4.1. Prouver que pour toute connexion ∇ sur une variété M, l'application

$$\begin{array}{rccl} T: & \Gamma(M)\times\Gamma(M) & \longrightarrow & \Gamma(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}$$

est un tenseur sur M, c'est-à-dire qu'elle bilinéaire sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(M)$.

4.2. (a) Calculer les symboles de Christoffel en chaque point de la métrique euclidienne en coordonnées polaires.

(b) On considère le demi-plan

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y)|\ y>0\}$$

muni de la métrique hyperbolique

$$g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

Calculer les symboles de Christoffel.

Solution. Les coefficients de la métrique sont $g_{xx} = g_{yy} = \frac{1}{y^2}$ et $g_{xy} = g_{yx} = 0$, et leurs derivées non nules sont $\partial y g_{xx} = \partial y g_{yy} = -\frac{2}{y}$. Alors on peut calculer les symboles de Christoffel $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{i,j})$. On obtient

$$\Gamma_{xxx} = \Gamma_{xyy} = \Gamma_{yxy} = \Gamma_{yyx} = 0$$

$$\Gamma_{xxy} = -\Gamma_{xyx} = -\Gamma_{yxx} = -\Gamma_{yyy} = \frac{1}{y}.$$

Pour calculer les symboles de Christoffel de deuxième espèce $\Gamma^l_{ij} = \Gamma_{ijk}g^{kl}$ on utilise les coefficients de la la métrique inversée $g^{xx} = g^{yy} = y^2$ et $g^{xy} = g^{yx} = 0$. On obtient

$$\Gamma^x_{xx} = \Gamma^y_{xy} = \Gamma^y_{yx} = \Gamma^x_{yy} = 0$$

$$\Gamma^y_{xx} = -\Gamma^x_{xy} = -\Gamma^x_{yx} = -\Gamma^y_{yy} = y.$$

□

4.3. Soit (M,g) une variété riemannienne et $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse quelconque.

(a) Montrer que si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g alors, pour tout couple de champs parallèles $X, Y \in \Gamma_\gamma$, $g(X,Y)$ est constant le long de γ.

Solution. On utilise le fait que la dérivée covariante est compatible avec la métrique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x,y) = g(\nabla_t X, Y) + g(X, \nabla_t Y) = g(0,Y) + g(X,0) = 0.$$

□

(b) En déduire que P_t est une isométrie de $T_{\gamma(0)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$ puis qu'il existe des champs de vecteurs qui forment une base orthonormée en tout point et qui sont parallèle le long de γ.

Solution. L'operateur de transport parallèle est une isométrie car il préserve le produit scalaire entre vecteurs. Pour trouver les champs souhaités on commence avec une base orthonormée $(E_i)_i$ de l'espace $T\gamma(0)$, puis on fait le transport parallèle de chaque E_i le long de γ. Ainsi on obtient des champs $E_i(t)$ qui donnent une base orthonormée de chaque espace tangent $T_{\gamma(t)}M$ car $\langle E_i(t), E_j(t)\rangle = \langle E_i(0), E_j(0)\rangle = \delta_{i,j}$. □

(c) Soit X un champs parallèle le long de γ. Montrer que ses coordonnées dans un repère du type précédent sont constantes.

Solution. Les coordonnées $X^i(t)$ du vecteur $X(t)$ dans la base orthonormée $(E_i)_i$ sont les produits scalaires $X^i(t) = \langle X(t), E_i(t)\rangle$, donc elles sont constantes. □

(d) Montrer que γ est une géodésique si et seulement si $\|\gamma'\|$ et $\angle(X, \gamma')$ sont constants le long de γ pour tout champ parallèle X.

Solution. Si γ est géodésique, alors $\gamma'(t)$ est parallèle, donc $\|\gamma'(t)\|$ est constante et l'angle $\angle(X, \gamma') = \arccos \frac{\langle X,\gamma'}{\|X\|\,\|\gamma'\|}$ est constant aussi car il est exprimé en termes de produits scalaires entre champs parallèles. □

4.4. Soit ∇ une connexion (quelconque) dans une variété M et soit P_t l'application de transport parallèle associée, le long d'une courbe $\gamma : [0, 1] \to M$. Montrer que

$$\nabla_t V|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{P_t^{-1} V(t) - V(0)}{t}.$$

Interpréter cette formule.

Solution. Soit $(E_i)_i$ une base de champs parallèles le long de la curve γ. Cela permet de décomomposer le vecteur $V(t)$ selon la formule $V(t) = V^i(t)\, E_i(t)$ et obtenir une première formule pour sa dérivée covariante,

$$\nabla_t V = (V^i)'(t)\, E_i(t).$$

D'autre part on a déjà montré que le transport parallèle préserve les coordonnées dans la base E_i, donc $P_t^{-} V(t) = V^i(t)\, E_i(0)$, et cela permet d'obtenir la deuxième formule

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{P_t^{-1} V(t) - V(0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{V^i(t)\, E_i(0) - V^i(0)\, E(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{V^i(t) - V^i(0)}{t}\, E_i(0) = (V^i)'(0)\, E_i(0) = \nabla_t V|_0
\end{aligned}$$

□

4.5. Soit (M, g) une variété riemannienne connexe et soit H_p l'ensemble des endomorphisme de T_pM donnés par des transports parallèles le long de courbes $c : [0, 1] \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telles que $c(0) = c(1)$. Montrer que H_p est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ et que H_p et H_q sont isomorphes.

Solution. La clé de cet exercice est le fait que l'operateur P_γ de transport parallèle le long d'une courbe γ dépend fonctoriellement de la courbe γ, ça veut dire, on a $P_{\gamma*\beta} = P_\beta \circ P_\gamma$. (Ici on dénote $\gamma * \beta$ la concatenation de deux courbes γ et β.) □

4.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et soit

$$\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

un plongement lisse. On munit la sous-variété $M = \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ de la métrique riemannienne induite par la métrique usuelle de $\mathbb{R}^n$. On note $u^1, \ldots, u^k$ les coordonnées sur M associées à la carte ψ^{-1}. On peut alors représenter la base associée de l'espace tangent en un point $p = \psi(u)$ de M par les vecteurs "concret"

$$\xi_i = \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial u^i} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Montrer que les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée sont reliés aux composantes tangentielles des dérivées seconde de ψ de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right)^\top = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \xi_k.$$

Solution. Selon la définition des symboles de Christoffel, on a $\nabla_{\xi_i} \xi_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \xi_k$, donc on doit montrer que

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right)^\top.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \partial_{\xi_i} \xi_j,$$

où ∂_{ξ_i} denote la dérivée habituel en $\mathbb{R}^n$ dans la direction ξ_i. Alors l'équation à montrer devient

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j = \left(\partial_{\xi_i} \xi_j \right)^\top.$$

On fait, on peut montrer pour tout champs tangent X et pour tout vecteur tangent V que

$$\nabla_V X = \left(\partial_V X \right)^\top.$$

On va faire ça dans l'exercice 5.2... $\square$