

Dans cette version on a ajouté une indication dans l'exo 6.1, on a coupé l'exo 6.3 en deux parties, et on a ajouté l'exo 6.11 sur la dérivée de Lie pour aider à faire l'exo 6.8.

6.1. (Coordonnées inertielles) Soit (M, g) une variété riemannienne.

- (a) Montrer que pour tout point $p \in M$ il y a un système de coordonnées x^i qui est inertiel dans le point p , ça veut dire, tel que les dérivées partielles $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ sont nulles dans le point p .
- (b) Montrer que on peut garantir en plus que $g_{ij} = \delta_{ij}$ dans le point p .
Donc $g_{ij} = \delta_{ij} + o(\|x\|)$ si le point p est représenté par l'origine $x = 0$.

Résoudre cet exercice sans recourir à l'exponentielle.

Indication : Montrer d'abord qu'il y a des coordonnées y^l telles que les coefficients \tilde{g}_{ij} satisfont la première condition ($\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$ dans le point) mais pas nécessairement la seconde ($\partial_k \tilde{g}_{ij} = 0$ dans le point). Puis faire un changement à coordonnées x^i tel que $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ dans le point.)

6.2. On dit qu'une métrique g sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est inertielle dans un point $p \in U$ si elle satisfait une des conditions suivantes :

- (a) Les dérivées partielles premières $\partial_i g_{jk}$ sont nulles dans le point p .
- (b) Les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k sont nuls dans le point p .
- (c) La dérivée covariante coïncide avec la dérivée habituelle dans le point p : pour tout champs de vecteurs Z on a

$$\nabla_j Z = \frac{\partial Z}{\partial x^j} \text{ dans le point } p,$$

(Donc pour tout vecteur $V = V^j \partial_j|_p \in T_p U$ on a $\nabla_V Z = V^j \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} \partial_k$ dans le point p .)

- (d) Toute géodésique γ tel que $\gamma(t_0) = p$ satisfait $\gamma''(t_0) = 0$, où γ'' est la dérivée seconde habituelle dans \mathbb{R}^n .

Montrer que toutes les conditions sont équivalentes.

6.3. Soit (M, g) une variété riemannienne et soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse tel que son champs gradient ∇f satisfait $\|\nabla f\| = 1$ partout.

- (a) Si $x, y \in M$, montrer que toute courbe C^1 à morceaux γ de x à y satisfait $\ell(\gamma) \geq f(y) - f(x)$.
- (b) Montrer que les courbes intégrales du champs de vecteurs ∇f sont des géodésiques.

6.4. Dans cet exercice on va utiliser le paramétrage polaire $h(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ du plan \mathbb{R}^2 . Soit (M, g) une surface riemannienne et soit $p \in M$.

- (a) Montrer que il existe un paramétrage local $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ tel que $f(0) = p$ et que

$$(fh)^*g = dr^2 + a(\theta, r)^2 d\theta^2.$$

- (b) Trouver la fonction $a = a(\theta, r)$ dans les cas où M est le plan euclidien, la sphère, ou le plan hyperbolique.
- (c) Si la fonction a ne dépend pas de la coordonnée θ , montrer que M est localement isométrique à une surface de révolution.
- (d) Essayer d'analyser la fonction a et trouver un développement de Taylor autour de $r = 0$.
(Après, avec d'autres outils, on va pouvoir montrer que $a = r - \frac{K_p}{6} r^3 + O(r^4)$, où K_p est la courbure gaussienne de M dans le point p .)

6.5. (Coordonnées normales) Soit g une métrique riemannienne dans la boule ouverte $B_\varepsilon^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i (x^i)^2 < \varepsilon^2\}$. On dit que la métrique est en *forme normale* de Riemann si pour chaque $v \in S^{n-1}$, la courbe $\gamma_v(t) = tv$ est une géodésique paramétrée par longueur. Dans ce cas-là, montrer que

- (a) Pour chaque point $x \in B^n$ on a $d(0, x) = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$.
- (b) Pour chaque point $x \in B^n$ on a $g_{ij}(x) x^i = \delta_{ij} x^i$.
- (c) Pour toute variété riemannienne (M, g) et tout point $p \in M$ il y a un système de coordonnées normales centré dans le point p , i. e., un paramétrage local $f : B_\varepsilon^n \rightarrow M$ tel que $f(0) = p$ et la métrique f^*g est en forme normale.
- (d) Dans le point $x = 0$ on a $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ et $\partial_i g_{jk}(0) = 0$ et les coefficients $c_{ijkl} = \partial_i \partial_j g_{kl}(0)$ satisfont les équations

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$$

$$c_{ijkl} + c_{jkil} + c_{kijl} = 0$$

6.6. Soient M, N variétés riemanniennes connexes, soient $p \in M, q \in N$, et soient $(E_i)_{0 \leq i < n}$ et $(F_i)_{0 \leq i < n}$ bases ortonormées de $T_p M$ et $T_q N$ respectivement. Montrer qu'il existe au maximum une isométrie $f : M \rightarrow N$ tel que $f(p) = q$ et $f_* E_i = F_i$.

6.7. Dans une surface de révolution paramétrée par $h(z, \theta) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z)$ montrer qu'un cercle $z = z_0$ est géodésique si et seulement si $h'(z_0) = 0$.

6.8. Un champs de Killing dans une variété Riemannienne (M, g) est un champs de vecteurs X dont le flux Φ_X^t préserve la métrique (i.e. $\Phi_X^t : M \rightarrow M$ est une isométrie pour chaque t). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) X est de Killing.
- (b) $\mathcal{L}_X g = 0$, où \mathcal{L} est la dérivée de Lie (voir **6.11**).
- (c) L'opérateur $\nabla X|_p : V \in T_p M \mapsto \nabla_V X \in T_p M$ est antisymétrique, i. e.

$$\langle \nabla_Z X, W \rangle + \langle Z, \nabla_W X \rangle = 0 \quad \text{pour chaque paire de vecteurs } Z, W \in T_p M.$$

(Cette équation s'appelle l'équation de Killing.)

6.9. Trouver tous les champs de Killing dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^n , et dans le demi-plan de Poincaré trouver plusieurs champs de Killing linéairement indépendents.

6.10. Soit X un champs de Killing dans une variété riemannienne (M, g) .

- (a) (Théorème de Noether) Montrer que si γ est une géodésique, alors $\langle \gamma'(t), X \rangle$ est constant.
- (b) Si $p \in M$, montrer que la courbe intégrale de X qui passe par le point p est une géodésique si et seulement si $d_p \|X\| = 0$.

6.11. (Dérivée de Lie) Soit X un champs de vecteurs sur une variété compacte M et soit Φ_t le flux associé.

Soit A un champs de tenseurs C^∞ sur M . Par exemple, il peut être soit une fonction $f \in C^\infty(M)$, soit un champs de vecteurs $Y \in \Gamma(M)$, soit un champs g de fonctions bilinéaires $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

On définit la dérivée de Lie de A selon le champs X comme

$$\mathcal{L}_X A := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_t \quad \text{où } A_t := \Phi_t^* A.$$

- (a) Prouver les formules suivantes :
 - i. $\mathcal{L}_X f = X(f)$
 - ii. $\mathcal{L}_X(df) = d(X(f))$

iii. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

iv. $(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$.

- (b) Montrer que $\mathcal{L}_X A = 0$ si et seulement si A est invariant par tous les difféomorphismes Φ_t , i.e., $\Phi_t^* A = A$.
- (c) Si $X|_p = 0$, cela implique que $(\mathcal{L}_X A)|_p = 0$?
- (d) Qu'est ce-que se passe si M n'est pas compacte ?