21.04.2020

Chap. 4 : Courbure

§4.1 Le tenseur de courbure (de Riemann-Christoffel).

<u>Remarques</u> 1) en général, si X, Y, Z sont des champs de vecteurs sur M et ∇ = connexion sur M, alors

$$\nabla_X \nabla_Y Z \neq \nabla_Y \nabla_X Z$$

2) L'opération : $Z \to (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z$ n'est pas un tenseur (n'est pas $C^\infty(M)$ linéaire en chaque variables)

<u>Définition</u> Le <u>tenseur de courbure</u> de ∇ est l'application

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

on peut écrire

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

$$= [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

et voir $R(X,Y)$ comme un endomorphisme

$$R(X,Y) : \Gamma(M) \to \Gamma(M).$$

<u>Proposition</u> $R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est $C^\infty(M)$-trilinéaire.

(C'est donc un champs de tenseurs)

<u>Preuve</u> L'additivité (en fait la $\mathbb{R}$-trilinéarité) est immédiate.

<u>Exercice</u> Si $X, Y \in \Gamma(M)$, $f \in C^\infty(M)$

$$\Rightarrow [X, fY] = f \cdot [X,Y] + X(f) \cdot Y$$

$$[fX, Y] = f[X,Y] - Y(f) \cdot X$$

Calculons $R(fX,Y)\cdot Z = ?$

$$R(fX,Y)Z = \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z$$

$$= f\cdot\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\cdot\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]} Z$$

$$- \nabla_{-Y(f)X} Z$$

$$= f\nabla_X\nabla_Y Z - (f\nabla_Y\nabla_X Z + \underline{Y(f)\cdot\nabla_X Z})$$

$$- f\nabla_{[X,Y]} Z + \underline{Y(f)\nabla_X Z}$$

$$= f(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)$$

$$= f R(X,Y)\cdot Z$$

ensuite

$$R(X,fY)Z = fR(X,Y)Z$$

et $R(X,Y)(fZ) = f\,R(X,Y)Z$

se vérifie de la même manière

#

<u>Remarque</u> le tenseur R est un tenseur de type $\binom{1}{3}$ ou $(1,3)$, i.e. $3\times$ covariant et $1\times$ contravariant.

<u>Variante:</u> Si ∇ est la connexion de Levi-Civita d'une métrique g, alors on définit

$$\bar{R} : \Gamma(M)\times\Gamma(M)\times\Gamma(M)\times\Gamma(M) \to C^\infty(M)$$

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W).$$

C'est le $\binom{0}{4}$ (ou $(0,4)$) tenseur de courbure ($4\times$ covariant)

(R et $\bar{R}$ contiennent la même information)

<u>Lemme</u> On définit les composantes de R dans un système de coordonnées locales par

$$R(\partial_i, \partial_j)\,\partial_k = \sum_{\ell=1}^{n} R_{ijk}^{\ell}\,\partial_\ell$$

Alors

$$R_{ijk}^{\ell} = \partial_i \Gamma_{jk}^{\ell} - \partial_j \Gamma_{ik}^{\ell}$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma_{jk}^{m} \Gamma_{im}^{\ell} - \Gamma_{ik}^{m} \Gamma_{jm}^{\ell} \right)$$

<u>Preuve</u> : On a $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, on note $\nabla_i = \nabla_{\partial_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$. Alors

$$\nabla_j(\partial_k) = \Gamma_{jk}^{m}\,\partial_m$$

Donc

$$\nabla_i(\nabla_j \partial_k) = \nabla_i\left(\Gamma^m_{jk}\,\partial_m\right)$$

$$= \partial_i \Gamma^m_{jk} \cdot \partial_m + \Gamma^m_{jk}\,\nabla_i \partial_m$$

$$= \left(\partial_i \Gamma^m_{jk}\right)\partial_m + \Gamma^m_{jk}\,\Gamma^l_{im}\,\partial_l$$

$$= \left(\partial_i \Gamma^l_{jk} + \Gamma^m_{jk}\,\Gamma^l_{in}\right)\partial_l$$

de même

$$\nabla_j \nabla_i \partial_k = \left(\partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{ik}\,\Gamma^l_{jm}\right)\partial_l$$

et on a

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

$\Rightarrow$

$$R(\partial_i, \partial_j)\,\partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k - \cancelto{0}{\nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k}$$

$$= \left(\partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk}\,\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\,\Gamma^l_{jm}\right)\partial_l$$

$$= R^l_{ijk} \cdot \partial_l$$

#

Théorème : Une variété riemannienne (M,g) est localement isométrique à $\mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow$ $R=0$ (où $R=$ tenseur de courbure de g).

Preuve $\boxed{\Rightarrow}$ (M,g) est localement isométrique à $\mathbb{R}^n$ si par tout point p il existe un système de coordonnées $x^1,\dots,x^n$ au voisinage de p telles que

$$g_{ij} = g(\partial_i,\partial_j) = \delta_{ij}.$$

Or

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{ml}\left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right)$$

Dans un système de coordonnées euclidien on a $g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \Gamma^m_{ij} = 0$

$$\Rightarrow R^l_{ijk} = 0.$$

Donc $R = 0$

La réciproque sera prouvée plus tard (on peut appliquer un théorème sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, par exemple le théorème de Frobenius)

#

<u>Remarque</u> On peut démontrer que dans un systèmes de coordonnées normales en p ($\Rightarrow g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ $\Rightarrow \Gamma^k_{ij}(p) = 0$) on a

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{1}{6}\left(R_{iklj} + R_{ikjl}\right)$$

R est une "sorte" de Hessien de (g_{ij})

Ici R_{ijkl} = Composantes du $(0,4)$ tenseur $\bar{R}$:

$$R_{ijkl} = \bar{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$$
$$= g_{lm} R^m_{ijk}$$

(on note souvent R par $\bar{R}$, le contexte permet de décider si il s'agit du $(1,3)$ ou du $(0,4)$ tenseurs de courbure).

<u>Proposition</u> <u>Propriétés Algébriques</u> de R :

① $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

② $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

③ $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$

④ $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$

En termes du $(0,4)$ tenseur $\bar{R}$ on a :

① $\bar{R}(X,Y,Z,W) = -\bar{R}(Y,X,Z,W)$

② $\bar{R}(X,Y,Z,W) + \bar{R}(Y,Z,X,W) + \bar{R}(Z,X,Y,W) = 0$

③ $\bar{R}(X,Y,Z,W) = -\bar{R}(X,Y,W,Z)$

④ $\bar{R}(X,Y,Z,W) = +\bar{R}(Z,W,X,Y)$

---

la propriété ② s'appelle 1ère identité de Bianchi !!

Preuve

① est évidente car

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

et $[X,Y] = -[Y,X]$

② On écrit trois fois la définition de R

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$R(Y,Z)X = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X$$

$$R(Z,X)Y = \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y$$

Notons S = Somme de ces trois expressions.

et on utilise la symétrie de ∇ :

(*) $\quad \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Z,Y] \qquad$ (etc.)

en tenant de compte de (*) on obtient

$$S = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]$$

$= 0$ par Jacobi.

③ A montrer $\bar{R}(X,Y,Z,W) = -\bar{R}(Y,X,W,Z)$

$\iff \quad \bar{R}(X,Y,W,W) = 0 \quad (\forall X,Y,W)$.

On va utiliser que ∇ est compatible avec g :

$$Y\, g(W,W) = 2\, g(\nabla_Y W, W)$$

$\Rightarrow$

$$X(Y g(W,W)) = 2\, g(\nabla_X \nabla_Y W, W) + 2\, g(\nabla_Y W, \nabla_X W)$$

$\Rightarrow$

$$(*) \left\{ \frac{1}{2}(XY - YX)\, g(W,W) = \frac{1}{2}[X,Y] \cdot g(W,W) = g(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W, W) \right.$$

On a aussi

$$(**) \quad \frac{1}{2}[X,Y]\, g(W,W) = g(\nabla_{[X,Y]} W, W)$$

$\Rightarrow$ $(*)$ et $\binom{*}{*}$ entraînent que

$$g\left(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W \,;\, W\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \bar{R}(X, Y, W, W) = 0$$

(4) $\bar{R}(X, Y, Z, W) = \bar{R}(Z, W, X, Y)$

est une conséquence algébrique de

(1) (2) (3).

CQFD