Exercice 2.

1. Soient $\Lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d) \in k^{d+1}$ tel que $\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 1$ et $Q \in X$. On a par définition

$$\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_d; \Lambda) = Q + \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \overrightarrow{QP_i}$$

et ce point ne dépend pas du choix de Q. On peut donc choisir $Q = P_0$ de sorte que

$$\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_d; \Lambda) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{RP_i} + P_0$$

Ainsi, pour tout $P \in X$ on a l'équivalence

$$\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_d; \Lambda) = P \iff \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

Comme $(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_d})$ est une base de V, il existe un et un seul choix de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ tel que cette dernière égalité soit vérifiée. Par suite, la valeur de λ_0 est uniquement déterminée par la condition $\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 1$. Cela démontre l'existence et l'unicité de $\Lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d) \in k^{d+1}$ tel que $\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 1$ et $P = \mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_d; \Lambda)$.

2. En reprenant le même raisonnement que ci-dessus, l'hypothèse se traduit par le fait que pour tout $P \in X$ il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in k^d$ tel que

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} = \overrightarrow{P_0P}$$

Lorsque le point P décrit X, le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ décrit V. L'hypothèse entraine donc que $(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_d})$ est une base de V. En d'autres termes, les points $P_0, \ldots, P_d$ sont en position générale. En particulier, $n = d$.

3. Dire que $P_0, \ldots, P_d$ sont en position général c'est dire que chaque point de X s'écrit comme $\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_n; \Lambda)$ pour un et un seul choix de Λ. On constate que cette propriéte ne dépend pas de l'ordre dans lequel les P_i sont rangés parce que l'opération Bar est invariante par permutation, dans le sens où pour toute permutation σ de $\{0, \ldots, d\}$ l'on a:

$$\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_d; \lambda_0, \ldots, \lambda_d) = \mathrm{Bar}(P_{\sigma(0)}, \ldots, P_{\sigma(d)}; \lambda_{\sigma(0)}, \ldots, \lambda_{\sigma(d)})$$

Ainsi, $P_{\sigma(0)}, \ldots, P_{\sigma(d)}$ sont en position générale si (et seulement si) $P_0, \ldots, P_d$ sont en position générale.

Exercice 3. On se donne X un k-espace affine de direction V.

- Soit $Y \subseteq X$ un sous-espace affine au sens de la définition donnée dans l'énoncé. C'est donc l'ensemble de tous les barycentres qu'on peut former à partir de n points $P_0, \ldots, P_n \in X$ donnés. Soit $W = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0, P_n})$ et montrons que $Y = P_0 + W$.
  - Soit $P \in Y$. Alors P est de la forme

$$\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_n, \lambda_0, \ldots, \lambda_n) = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

    On a bien $P \in P_0 + W$.

– Réciproquement, soit $P \in P_0 + W$, disons

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0 P_i}, \qquad (x_1, \ldots, x_n \in k)$$

Cela correspond à $\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_n, x_0, \ldots, x_n)$ où $x_0 \in k$ est choisi de sorte que $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1$. On a donc $P \in Y$.

Cela montre l'égalité $Y = P_0 + W$.

- Réciproquement, soit $Y \subseteq X$ un sous-espace affine **de dimension finie** au sens de la définition du cours. C'est donc un espace de la forme $P_0 + W$ où $W \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel de dimension fini. On se donne une base $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}) \in W^n$ de W et on pose $P_i = P_0 + \overrightarrow{u_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Il s'agit de montrer que $P_0, \ldots, P_n$ vérifient la condition de l'énoncé.

  – Soit P un point de la forme $\mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_n, \lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, soit

  $$P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}$$

  On a bien $P \in P_0 + W$.

  – Réciproquement, soit $P \in P_0 + W$. Il existe $x_0, \ldots, x_n \in k$ tel que

  $$\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u_i}$$

  En additionnant P_0 à l'égalité on obtient alors

  $$P = \mathrm{Bar}(P_0, \ldots, P_n, x_0, \ldots, x_n)$$

  pour un choix convenable de $x_0 \in k$.

Exercice 5.

1. Soit V la direction de X, de sorte que $X = P + V$ (pour $P \in X$). On a alors $\varphi(Y) = \varphi(P + V) = \varphi(P) + \varphi_0(V)$. On peut lire dans cette égalité que :

   - $\varphi(X)$ est un sous-espace affine de Y.
   - La direction de $\varphi(X)$ est $\varphi_0(V)$.
   - En particulier, si φ_0 est de rang fini alors $\varphi(X)$ est de dimension finie, et $\mathrm{rg}(\varphi(X)) = \dim(\varphi_0(X))$.

   De plus, si $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de X alors $\varphi(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\varphi(X)$, puisque φ préserve les barycentres.

2. Supposons que $X' := \varphi^{-1}(\{y\})$ est non vide et donnons-nous $a \in X$. On remarque que

   $$\begin{aligned} X' &= \{x \in X \mid \varphi(x) = y\} \\ &= \{a + \vec{u} \mid \vec{u} \in V, \varphi_0(\vec{u}) = 0\} \\ &= a + \ker(\varphi_0) \end{aligned}$$

   ce qui montre que X' est un sous-espace affine de X de direction $\ker(\varphi_0)$. Ainsi X' est **soit vide, soit un sous-espace affine de** X.

3. Supposons que X' est non vide et que X et de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème du rang,
$$\dim(\ker(\varphi_0)) + \mathrm{rg}(\varphi_0) = n$$
Or, $\dim(X') = \dim(\ker(\varphi_0))$ et
$$\dim(\varphi(X)) = \mathrm{rg}(\varphi_0)$$
d'après ce qui précède. On en déduit l'égalité voulue.

4. Les propositions suivantes sont équivalentes:
   (a) φ est surjective
   (b) φ_0 est surjective
   (c) φ_0 envoie une certaine famille génératrice sur une famille génératrice
   (d) φ_0 envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice
   (e) φ envoie une certaine famille génératrice sur une famille génératrice
   (f) φ envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice

   Pour l'équivalence (a) $\iff$ (c), il suffit de regarder l'égalité $\varphi(X) = \varphi(P)+\varphi_0(X)$ démontrée à la question 1. Les équivalences (b) $\iff$ (c) $\iff$ (d) sont des résultats du cours d'algèbre linéaire. Enfin, les équivalences (c) $\iff$ (e) et (d) $\iff$ (f) se déduisent du fait (voir l'exercice 4) que $\{P_0, \dots, P_n\}$ génère X si et seulement si $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ génère V.

5. S'équivalent:
   (a) φ est injective
   (b) φ_0 est injective
   (c) φ_0 envoie toute famille libre sur une famille libre
   (d) φ envoie toute famille libre sur une famille libre

   En effet, (a) $\iff$ (b) découle du fait que $\varphi^{-1}(\{y\})$ est soit vide, soit de la forme $a+\ker(\varphi_0)$. L'équivalence (b) $\iff$ (c) est un résultat élémentaire d'algèbre linéaire. Enfin, l'équivalence (c) $\iff$ (d) se déduit du fait (voir l'exercice 4) que $\{P_0, \dots, P_n\}$ est libre si et seulement si $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ est libre.

6. En dimension finie, une application linéaire entre deux espaces de même dimension est injective ssi elle est surjective. Par les deux séries d'équivalences ci-dessus, on obtient ainsi les équivalences voulues.

Exercice 7.

1. Si $\varphi_0 \in \mathrm{GL}(V)$, on peut construire $\varphi \in \mathrm{AGL}(X)$ telle que $\mathrm{lin}(\varphi) = \varphi_0$ en choisissant $a \in X$ arbitrairement puis en considérant l'application $\varphi : x \mapsto a + \varphi_0(\overrightarrow{ax})$. Cela montre que lin est surjectif.

2. On reprend les notations précédentes. On peut choisir $a = P$ de sort que $\varphi(P) = P + \varphi_0(\overrightarrow{PP}) = P$, soit $\varphi \in \mathrm{AGL}(X)_P$. Ainsi, la restriction de lin au stabilisateur de P est encore surjective. Pour l'injectivité, soit φ dans le noyau de cette restriction. On a donc que $\mathrm{lin}(\varphi) = \mathrm{id}_V$ et $\varphi(P) = P$. Cela entraine que φ est une translation qui fixe P, d'où $\varphi = \mathrm{id}_X$. En revanche, $\mathrm{GL}(X)_P$ n'est pas distingué dès lors que X est non nul. Pour s'en convaincre, soit $P + \mathbb{R}\vec{u}$ une droite affine passant par P et $s : X \to X$ la symétrie qui renverse cette droite en fixant P. Soit ensuite $t : X \to X$ la translation par $\vec{u}$. Alors, $t^{-1} \circ s \circ t$ envoie P sur d'abord $P + \vec{u}$, puis $P - \vec{u}$ puis enfin $P - 2\vec{u}$. En particulier, $t^{-1} \circ s \circ t \notin \mathrm{AGL}(X)_P$.

3. On sait que $\mathrm{GL}(V)$ est à la fois inclus dans $\mathrm{AGL}(V)$ et un groupe en tant que tel. En particulier, c'est un sous-groupe de $\mathrm{AGL}(V)$. On peut le voir comme le stabilisateur de 0 dans $\mathrm{AGL}(V)$.

Exercice 8.

1. Cela découle des questions 4 et 5 de l'exercice 5.

2. L'action en question est définie par

$$\varphi \cdot (P_1, \ldots, P_n) = (\varphi(P_1), \ldots, \varphi(P_n))$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{AGL}(V)$ et $(P_0, \ldots, P_n) \in \mathrm{A}\mathcal{B}(X)$. La question précédente nous dit que l'opération est bien définie, et on se convainc en un coup d'œil qu'il s'agit bien une action de groupe. Pour montrer que $\mathrm{AGL}(V) \curvearrowright \mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ est un espace principal homogène, il faut montrer que l'action est transitive et que les stabilisateurs sont triviaux.

- Soient deux bases affines $B = (P_0, \ldots, P_n), B' = (Q_0, \ldots, Q_n) \in \mathrm{A}\mathcal{B}(X)$. On veut envoyer B sur B' au moyen d'une transformation affine. Quitte à composer par une translation, on peut supposer sans perte de généralité que $P_0 = Q_0 = P$. Puisque $(\overrightarrow{PP_1}, \ldots, \overrightarrow{PP_n})$ et $(\overrightarrow{PQ_1}, \ldots, \overrightarrow{PQ_n})$ sont des bases de V (voir l'exercice 4), par un résultat d'algèbre linéaire il existe une transformation $\varphi_0 \in \mathrm{GL}(V)$ telle que $\varphi_0(\overrightarrow{PP_i}) = \overrightarrow{PQ_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$. En considérant l'application $x \mapsto P + \varphi_0(\overrightarrow{Px})$ on obtient une transformation affine $\varphi \in \mathrm{AGL}(V)$ telle que $\varphi.B = B'$. Cela montre que l'action est transitive.
- Soient $B = (P_0, \ldots, P_n) \in \mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ et $\varphi \in \mathrm{AGL}(V)_B$. On a donc, pour $i = 1, \ldots, n$, $\varphi(P_i) = P_i$ donc $\varphi_0(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{P_0P_i}$, où φ_0 est la partie linéaire de φ. Or $(\overrightarrow{P_0P_i}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ est une base de V, et toute application linéaire de V est entièrement déterminée par ses valeurs prises sur une base. On en déduit que $\varphi_0 = \mathrm{id}_V$. Ainsi φ est une translation. C'est donc forcément la translation par $\overrightarrow{0}$, i.e. l'identité. On en tire que $\mathrm{AGL}(V)_B$ est trivial.

Exercice 9.

1. La méthode consiste à calculer une base de l'espaces des solutions, puis de l'orthogonaliser (par exemple avec le procédé de Gram–Schmidt). Ici c'est facile car l'espace des solutions est de dimension 1. Un exemple de base orthogonale serait alors $\{(2, -3, 1)\}$

2. Un exemple de base orthogonale est

$$\{(3, 1, 2), (-1, 23, -10)\}$$

3. Un exemple d'une telle base est

$$\{(0, 1, -1), (2, -1, -1), (-2, -2, -2)\}$$

L'astuce est qu'on peut obtenir le troisième vecteur en faisant le produit vectoriel des deux premiers.

Exercice 10.

1. On remarque que

$$V^\perp = \bigcap_{v \in V} \ker\langle v, \cdot \rangle$$

Or, $\langle v, \cdot \rangle$ est une application linéaire pour tout $v \in V$ donc $\ker\langle v, \cdot \rangle$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Une intersection arbitraire de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Ainsi $V^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

2. Si $v \in V \cap V^{\perp}$ alors en particulier $\langle v, v\rangle = 0$ ce qui entraine que $v = 0$.

3. Par le processus de Gram–Schmidt (voir la question suivante) il est possible de construire une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ de V telle que

$$V = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$
$$V^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

   En particulier, $V \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^n$.

4. Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une base de V. On peut compléter celle-ci en une base $(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Par le processus de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. En particulier, $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée de V. Il reste à montrer que $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $V^{\perp}$. Pour ce, considérons $v \in V^{\perp}$ que l'on peut écrire dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ comme

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i$$

   Or, $\langle v, e_i\rangle = 0$ pour $i \leqslant k$ car $v \in V^{\perp}$. On en tire que

$$v = \sum_{i=k+1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i$$

   d'où $v \in \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Réciproquement, si $v = y_{k+1}e_{k+1} + \cdots + y_n e_n \in \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ alors pour tout $w = x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k \in V$ on a

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = 0$$

   du fait que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale. Cela montre que $V^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.

5.
   - L'hypothèse que $\varphi(V) \subseteq V$ nous permet de définir $\tilde{\varphi} : V \to V$ l'endomorphisme induit par φ sur ce sous-espace. Or, φ est injective, donc $\tilde{\varphi}$ l'est aussi. Comme V est de dimension finie, cela entraine que $\tilde{\varphi}$ est surjective, d'où $\varphi(V) = V$.
   - Montrons que $\varphi(V^{\perp}) \subseteq V^{\perp}$. Soit $v \in V^{\perp}$. Soit $w \in V$. Par le point précédent, $\varphi^{-1}(w) \in V$. Puisque φ préserve le produit scalaire, on a alors

$$\langle \varphi(v), w\rangle = \langle v, \varphi^{-1}(w)\rangle = 0$$

     Cela montre que $\varphi(V^{\perp}) \subseteq V^{\perp}$. En reprenant le même raisonnement qu'au point précédent appliqué à $V^{\perp}$, on obtient alors $\varphi(V^{\perp}) = V^{\perp}$.