7.1. Montrer qu'une variété riemannienne homogène (i.e telle qu'il existe un groupe d'isométries agissant transitivement) est complète.

7.2. On suppose qu'une variété riemannienne (M, g) est complète et isotrope en chaque point (i.e, pour tout point p le groupe des isométries G_p qui fixent p est transitif sur les vecteurs de mêmes normes de T_pM). Montrer que M est homogène.

Indication : étant donné deux points, considérer le milieu de la géodésique qui joint p à q.

7.3. **(Naturalité de l'exponentielle)**
Soit $\varphi : M \to N$ une isométrie entre deux variétés Riemanniennes. Montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d_p\varphi"] \arrow[d, "\exp_p"'] & T_{\varphi(p)}N \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

7.4. Soit (M, g) est une variété riemannienne connexe et soient φ et ψ deux isométries de M telle qu'il existe un point $p \in M$ pour lequel

$$\varphi(p) = \psi(p) \quad \text{et} \quad d_p\varphi = d_p\psi.$$

Montrer que φ et ψ coïncident partout.

7.5. (*) Soit(M, g) une variété riemannienne complète et non compacte. Montrer qu'il existe une courbe $\gamma : [0, +\infty[$ telle que pour tous $s, t > 0$,

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$$

On dit qu'une telle courbe est un rayon géodésique.

7.6. Soit (M, g) une variété Riemannienne et soit $f_p : M \to \mathbb{R}$ définie par $f_p(q) = d_g(p, q)$, où d_g est la distance induite par la métrique g.
Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U} \subseteq M$ de p tel que f_p est différentiable sur $\mathcal{U}\backslash\{p\}$ et que pour tout $q \in \mathcal{U}\backslash\{p\}$,

$$\operatorname{grad}(f_p)_q = \dot{\gamma}(f_p(d))$$

où γ est la géodésique unitaire de p à q.