8.1. Une courbe $\gamma : [0, \infty) \to M$ est *divergente* si pour tout compact $K \subset M$ il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a $\gamma(t) \notin K$. Montrer qu'une variété riemannienne (M, g) est complète si et seulement si toute courbe divergente est de longueur infinie.

8.2. Soit (M, g) une variété riemannienne et $x, y \in M$ deux points de M. Supposons qu'il existe deux géodésiques minimisantes distinctes γ_1, γ_2 reliant x à y. Montrer qu'aucune de ces géodésiques n'est minimisante après le point y.

8.3. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Montrer que

(a) Il existe un nombre $r > 0$, appelé *rayon de normalité*, tel que pour tout point $p \in M$, l'exponentielle $\exp_p : B_p(0) \subseteq T_pM \to M$ est injective et réguliere.

(b) Pour tout paire de points $x, y \in M$ à distance $d(x, y) < r$ il y a exactement une géodésique minimisante de x à y.

(c) Toute courbe fermée de longeur $< 2r$ est contractible.

8.4. Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte. Montrer que dans chaque classe d'homotopie non triviale $\mathcal{C}$, il existe une géodésique fermée lisse dont la longueur est minimale dans $\mathcal{C}$.