Géométrie II

Corrigé 5, exercices 6 et 7

Printemps 2020

Exercice 6

1. Comme le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants, $SL_2(\mathbb{Z})$ est stable par multiplication. Aussi $\det(Id) = 1$. Pour finir,
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$
2. On peut facilement vérifier par récurrence que
$$n^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et $w^2 = -Id, w^3 = -w, w^4 = Id$, donc $w^k = w^{k \mod 4}$.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$ arbitraire pour le moment.
$$n^k \gamma = \begin{pmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$
Si $c = 0$, alors $|a| = |a'| \geq 0 = c$. Si $c \neq 0$, alors on utilise la division euclidienne pour affirmer l'existence de $k \in \mathbb{Z}$, $0 \geq r < |c|$ tels que $a' = a + kc = r$, ce qui termine la preuve car $|a'| = r < |c|$.
4. $c = 0$, et soient $k, l \in \mathbb{Z}$ à déterminer tels que $\gamma = w^k n^l$. Notons que, comme $\det(\gamma) = 1$, alors $0 \neq d = \frac{1}{a}$. Aussi, comme $a, d \in \mathbb{Z}$, alors $a = d = 1$. Finalement
$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \gamma = w^k n^l = w^k \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
donc il suffit de prendre $k = 0, l = b$.
5. $w\gamma' = wn^k\gamma = \begin{pmatrix} c & d \\ -a - kc & -b - kd \end{pmatrix}$, donc $c'' = -a - kc = -a'$, et ainsi $|c''| = |a'| < |c|$ par le point 3.
6. Si $c = 0$, on a fini par le point 3. Sinon, on a que $wn^k\gamma$ satisfait $|c''| < |c|$ par le point précédent. Si $|c''| = 0$, on a à nouveau fini. Sinon on réitère l'opération jusqu'à ce que $|c^{(m)}| = 0$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Un tel moment arrive forcément en maximum $|c|$ étapes, étant donné que $|c^{(i)}| \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. On applique alors le point précédent pour conclure.

Exercice 7

1. On calcule
$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}\frac{c\overline{z}+d}{c\overline{z}+d} = \frac{ac|z|^2+adz+bc\overline{z}+bd}{|cz+d|^2}$$
$$Im(\gamma z) = \frac{(ad-bc)Im(z)}{|cz+d|^2} = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$$
2. $$n^k z = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = z+k$$
Donc il suffit de prendre $k = -[Re(z)]$ (ou $[x]$ est l'entier plus proche de x) et on a $Re(n^k z) \in [-1/2, 1/2[$.
3. On a
$$wz = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z = \frac{1}{-z} = \frac{-1}{z}$$
Donc si on écrit $z = |z|e^{i\varphi}$ avec $\varphi = \arg z$ on a $wz = -|z|^{-1}e^{-i\varphi}$. On voit ainsi que si $|z| > 1$ alors $|wz| < 1$ est vice versa. Avec un argument sur les angles on prouve facilement que $z \mapsto wz$ est bien une bijection sur les ensembles donnés.
4. Ici on a $|z| = 1$ et donc $|wz| = 1$, donc un element du cercle est envoyé sur un autre élément du cercle.
5. On considère ici le sous enesemble
$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z})} = \{z \in \mathbb{H} : Re(z) \in [-1/2, 1/2[, |z| > 1\} \\ \cup \{Re(z) \in [-1/2, 0], |z| = 1\}$$
Soit $z \in \mathbb{H}$. Vu (2), il existe k_1 tel que $Re(n^{k_1}z) \in [-1/2, 1/2[$. Si $n^{k_1}z$ est dans $\mathcal{D}$ on a fini. Si $|n^{k_1}z| < 1$ on applique w et on aura $|wn^{k_1}z| > 1$ et avec un autre k_2 on peut avoir $n^{k_2}wn^{k_1}z \in \mathcal{D}$. Sinon $|n^{k_1}z| = 1$ avec $Re(n^{k_1}z) \in]0, 1/2]$ et donc $wn^{k_1}z \in \mathcal{D}$.
6. En utilisant la formule du point 1 on a $Im(\gamma z) \leq Im(z)\ \forall z \in \mathcal{D}$ si et seulement si $|cz + d|^2 \geq 1\ \forall z \in \mathcal{D}$. On verra dans les points qui suivent que l'inégalité est toujours satisfaite. Dans chaque cas on regarde aussi si l'égalité est possible et sous quelles conditions.
   - Si $c = 0$ pour avoir $\gamma \in \mathbb{SL}_2(\mathbb{Z})$ il faut $a = d = \pm 1$, i.e. $\gamma = \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Pour ce choix de c la relation $|cz + d|^2 \geq 1$ est en effet toujours satisfaite avec égalité.
   - Si $|c| \geq 2$ si on écrit $z = x + iy$ on a $|cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2 > 1$ car $c^2y^2 > 1$ si $z \in \mathcal{D}$. Donc on a toujours inégalité stricte.
   - Si $|c| = 1$ on écrit
$$\begin{aligned} |cz+d|^2 &= (cx+d)^2 + (cy)^2 = c^2x^2 + d^2 + 2cdx + c^2y^2 \\ &= (x^2+y^2) + d^2 + 2cdx \\ &= |z|^2 + d^2 + 2cdRe(z) \overset{(1)}{\geq} |z|^2 + d^2 - |cd| \\ &= |z|^2 + d^2 - |d| \overset{(2)}{\geq} 1 + d^2 - |d| \overset{(3)}{\geq} 1 \end{aligned}$$
     On voit donc que quand $c = \pm 1$ l'ingéalité est toujours satisfaite aussi. Analysons les cas d'égalité. Il faut que les inégalités (1,2,3) soient des égalités.
     - si $|d| \geq 2$ la (3) est stricte.

— si $d=0$ il faut $|z|=1$, dans le cas contraire (2) est stricte.

— si $d=\pm 1$ il faut aussi que $|z|=1$ pour le même motif et de plus que (1) soit une égalité, donc que $2cdRe(z) \overset{(4)}{=} -|cd|$. Comme $|z|=1$ et $z \in \mathcal{D}$ on a $Re(z) \in [-1/2, 0]$, on a donc que (4) est vrai si $Re(z) = -1/2$ et $cd = |cd|$, i.e. c, d ont même signe, donc $c = d$.

7. On a vu au point precedent que si $z \in \mathcal{D}$ alors $Im(\gamma z) \leq Im(z)$. Mais comme aussi $\gamma z \in \mathcal{D}$ alors on peut appliquer le même résultat sur γz avec γ^{-1} et obtenir $Im(z) = Im(\gamma^{-1}\gamma z) \leq Im(\gamma z)$. Donc $Im(z) = Im(\gamma z)$. Dans ce qui suit on verra qu'on a toujours $\gamma z = z$ et de plus soit $\gamma = \pm Id$, soit $z = i$ soit $z = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. On utilisera la partie 6.

   — si $c=0$ on a toujours égalité et on sait que $\gamma = \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Vu que $\gamma z = z \pm n \in \mathcal{D}$ alors $Re(z \pm n) \in [-1/2, 1/2[$. Comme on a déja $Re(z) \in [-1/2, 1/2[$ alors $n = 0$. Donc $\gamma = \pm Id$ et $\gamma z = z$.

   — $|c| \geq 2$ n'est pas possible car on aurait $Im(\gamma z) < Im(z)$.

   — si $|c| = 1$ il faut qu'une des deux suivantes soit vraie

     — $d = 0$ et $|z| = 1$. Pour avoir $\gamma \in \mathbb{SL}_2(\mathbb{Z})$ il faut $b = -c$, i.e. $\gamma = \begin{pmatrix} a & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant le point 1 on a la formule $Re(\gamma z) = ac - Re(z)$. On sait que $Re(z) \in [-1/2, 0]$ et que $Re(\gamma z) \in [-1/2, 1/2[$. Une possibilité est $a = 0$. Avec $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $\gamma z = \frac{-1}{z} = -\overline{z}$. Ainsi $Re(\gamma z) = -Re(z)$ et pour $|z| = 1$ avec $\gamma z, z \in \mathcal{D}$ la seule possibilité est $z = i$. On voit aussi $\gamma z = z$. Le cas $|a| \geq 2$ ou $a = c$ n'est pas possible car on aurait $Re(\gamma z) \notin [-1/2, 1/2[$. Avec $a = -c$ on a $Re(\gamma z) = -1 - Re(z) \in [-1/2, 1/2[$ si $Re(z) = -1/2$. On obtient aussi $Re(\gamma z) = -1/2$ et on sait $Im(\gamma z) = Im(z)$ donc $\gamma z = z$. Si $Re(z) = -1/2$ et $|z| = 1$ alors $z = -1/2 + i\sqrt{3}/2$.

     — $|d| = 1$. Au point 6 on a vu qu'il faut $|z| = 1$, $Re(z) = -1/2$ et $d = c$. Donc $z = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. Si $c = d = 1$ avec les conditions $Re(\gamma z) \in [-1/2, 1/2[$ et $det(\gamma) = 1$ on trouve $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On verifie que $\gamma z = z$. On trouve un résultat pareil si $c = d = -1$.

8. Soient $z, z' \in \mathcal{D}$ tels que $\mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}).z = \mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}).z'$ (même orbite). Alors $z' = \gamma z$, de plus $z' \in \mathcal{D}$. On vient de voir que dans ce cas on a $\gamma z = z$, donc $z' = z$. De plus tout element z' dans $\mathbb{H}$ peut être envoyé dans $\mathcal{D}$. Reciproquement, pour tout $z' \in \mathbb{H}$ il existe $z \in \mathcal{D}$ tel que $\gamma z = z'$. Donc $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental.

9. Fait au point 7.