Math 125 - Chap 2-3

30 Mars 2020

Définition 2.2. *Soit* $G \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *un sous-groupe d'isometries tel qu'il existe une tuile* $\mathbf{P}$ *telle que*

$$\mathcal{P}(\mathbf{P}, G) = \{g.\mathbf{P},\ g \in G\}$$

forme un pavage du plan. On dit alors que G *est un groupe paveur.*

Théorème 2.5. *Soit* G *un groupe paveur de pavage associe* $\mathcal{P}$*; soit* $G_{\mathcal{P}}$ *son groupe d'isometries. Alors* $\mathcal{P}$ *est un pavage regulier (ie.* $G_{\mathcal{P}}$ *est cristallographique) et* G *est d'indice fini dans* $G_{\mathcal{P}}$*. Par ailleurs le theoreme de Fedorov est valide pour* G*:* G *appartient a l'une des 17 classes d'isomorphisme de groupes du Theoreme de Fedorov et* G^+ *est isomorphe a l'un des 5 groupes du Theoreme 2.2.*

THÉORÈME 2.6. *Soit G un groupe paveur et T_G son sous-groupe des translations. Alors $T_G = T(\Gamma)$ est un reseau de translations: il existe $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$, $\mathbb{R}$-lineairement independants tels que $\Gamma = \mathbb{Z}.\gamma_0 + \mathbb{Z}.\gamma_1$. En particulier $\mathcal{P}$ est un pavage regulier.*

La preuve du Thm de Fedorov pour $G_{\mathcal{P}}^{+}$ se repete mutatis mutandis pour G^{+} et donne que G^{+} appartient exactement 5 classes d'isomorphisme.

$$G_{\mathcal{P}}/G = \{gG \quad g \in G_{\mathcal{P}}\} \text{ et fini.}$$

Lemme 2.4. *Soit G un groupe et $K \subset H \subset G$ des sous-groupes. Alors les conditions suivantes sont equivalentes:*

(1) *G/K est fini.*
(2) *G/H et H/K sont finis.*

deplus, on a la relation entre cardinaux

$$|G/K| = |G/H|.|H/K|.$$

Preuve : Exercice Serie 5.

$K \subset H \subset G$:

G/K est fini $\Longleftrightarrow$ G/H & H/K sont finis

$$\left|G/K\right| = \left|G/H\right| \times \left|H/K\right|$$

Preuve que G_p/G est fini

$$G_p \supset G \supset G^+ \supset T_G = T(\Gamma)$$
$$\supset G_p^+ \qquad \supset T_{G_p} = T(\Gamma_p)$$

et $\Gamma_p \supset \Gamma$

G_p/G est fini il suffit de mq

$G_p/T(\Gamma)$ est fini

Dem mq $G_p/T(\Gamma)$ est fini

on note que

- $G_p/T(\Gamma_p)$ est fini.

G_p/G_p^+ est fini d'odre ≤ 2

- si $G_p^+ \neq G_p$ $\quad G_p = G_p^+ \amalg s_0 G_p^+$

$G_p^+/T(\Gamma_p)$ est fini et l'odre ≤ 6.

- On a vu que $G_p^+/T(\Gamma_p) \simeq G_p^{+0}$ d'ordre ≤ 6

Par transitivité $G_p/T(\Gamma_p)$ est fini d'ordre $\leq 2 \times 6 = 12$.

Pour mq $G_p/T(\Gamma)$ est fini il suffit de

mq $T(\Gamma_p)/T(\Gamma)$ est fini.

$\square$

PROPOSITION 2.5. *Soit $\Gamma' \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ deux reseaux contenus l'un dans l'autre, alors le groupe quotient (Γ est commutatif) Γ/Γ' est fini.*

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1 \supset \Gamma' = \mathbb{Z}\gamma_0' + \mathbb{Z}\gamma_1'$$

Γ/Γ' est fini. (γ_0, γ_1) sont $\mathbb{R}$-lin indep

(γ_0', γ_1')

On applique cette prop à

"Γ'" $= \Gamma_\wp$ et "Γ" $= \Gamma$ tq $T_G = T(\Gamma)$

tq $T_{G_\wp} = T(\Gamma_\wp)$.

Preuve de la Prop 2.5 :

Comme $\Gamma \supset \Gamma'$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

tq $\gamma_0' = a.\gamma_0 + b.\gamma_1$

$\gamma_1' = c.\gamma_0 + d.\gamma_1$

Comme (γ_0', γ_1') forment un $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^2$

γ_0 et γ_1 sont combinaison linéaire de γ_0' et γ_1'.

$$\gamma_0 = a'\gamma_0' + b'\gamma_1'$$

$$\gamma_1 = c'\gamma_0' + d'\gamma_1'$$

les coordonnées a', b', c', d' sont données

en prenant l'inverse de $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = M^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$a', b', c', d' \in \frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}$ avec $\Delta = ad - bc \neq 0$

$$\frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}\gamma_0' + \frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}\gamma_1' \supset \Gamma \supset \Gamma'$$

$$\|$$

$$\frac{1}{\Delta}\Gamma' \supset \Gamma \supset \Gamma'$$

fini ?

$\Downarrow$

fini ?

$$\Gamma' = \{ m\gamma_0' + n\gamma_1' \quad m,n \in \mathbb{Z} \} \simeq \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Q}^2$$

$$\frac{1}{\Delta}\Gamma' = \left\{ \frac{m}{\Delta}\gamma_0' + \frac{n}{\Delta}\gamma_1' \quad m,n \in \mathbb{Z} \right\} \simeq \frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Q}^2$$

$$\frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}^2 \Big/ \mathbb{Z}^2 = \left(\frac{1}{\Delta}\mathbb{Z} \Big/ \mathbb{Z} \right)^2$$

$$\frac{1}{\Delta}\mathbb{Z} \Big/ \mathbb{Z} \overset{\times\Delta}{\simeq} \mathbb{Z} \Big/ \Delta\mathbb{Z} \longleftarrow \text{groupe fini d'ordre } |\Delta|.$$

$$\frac{1}{\Delta} m \quad m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^2 \simeq \left(\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z}\right)^2 \text{ est fini d'ordre } |\Delta|^2$$

$$\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2 \text{ (si } \Delta)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta}\Gamma' \supset \Gamma \supset \Gamma'}_{\substack{\text{quotient fini} \\ \text{d'ordre } |\Delta|^2}} \rightsquigarrow \Gamma/\Gamma' \text{ et } \frac{1}{\Delta}\Gamma'/\Gamma \text{ sont finis d'ordre } \leqslant |\Delta|^2$$

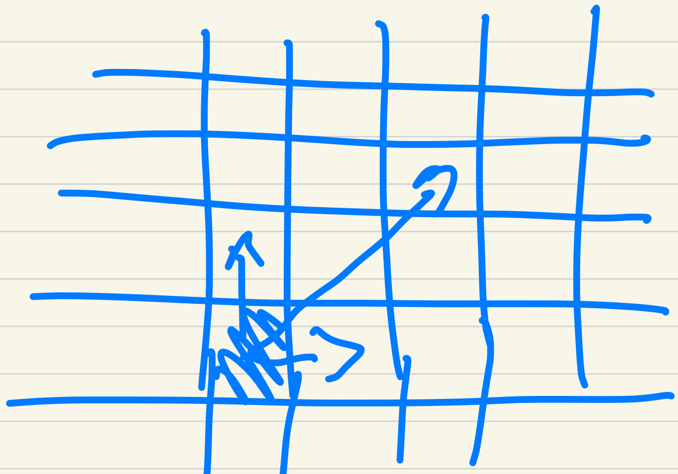
$$\Delta = ad - bc$$

Ex: $P =$  $\quad G = T(\mathbb{Z}^2)$

$$\Gamma = \mathbb{Z}^2 = \{(m,n) \quad m,n \in \mathbb{Z}\}$$

$\mathcal{P} = (P, G)$

$$\Gamma \simeq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \qquad \gamma_0 = 1 \quad \gamma_1 = i \text{ (en nbs complexes)}$$



G_p est le gpe engendré par

$T(\mathbb{Z}^2)$ $(\Gamma = \Gamma_p)$

- par la rotation d'angle i

- par la symétrie par rapport à l'axe $\mathbb{R}(1,0)$

$$G_p/G = G_p/T(\mathbb{Z}^2)$$ est d'ordre $2 \times 4 = 8$.

Chap 3 : Espace Euclidien et ses Isometries

- Espace Affines

Définition 3.1. *Soit G un groupe et X un G-ensemble. X est un espace principal homogene sous l'action de G si*

(1) *G agit transitivement sur X: pour tout $x \in X$, $X = G.x$.*
(2) *Pour tout $x \in X$, le stabilizateur G_x est trivial.*

$G_x = \{e_G\}$

Rmq : Pour (2) si $G_x = \{e_G\}$ pour un $x \in X$ il l'est automatiquement pour tout x.
(si on suppose X est homogène)

- X est un G-torseur

PROPOSITION 3.1. *Soit X un espace principal homogene alors pour tout $P_0 \in X$, l'application*

$$t_\bullet(P_0) : g \in G \mapsto g.P_0 \in X$$

est une bijection. En d'autre termes pour tout $Q \in X$, il existe un unique $g \in G$ tel que

$$g.P_0 = Q.$$

— *L'application $t_\bullet(P_0)$ est meme un isomorphisme de G-ensembles pour G agissant sur lui-meme par multiplication a gauche.*

Preuve: $t_\circ(P_0)$ est surjective.

$$t_G(P_0) = \{ g.P_0 \ g \in G \} = G.P_0 = X$$

Injectif: soient g, g' tq $g.P_0 = g'.P_0$

$$\times g^{-1} : \quad \underbrace{g^{-1}.g}.P_0 = g^{-1}.g'.P_0 = P_0$$

$$\Longrightarrow \quad g^{-1} \cdot g' \in G_{P_0} = \{e_G\} \Rightarrow g' = g. \qquad \square$$

Rmq: par thm orbite-stab, on a

$$X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{espace homogène.}}}{=} G.P_0 \simeq G/G_{P_0} = \{e_G\} \; = G$$

$X \subset \mathbb{R}^3 \quad X = \{(x, y, 1) \quad x, y \in \mathbb{R}\}$

$$G = \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (x,y,0)$$

on fait agir G sur X par translations

$P = (x_p, y_p, 1) \in X \quad (x,y) \in G$

$$(x,y) \oplus P := (x,y,0) \oplus P = \underbrace{(x+x_p, y+y_p, 1)}$$

X est un G-espace principal homogène.

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x,y,1)$ est une bijection

mais ce n'est pas un morphisme de gpes

$(0,0) \longrightarrow (0,0,1)$ qui n'est pas l'élément neutre ! (de $\mathbb{R}^3$)

Proposition 3.2. *Soit X un espace principal homogene sous l'action de G. L'application*

$$t_\bullet : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{Bij}(X) \\ g & \mapsto & t_g : P \to g.P \end{array}$$

l'action est fidèle

est un morphisme de groupes injectif. Son image

$$t_G = T(G) \simeq G \quad .$$

est appelle le groupe des translations de X pour l'action de G.

L'action est fidèle : $\ker(t_\bullet) = \{g \text{ tq } \forall P \; g.P = P\}$

$= \{g \text{ tq } g \in G_P \; \forall P\}$

$= \{e_G\}$.

Définition 3.2. *Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie sur un corps k; un espace affine X sous V est un V-ensemble (quand on voit V comme le groupe additif $(V,+)$) qui est un espace principal homogene; on dit que V est la direction de X. On notera cette action additivement:*

$$\begin{array}{ccc} V \times X & \mapsto & X \\ (\vec{v}, P) & \mapsto & \vec{v} \oplus P \end{array};$$

Ainsi on a

$$(\vec{v} + \vec{w}) \oplus P = \vec{v} \oplus (\vec{w} \oplus P).$$

Dans cette egalite le premier "$+$" est la loi d'addition dans le group $(V,+)$ et les trois "$\oplus$" suivants sont relatifs a l'action.

– *Le groupe des translations de X sous l'action de V sera note*

$$T(V) = t_V = \{t_{\vec{v}} : P \in X \mapsto \vec{v} \oplus P \in X,\ \vec{v} \in V\} \subset \mathrm{Bij}(X).$$

$P+\vec{v}$ ou bien $\vec{v}+P$.

DÉFINITION 3.3. *Soit X un espace affine de direction V, on defini la dimension de X comme etant la dimension de V:*

$$\dim(X) = \dim(V).$$

Un espace affine de dimension 0 est un point; de dimension 1 une droite; un espace affine de dimension 2 un plan. (affine)

affine

Un exemple evident d'espace affine X sous V est l' espace vectoriel V lui-meme ! D'autres exemples sont donnes par la notion de sous-espaces affines

DÉFINITION 3.4. *Soit X un espace affine de direction V; un sous-espace affine de X est l'orbite d'un point P sous l'action d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$*

$$Y := P + W = \{P + \vec{w},\ \vec{w} \in W\}.$$

On dit que Y est le sous-espace affine de direction W passant par P. On a $\dim Y = \dim_k W$.

Un sous-espace affine de dimension $\dim Y = \dim X - 1$ est appelle hyperplan affine.

$X = \{(x,y,1)\ x,y \in \mathbb{R}\}$ est un espace affine pour le sousespace de $\mathbb{R}^3$

$V = \{(x,y,0)\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$$k^n : \quad S_{\underline{y}} \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{ln}x_n = y_l \end{cases}$$

un système linéaire de l équations à n inconnues

l'ensemble des solutions $S_{\underline{y}}$ (si il est non vide)

est un espace affine de direction le SEV de k^n défini par le système homogène

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in k^n \ \text{tq} \ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{ln}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Def : Soit X un espace affine de direction V ; un sous-espace affine $Y \subset X$ est un espace affine pour l'action d'un SEV $W \subset V$ (par restriction de l'action de V)

Tout sous-espace affine est de la forme

$\boxed{Y = W + P_0} = \{\vec{w} + P_0 \quad \vec{w} \in W\}$ P_0 un pt quelconque de Y

Y est l'orbite d'un pts par le ssgpe $W \subset V$.