§I6 L'application exponentielle

Rappel Une géodésique d'une variété riemannienne (M,g) est une courbe (C^2) $\gamma : I \to M$ telle que $\nabla_t \dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma \equiv 0$.

localement (dans un système de coordonnées (x^i)) une géodésique est solution du système d'EDO

$$\ddot x^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \dot x^i \dot x^j = 0$$

(le système non linéaire).

le théorème d'existence, d'unicité et de dépendance différentiable des solutions d'un système d'EDO entraîne le

Théorème Il existe un ouvert maximal

$$D \subset \mathbb{R} \times TM$$

contient $\{0\} \times TM$ tel que

pour tout $(p,v) \in TM$ il existe une unique géodésique

$$\gamma_{p,v} = \gamma_v : J_{p,v} \longrightarrow M \quad \text{t.q.}$$

$$\gamma_v(0) = p, \quad \dot{\gamma}_v(0) = v$$

ici

$$J_{p,v} = \{ t \in \mathbb{R} \mid (t, p, v) \in D \}$$

<u>Preuve</u> Découle de la théorie des EDO #

<u>Lemme</u> Pour $0 \leq \lambda \leq 1$ on a

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t) \quad (\forall t \in J_{p,v})$$

<u>Preuve</u> On pose $\sigma(t) = \gamma_v(\lambda t)$

alors σ est géodésique car

$$\nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) = \nabla_{\lambda \dot{\gamma}} (\lambda \dot{\gamma}) = \lambda^2 \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

et $\dot{\sigma}(0) = \frac{d}{dt} \gamma(\lambda t) = \lambda \dot{\gamma}(0)$

$$= \lambda \cdot v$$

Donc $\sigma(t) =$ l'unique géodésique tq. $\sigma(0) = 0$, $\dot{\sigma}(0) = \lambda v$. Donc

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(t) = \gamma_{\lambda v}(t) \\ \text{or} \quad \sigma(t) = \gamma_v(\lambda t) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$$

$\#$

Corollaire :

Pour tout $p \in M$, il existe un ouvert étoilé $\Omega_p \subset T_pM$, contenant $0 \in T_pM$ et une application

$$\exp_p : \Omega_p \longrightarrow M$$

telle que $\forall\, v \in \Omega_p$ et $0 \leq t \leq 1$

on a $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$

De plus il existe un ouvert $\mathcal{U}_p \subset \Omega_p$ contenant $0 \in T_p M$ et t.q.

$\exp_p$ est un difféomorphisme

$$\mathcal{U}_p \subset T_p M \longrightarrow \exp_p(\mathcal{U}_p) \subset M.$$

<u>Remarque</u> $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$

<u>Preuve</u> On définit

$$\Omega_p = \{ v \in T_p M \mid 1 \in J_{p,v} \}$$

$$= \{ v \in T_p M \mid (1, p, v) \in \mathcal{D} \}$$

le lemme précédent $\Rightarrow$

$\Omega_p \subset T_p M$ est étoilé depuis 0

$$\Leftrightarrow \left(\left. \begin{array}{l} v \in \Omega_p \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda v \in \Omega_p \right)$$

Pour montrer que $\exp_p$ est un difféo local (au voisinage de $0 \in T_pM$) on vérifie que

$$d(\exp_p)_0 \in \mathrm{End}(T_pM)$$

est inversible (on applique alors le théorème d'inversion locale).

On a en fait :

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp_p)(\alpha(t))$$

où $\alpha(t)$ vérifie $\alpha(0) = p$, $\dot\alpha(0) = v$

(ici $\alpha(t)$ = courbe dans T_pM.)

On prend $\alpha(t) = t \cdot v$, alors

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma_v(t)$$

$$= \dot\gamma(0) = v$$

On a montré que

$$\exp_p : \Omega_p \subset T_pM \longrightarrow M$$

vérifie

$$d(\exp_p)_0 = \left(Id : T_pM \to T_pM \right)$$

(on identifie

$$T_0 T_pM = T_pM \quad)$$

#

<u>Définitions</u>

1) (M, g) est <u>géodésiquement complète</u>

si toute géodésique γ de M se

prolonge de $-\infty$ à $+\infty$

$\iff D = \mathbb{R} \times TM$

$\iff \Omega_p = T_pM \quad \forall p \in M$

2.) le <u>rayon d'injectivité</u> de (M,g) en $p \in M$ le rayon maximal des boules de T_pM où $\exp_p(M)$ est un difféomorphisme.

$$i_{(M,g)}(p) = i_g(p)$$
$$= \sup \{ \rho > 0 \mid B(0,\rho) \subset T_pM \text{ est contenue dans } \Omega_p \text{ et } \exp_p : B(0,\rho) \to \exp_p(B(0,\rho)) \text{ est un difféomorphisme} \}$$

(le corollaire précédent $\Rightarrow i_g(p) > 0$ $\forall p$)

3.) $$i_g = \inf_{p \in M} (i_g(p))$$
= <u>Rayon d'injectivité global</u>

($i_g = 0$ est possible).

Conséquence importante

Pour tout $p \in M$ il existe un voisinage $W_p \subset M$ tel que

$$\exp_p^{-1} : W_p \to T_p M \quad \text{est}$$

bien définie et un difféomorphisme sur son image.

Si $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ est une base orthonormée alors il existe un système de coordonnées défini sur W_p par

$$(x^1, \dots, x^n) = \text{coordonnées de } q \in W_p$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \exp_p\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right)$$

Déf Ces coordonnées sont les coordonnées normales de Riemann

Propriétés Dans le coordonnées normales (en p) on a

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \,, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$$

et

$$\Gamma^k_{ij}(0) = 0.$$

- On dit que la métrique g_{ij} est osculatrice à δ_{ij} en p (dans ce système de coordonnées)

(on dit que g_{ij} est inertielle en p)

Remarque

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x^j}(0) \neq 0 \text{ en général}$$

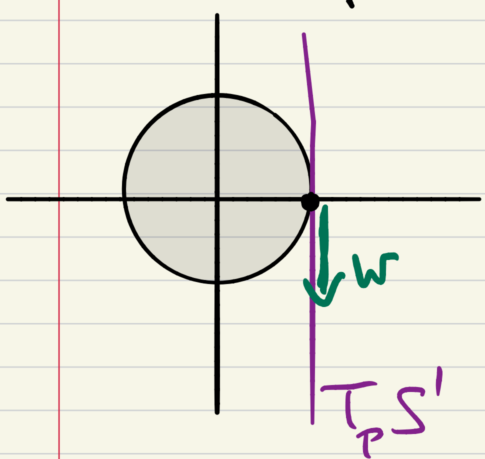
$\rightarrow$ Lien avec la courbure de la variété (M, g).

Pourquoi : l'exponentielle ?

Exemple 1 $M = S^1 = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

et $p = 1 = 1 + i0 \in S^1$

Alors $T_pS^1 = 1 + i\mathbb{R}$



$$\exp_p(1+w) = \exp_p(1+is)$$
$$= e^{is}$$

Exemple 2 Si $M = G \subset GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé (c'est toujours une variété) et si g est une métrique Riemannienne bi-invariante alors

$$\exp_I(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

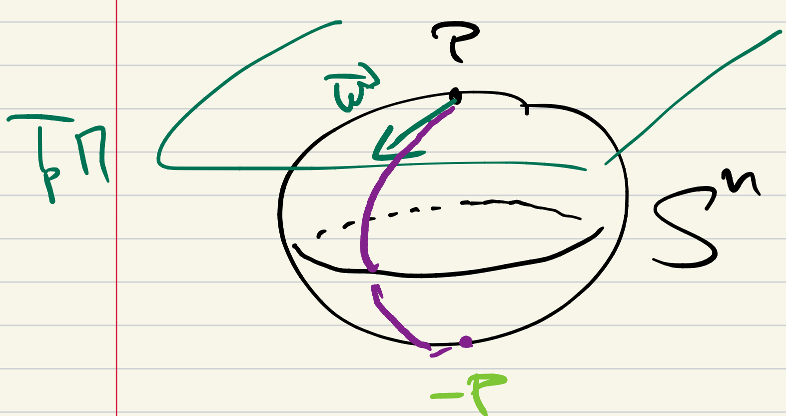
(ça n'est pas évident).

Exemple 3 Soit $M = \mathbb{R}^n$, $g = (\delta_{ij})$ métrique euclidienne standard. Alors

$$\exp_p(v) = p + v$$

(après identification de $T_p\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n$)

Exemple 4 Le rayon d'injectivité de la sphère unité $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est π (en tout pt p)



Théorème (lemme de Gauss) Pour $p \in (M, g)$ on a

(i) $\forall v \in T_pM$, $\|d(\exp_p)_v(v)\| = \|v\|$

(ii) $\left.\begin{array}{l}\forall v, w \in T_pM \\ v \perp w\end{array}\right\} \Rightarrow d(\exp_p)_v(v) \perp d(\exp_p)_v(w)$

<u>Preuve</u> : (i) Par calculer $d(\exp_p)_v(v)$ on remarque que

$$(*) \quad d(\exp_p)_v(v) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(v+sv)$$

(car $\sigma(s) = v + sv \in T_pM$ est une courbe qui représente le vecteur

$$v \in T_v(T_pM) = T_pM$$

$(\sigma(0) = v,\ \dot{\sigma}(0) = v)$ donc

$$d(\exp_p)_v(v) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(\sigma(s))\Big).$$

Or

$$\exp_p(v+sv) = \exp_p((1+s)v)$$

$$= \gamma_v(1+s)$$

Or on sait que $\|\dot{\gamma}\|$ est constante car c'est une géodésique

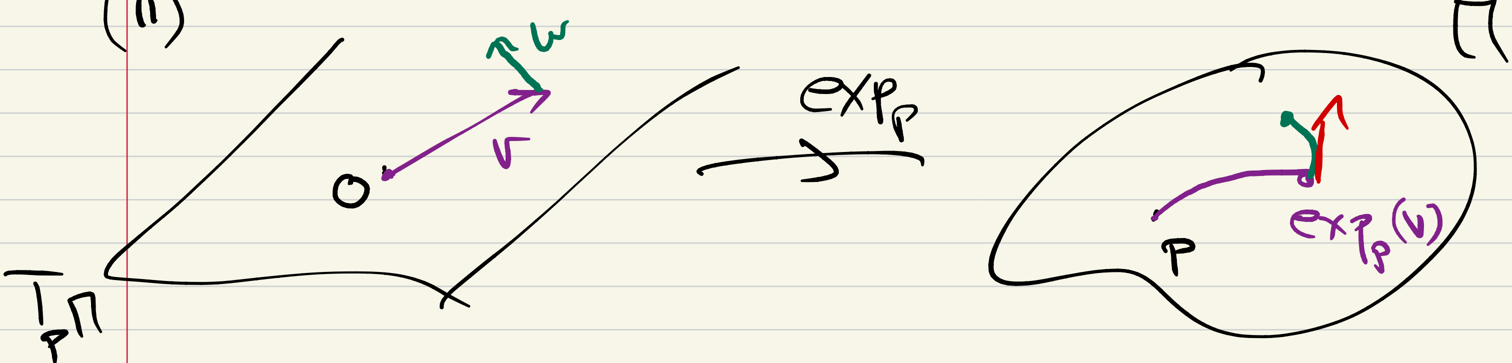
Donc

$$\| d(\exp_p)_v(v) \| = \left\| \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma_v((1+s)v) \right\|$$

$$= \left\| \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_v(tv) \right\|$$

$$= \| \dot{\gamma}(0) \| = \| v \|$$

(ii)



$w \perp v$

Pour calculer $d(\exp_p)_v(w)$ on se donne une courbe dans T_pM (en fait dans Ω_p) $\sigma(s)$ tq. $\sigma(0) = v$, $\dot{\sigma}(0) = w$.

On suppose $v \perp w$

(On peut aussi supposer que $\|v\| = \|w\|$).

On peut donc prendre

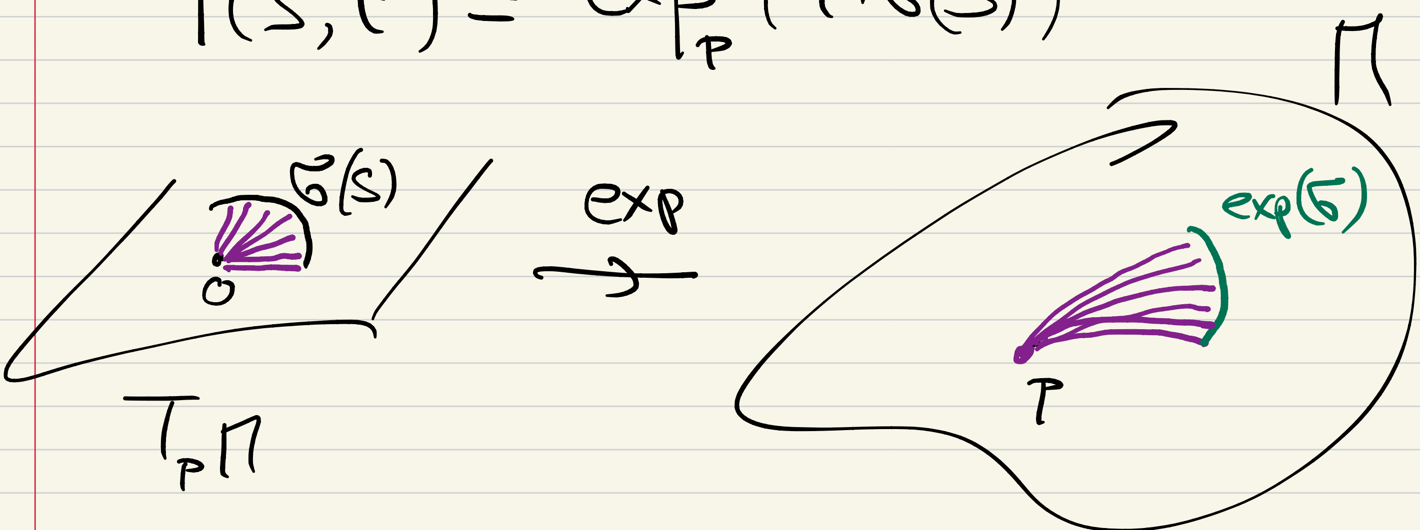
$$\sigma(s) = \cos(s)\cdot v + \sin(s)\cdot w$$

alors $\sigma(0) = v$, $\dot{\sigma}(0) = w$ et

donc $\sigma(s)$ représente $w \in T_v T_p M \,(= T_p M)$

Maintenant on considère la variation (famille de courbe)

$$\varphi(s,t) = \exp_p(t\cdot\sigma(s))$$



<u>Remarque</u> Toutes les courbes

$$t \mapsto \alpha_s(t) = \varphi(s,t)$$

sont géodésiques et de même vitesse

$(\dot{\alpha}_s(0) = \sigma(s) = \cos(s)\, v + \sin(s)\, w)$

$\Rightarrow \|\dot{\alpha}_s(0)\| = |v|$ (car $\|v\|=\|w\|$, $v \perp w$)

On applique la formule de variation 1ère par la longueur :

$$0 = \frac{d}{ds} \ell(\alpha_s) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle \Bigg|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \left\langle \nabla_{\dot\alpha} \dot\alpha, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\rangle$$

or $\nabla_{\dot\alpha} \dot\alpha = 0$

et $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0) = 0$ car $\varphi(s,0) = p \quad \forall s$

Donc

$$0 = \frac{d}{ds} \ell(\alpha_s) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0,1), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,1) \right\rangle$$

Mais

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,1) = d(\exp_p)_v(v)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0,1) = d(\exp_p)_v(w)$$

Donc ces deux vecteurs sont $\perp$

#

Signification du Lemme de Gauss

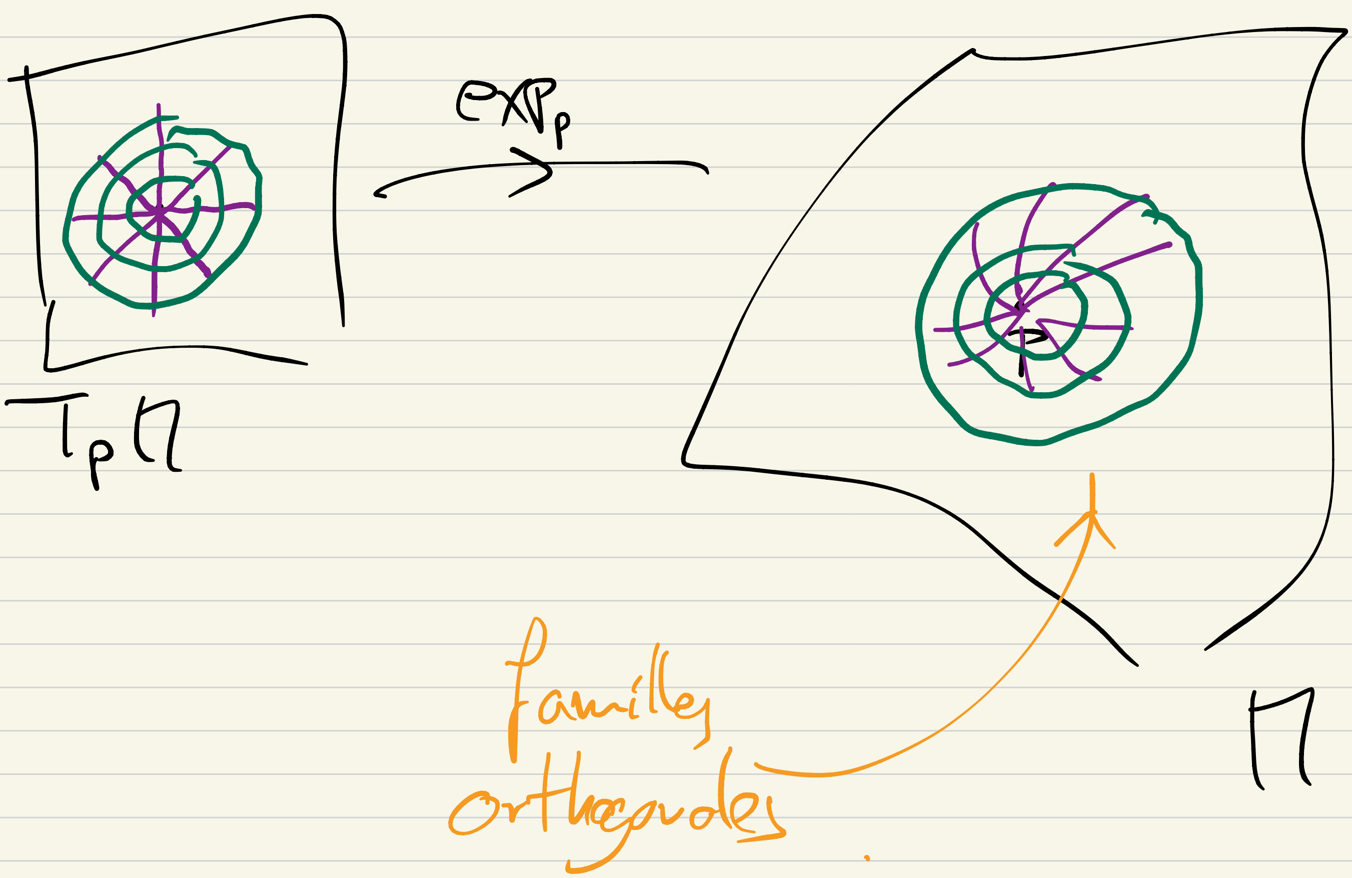
L'image par $\exp_p : \Omega_p \subset T_pM \to M$

des rayons issus de $0 \in T_pM$

et des sphères centrées en $0 \in T_pM$

sont des courbes et hypersurfaces

de M qui sont orthogonales.



Remarques

1) le lemme de Gauss justifie les propriétés des "coordonnées polaires" sur M.

2) le lemme de Gauss ne dit <u>pas</u> que

$$d(\exp_p)_v : T_pM \longrightarrow T_qM$$

$(q = \exp_p(v) = \gamma_v(1))$ est une isométrie

(on n'a pas généralement

⚠

$$g_q\left(d(\exp_p)_v(\xi), d(\exp_p)_v(\eta)\right) = g_p(\xi, \eta)$$

$\forall\, \xi, \eta \in T_pM$