3.1. (a) Soit $L : T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un lagrangien sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que si $t \mapsto x(t)$ est une courbe extrémale pour l'action associée, alors le hamiltonien

$$H(x,v) = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v) - L(x,v)$$

est une constante de mouvement (cela signifie $H(x(t),\dot{x}(t))$ est constante par rapport à t).

Solution. On rappelle les équations d'Euler-Lagrange pour une courbe critique : pour tout $i = 1, \cdots, n$,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma,\dot\gamma) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma,\dot\gamma).$$

Soit x une courbe critique pour f et soit α la fonction de t donnée par

$$\alpha(t) = H(x(t),\dot{x}(t)) = \sum_i v^i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t),\dot{x}(t)) - L(x(t),\dot{x}(t)).$$

Il s'agit de montrer que que $\frac{d\alpha}{dt} = 0$. Or, en utilisent les équations d'Euler–Lagrange,

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt}(t) &= \sum_i \ddot{x^i}(t)\frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t),\dot{x}(t)) + \sum_i \dot{x^i}(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}L(x(t),\dot{x}(t)) \\
&= \sum_i \ddot{x^i}(t)\frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t),\dot{x}(t)) + \sum_i \dot{x^i}(t)\frac{\partial L}{\partial x^i}(x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}L(x(t),\dot{x}(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Remarquer que calcul n'est pas valable pour un lagrangien non-autonome $L(t,x,\dot{x})$. □

(b) Montrer que si le Lagrangien $L(x,v)$ est homogène de poids $r > 1$ en v, alors la fonction L elle-même est une constante de mouvement. (Une fonction de classe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *homogène* de poids r si $h(\lambda v) = \lambda^r h(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$; dans ce cas on a la *relation d'Euler* $v^i \frac{\partial h}{\partial v^i} = r\,h(v)$ [écrire la preuve, qui est facile].)

Solution. La relation d'Euler se prouve en dérivant l'égalité $h(\lambda v) = \lambda^r h(v)$ par rapport à λ puis à poser $\lambda = 1$.
On a donc $\frac{\partial L}{\partial v^i} v^i = r\,L(x,v)$. Alors le hamiltonien s'écrit

$$H(x,v) = r\,L(x,v) - L(x-v) = (r-1)L(x,v).$$

Puisque $r \neq 1$, cela montre que $L(x,v)$ est une constante de mouvement comme H. □

(c) Montrer que si le Lagrangien est de la forme

$$L(x,v) = \frac{1}{2}\,g_{ij}(x)\,v^i\,v^j - U(x),$$

où $U : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et g_{ij} est une métrique riemannienne sur Ω, alors $\frac{1}{2}\,g_{ij}(x)\,v^i\,v^j + U(x)$ est une constante de mouvement.

Solution. Dans ce lagrangien, seulement le terme d'énergie cinétique $K(x,v) = \frac{1}{2}\, g_{ij}(x)\, v^i\, v^j$ dépend de v, et il est 2-homogène, donc la relation d'Euler nous donne

$$v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} = v^i \frac{\partial K}{\partial v^i} = 2\, K(x,v).$$

Donc le hamiltonien, qu'est une constante de mouvement, s'écrit $H = 2K - L = 2K - (K - U) = K + U$. Cela montre que $H(x,v) = K(x,v) + U(x)$ est une constante de mouvement. □

i. Expliquer le lien avec le principe de conservation de l'énergie de la mécanique analytique.

Solution. Dans un système mécanique où $K(x,v)$ est l'énergie cinétique et $U(x)$ est l'énergie potentielle, le mouvement du système est décrit par les courbes extremales de l'action $\int L(x,\dot{x})\, \mathrm{d}t$ associée au lagrangien $L(x,v) = K(x,v) - U(x)$. Donc le fait que le hamiltonien $H(x,v) = K(x,v) + U(x)$ est une constante de mouvement implique que l'énergie (cinétique plus potentielle) est conservée. □

ii. Montrer que toute géodésique d'une variété riemannienne est parcourue à vitesse constante.

Solution. Le mouvement géodésique dans une variété riemannienne est le cas particulière de systéme mécanique oú $U = 0$, donc $L = K$ et $H = K$. Dans ce-cas là, l'énergie cinétique $K(x,v) = \frac{1}{2}\, g_{ij}\, v^i\, v^j = \frac{1}{2}\, \|v\|_x^2$ est une constante de mouvement et la vitesse $\|v\|_x = \sqrt{2K(x,v)}$ est constante aussi. □

(d) Montrer que si $L(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ ne dépend pas de la coordoonée x^i, alors le *moment conjugué* $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ est une constante de mouvement du système (dans ce cas on dit que x^i est une *coordonnée cyclique* pour le Lagrangien L).

Solution. Si $f(x^1 \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ ne dépend pas de la coordonnée x^i, alors d'après Euler–Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial f}{\partial v^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0.$$

□

(e) Soit M une surface de révolution autour de l'axe z dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et soit γ une géodésique dans M. Montrer que la curve γ, en plus d'avoir vitesse constante, garde constant aussi le moment angulaire autour de l'axe z.

Solution. On peut utiliser la paramétrisation $f(\varphi, s) = (r(s)\cos\varphi, r(s)\sin\varphi, z(s))$, où $c(s) \mapsto (r(s), z(s))$ est une curve dans le demi-plan $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. La métrique dans las coordonnées (φ, s) est $g = r(s)^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \|c'(s)\|^2 \mathrm{d}s^2$ et le lagrangien est $L(\varphi, s) = \frac{1}{2}\, r(s)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, \|c'(s)\|^2 \dot{s}^2$. Dans cette lagrangien la coordonée φ est cyclique et le moment conjugué $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r(s)^2 \dot{\varphi}$ est une constante de mouvement. D'autre part, le moment angulaire est le produit de la distance $r(s)$ à l'axe z fois la composante de la vitesse autour de l'axe z. Cette composante est $\|\frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi}\| = r(s)\dot{\varphi}$, donc le moment angulaire est le moment conjuguè à la coordonée φ. □

3.2. (a) Montrer que les équations des géodésiques du demi-plan de Poincaré $\{(x,y) \mid y > 0\}$ avec la métrique $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ s'écrivent

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.$$

Solution. Les géodésiques sont, par définition, des points critiques pour le lagrangien énergie $L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$. On a

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{y^2}$$

puis, en dérivant par rapport au temps,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{y^2}\left(\ddot{x} - 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^2}\left(\ddot{y} - 2\frac{\dot{y}^2}{y}\right).$$

Les équations d'Euler–Lagrange se traduisent donc en

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.$$

On verra plus tard comment décrire géométriquement ces courbes. □

(b) Montrer que $\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ et $\frac{\dot{x}}{y^2}$ sont des constantes de mouvement pour ces équations.

Solution. Il suffit de noter que la coordonée x est cyclique et d'appliquer le résultat de l'exercice précédent. □

3.3. Nous allons étudier la carte de Mercator. Mercator est un géographe Flamand qui présenta sa carte de la Terre en 1569, sans expliquer comment il l'avait construit. Cette carte est devenue la plus utilisée dans le monde, sans toutefois être exacte, car la taille des pays est d'autant plus grande que l'on s'approche des pôles.

Un grand avantage de cette carte est qu'elle préserve les angles et elle à la direction nord-sud comme direction vertical. Cela rend facile la tâche d'aller d'un point A à un point B : il suffit de dessiner une ligne droite de A à B dans la carte, mesurer l'angle de la ligne avec la direction vertical avec un rapporteur, puis naviguer le long de la route dessinée à l'aide d'une boussole. Ce type de courbe, qui fait un angle constant avec la direction sud-nord, s'appelle une loxodromie.

Pour construire la carte de Mercator on peut commencer pour mettre la Terre (soupçonné sphérique) dans une boîte de conserve (un cylindre) et la projeter horizontalement contre les paroies de cette boîte, puis de dérouler la boite en un plan. En ne faisant que ceci, nous obtenons une paramétrisation de la sphère qui n'est pas conforme car le facteur de dilatation horizontal n'est pas égal au facteur de dilatation vertical dans la plûpart des points. Or nous voulons une paramétrisation qui conserve les angles. Il faut donc encore modifier l'espacement entre les parallèles (les lignes de latitude constante) pour obtenir une répresentation conforme, et donc la carte de Mercator. (Voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_1569_world_map#legend3`.)

(a) Soit la paramétrisation $f : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{S}^2$ de la sphère $\mathbb{S}^2$ en coordonées polaires, donnée par $f(\phi,\theta) = (\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta))$. Calculer la métrique sphérique dans les coordonnées (ϕ,θ).

Solution. La métrique sphérique dans las coordonées (ϕ,θ) est

$$g = f^*\mathrm{Eucl} = \mathrm{d}\theta^2 + (\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\phi^2,$$

où $\mathrm{Eucl} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ est la métrique euclidienne dans $\mathbb{R}^3$. □

(b) Calculer le rappel de la métrique de la sphère sur le cylindre, via la projection “boîte de conserve” c'est à dire la projection en (ϕ, z), et montrer que cette projection ne donne pas une répresentation conforme de la sphere.

Solution. La projection “boîte de conserve” du point $f(\phi,\theta)$ est le point $a(\phi,\theta) = (\cos\phi, \sin\phi, \cos\theta)$. La métrique après la projection, dans les mêmes coordonnées (ϕ,θ), est

$$a^*\mathrm{Eucl} = \mathrm{d}\phi^2 + (\sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta^2,$$

qui n'est pas une déformation conforme de g. □

(c) Obtenir une répresentation plate conforme de $\mathbb{S}^2$ où la direction nord-sud est verticale. (Conseil : Proposer une répresentation $(x, y) = (\phi, f(\theta))$ et trouver la bonne fonction f.) Qu'est-ce que se passe dans les pôles ?

Solution. On dénote $m(\phi,\theta) = (\phi, f(\theta))$. On cherche une fonction réelle $f(\theta)$ tel que la métrique

$$h = m^*\mathrm{Eucl} = \mathrm{d}\phi^2 + f'(\theta)^2 \mathrm{d}\theta^2$$

soit une déformation conforme de la métrique sphérique

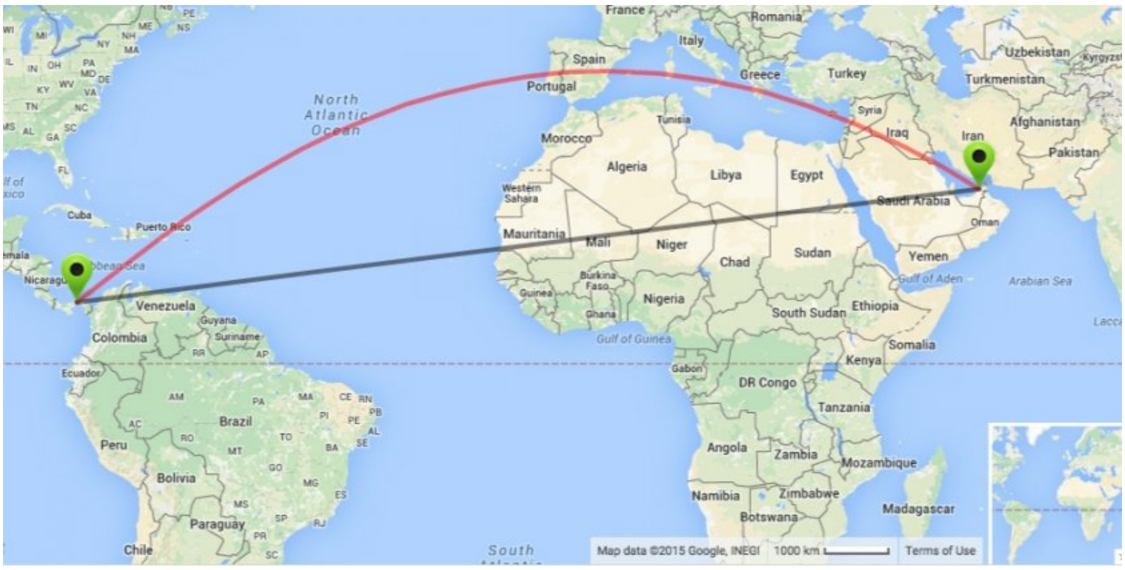
$$g = \mathrm{d}\theta^2 + (\sin\theta)^2\, \mathrm{d}\phi^2,$$

ça veut dire, on veut qu'il existe une fonction $u = u(\phi,\theta)$ (le facteur conforme) tel que $h = u^2 g$. En régardant les termes avec $\mathrm{d}\phi^2$, on voit que le facteur conforme doit être $u(\phi,\theta) = \frac{1}{\sin\theta}$. Cela implique que la fonction $f(\theta)$ doit satisfaire l'equation $f'(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}$. On peut utiliser

$$f(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{\sin\alpha}\, \mathrm{d}\alpha = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

□

(d) Montrer que la courbe loxodromie de A à B n'est pas en général le chemin le plus court. Réfléchir à la forme des géodésiques sur la carte de Mercator puis regarder l'image suivante.



Solution. Chaque chemin loxodromique fait un angle constant avec les méridiens. Si on continue un chemin loxodromique où l'angle n'est pas nul, le chemin s'approche au pôle de la sphère en faisant une spirale. C'est évident donc qu'il ne peu pas être le chemin le plus court. □