$$\ell = (b-a)\cdot\|\dot\gamma\| \quad \left(\Rightarrow \frac{b-a}{\ell} = \frac{1}{\|\dot\gamma\|}\right)$$

le lemme précédent dit que

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \frac{b-a}{\ell}\int_a^b \left\langle \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle dt$$

or $$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle$$

Donc

$$\frac{d}{ds}\ell(\gamma_s) = \frac{b-a}{\ell}\int_a^b \left(\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \nabla_t \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle\right) dt$$

$\Rightarrow$

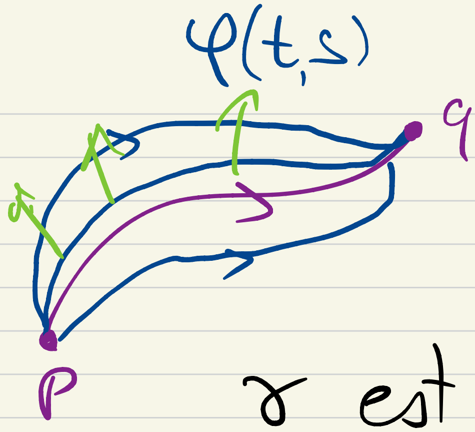
$$\frac{d}{ds}\ell(\gamma_s) = \frac{b-a}{\ell}\left[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=a}^{b} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \nabla_t \dot{\gamma} \right\rangle \right] dt$$

#

<u>Corollaire</u> γ est un courbe critique par la longueur

$\Leftrightarrow$ $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \ell(\gamma_s) = 0$ par toute variation à extrémités fixées

$\Leftrightarrow$ $\nabla_t \dot{\gamma} \equiv 0$ (i.e. γ géodésique)



<u>Preuve</u> le théorème entraîne que γ est critique par $\ell(\gamma)$

$$\iff \int_a^b \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \nabla_t \dot\gamma \right\rangle dt = 0$$

par toute variation φ à extrémités fixées car

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(a,0) = 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial s}(b,0)$$

Lemme de Dubois Raymond

$$\implies \nabla_t \dot\gamma = 0.$$

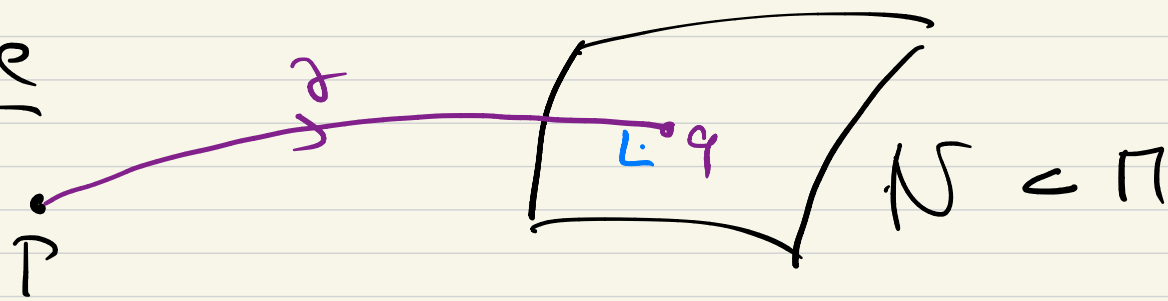
Réciproquement, si $\nabla_t \dot\gamma = 0 \implies$

$\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \ell(\gamma) = 0$ par toute variation à extrémités fixes

#

Corollaire 2 Soit $\gamma : [a,b] \to M$ est une courbe C^2 qui minimise la distance entre un point $p \in M$ et une sous-variété $N \subset M$. Alors γ est géodésique et est orthogonale à N.

Preuve



On a $\gamma : [0,1] \to M$, tq $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$

$q \in N$ tq

$$\ell(\gamma) = \min \{ \ell(\sigma) \mid \sigma \text{ relie } p \text{ à } N \}$$

En particulier γ est de longueur minimale de p à q $\Rightarrow$ γ est géodésique $(\nabla_t \dot{\gamma} = 0)$

la formule de variation $1^{ère}$ $\Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_0 \ell(\gamma_s) = \frac{1}{\ell}\left[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^1 - \int_0^1 \langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \underbrace{\nabla_t \dot{\gamma}}_{=0} \rangle dt \right]$$

Pour toute variation φ de γ tq

i) $\varphi(0,s) = p$, $\forall s$

ii) $\varphi(1,s) \in N$

(on considère toutes les courbes reliant p à un point de N).

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,0) = 0 \in T_p M \\ \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0) \in T_q N \end{cases}$$

(car $\varphi(1,s) \in N$ $\forall s$)

$\Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_0 \ell(\gamma_s) = \frac{1}{\ell}\Big[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0) \right\rangle - \underbrace{\cancel{\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,0), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0) \right\rangle}}_{=0} - \underbrace{\cancel{\int_a^b (\dots)\,dt}}_{=0} \Big]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left\langle \dot\gamma(1), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0) \right\rangle = 0}$$

par tote variation φ vérifiant les conditions $\left(\dot\gamma(1) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0) \right)$

$$\Rightarrow \quad \langle \dot\gamma(1), \eta \rangle = 0$$

$$\forall \eta \in T_{\gamma(1)} N = T_q N$$

Donc γ est orthogonale à N en q

#