**6.1.** (Coordonnées inertielles) Soit $(M, g)$ une variété riemannienne.

(a) Montrer que pour tout point $p \in M$ il y a un système de coordonnées $x^i$ qui est inertiel dans le point $p$, ça veut dire, tel que les dérivées partielles $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ sont nulles dans le point $p$.

(b) Montrer que on peut garantir en plus que $g_{ij} = \delta_{ij}$ dans le point $p$.
Donc $g_{ij} = \delta_{ij} + o(\|x\|)$ si le point $p$ est représenté par l'origine $x = 0$.

Résoudre cet exercice sans recourir à l'exponentielle.

**6.2.** On dit qu'une métrique $g$ sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est inertielle dans un point $p \in U$ si elle satisfait une des conditions suivantes :

(a) Les dérivées partielles premières $\partial_i g_{jk}$ sont nulles dans le point $p$.

(b) Les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k$ sont nuls dans le point $p$.

(c) La dérivée covariante coincide avec la dérivée habituelle dans le point $p$ : pour tout champs de vecteurs $Z$ on a

$$\nabla_j Z = \frac{\partial Z}{\partial x^j} \text{ dans le point } p,$$

(Donc pour tout vecteur $V = V^j \partial_j|_p \in T_p U$ on a $\nabla_V Z = V^j \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} \partial_k$ dans le point $p$.)

(d) Toute géodésique $\gamma$ tel que $\gamma(t_0) = p$ satisfait $\gamma''(t_0) = 0$, où $\gamma''$ est la dérivée seconde habituelle dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer que toutes les conditions sont équivalentes.

**6.3.** Soit $(M, g)$ une variété riemannienne et soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse tel que son champs gradient $\nabla f$ satisfait $\|\nabla f\| = 1$ partout. Montrer que les courbes intégrales du champs de vecteurs $\nabla f$ sont des géodésiques.

**6.4.** Dans cet exercice on va utiliser le paramétrage polaire $h(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ du plan $\mathbb{R}^2$.
Soit $(M, g)$ une surface riemannienne et soit $p \in M$.

(a) Montrer que il existe un paramétrage local $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ tel que $f(0) = p$ et

$$(fh)^* g = \mathrm{d}r^2 + a(\theta, r)^2 \, \mathrm{d}\theta^2.$$

(b) Trouver la fonction $a = a(\theta, r)$ dans les cas où $M$ est le plan euclidean, la sphère, ou le plan hyperbolique.

(c) Si la fonction $a$ ne dépend pas de la coordonnée $\theta$, montrer que $M$ est localement isométrique à une surface de révolution.

(d) Essayer d'analyser la fonction $a$ et trouver un développement de Taylor autour de $r = 0$.
(Après, avec d'autres outils, on va pouvoir montrer que $a = r - \frac{K_p}{6} r^3 + O(r^4)$, où $K_p$ est la courbure gaussienne de $M$ dans le point $p$.)

**6.5.** (Coordonnées normales) Soit $g$ une métrique riemannienne dans la boule ouverte $B_\varepsilon^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i (x^i)^2 < \varepsilon^2\right\}$.
On dit que la métrique est en *forme normale* de Riemann si pour chaque $v \in S^{n-1}$, la courbe $\gamma_v(t) = tv$ est une géodésique paramétrée par longueur. Montrer que

(a) Pour chaque point $x \in B^n$ on a $d(0, x) = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$.

(b) Pour chaque point $x \in B^n$ on a $g_{ij}(x) \, x^i = \delta_{ij} \, x^i$.

(c) Pour toute variété riemannienne $(M, g)$ et tout point $p \in M$ il y a un système de coordonnées normales centré dans le point $p$, i. e., un paramétrage local $f : B^n_\varepsilon \to M$ tel que $f(0) = p$ et la métrique $f^*g$ est en forme normale.

(d) Dans le point $x = 0$ on a $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ et $\partial_i g_{jk}(0) = 0$ et les coefficients $c_{ijkl} = \partial_i\partial_j g_{kl}(0)$ satisfont les équations

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$$

$$c_{ijkl} + c_{jkil} + c_{kijl} = 0$$

**6.6**. Soient $M, N$ variétés riemanniennes, soient $p \in M$, $q \in N$, soit $(E_i)_{0\leq i<n}$ base ortonormée de $T_pM$ et soit $(F_i)_{0\leq i<n}$ base orthonormée de $T_qN$. Montrer qu'il existe au maximum une isometrie $f : M \to N$ tel que $f(p) = q$ et $f_*E_i = F_i$.

**6.7**. Dans une surface de révolution paramétrée par $h(z, \theta) = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z)$ montrer qu'un cercle $z = z_0$ est géodésique si et seulement si $h'(z_0) = 0$.

**6.8**. Un champs de Killing dans une variété Riemannienne $(M, g)$ est un champs de vecteurs $X$ dont le flux $\Phi^t_X$ préserve la métrique (i.e. $\Phi^t_X : M \to M$ est une isométrie pour chaque $t$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $X$ est de Killing.

(b) $\mathcal{L}_X g = 0$.

(c) L'operateur $\nabla X|_p : V \in T_pM \mapsto \nabla_V X \in T_pM$ est antisymmetrique, i. e.

$$\langle \nabla_Z X, W\rangle + \langle Z, \nabla_W X\rangle = 0 \quad \text{pour chaque paire de vecteurs } Z, W \in T_pM.$$

(Cette équation s'apelle l'équation de Killing.)

**6.9**. Trouver tous les champs de Killing dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$, et dans le demi-plan de Poincaré trouver plusieurs champs de Killing linéairement indépendents.

**6.10**. Soit $X$ un champs de Killing dans une variété riemannienne $(M, g)$.

(a) Montrer que si $\gamma$ est une géodésique, alors $\langle \gamma'(t), X\rangle$ est constant.

(b) Si $p \in M$, montrer que la courbe intégrale de $X$ qui passe par le point $p$ est une géodésique si et seulement si $\mathrm{d}_p\|X\| = 0$.