Géométrie Riemannienne, 28.04.2020

Rappel: le tenseur (1,3) - de courbure est
$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
$(X, Y, Z \in T_pM)$.

Le (0,4) tenseur de courbure associé est
$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W)$$

Propriétés algébriques :

- $\bar{R}(X,Y,Z,W) = -\bar{R}(Y,X,Z,W) = -\bar{R}(X,Y,W,Z)$
$$= \bar{R}(Z,W,X,Y)$$
- $\bar{R}(X,Y,Z,W) + \bar{R}(Y,Z,X,W) + \bar{R}(Z,X,Y,W)$

Lemme Si $g' = \lambda^2 g$ ($\lambda > 0$ constant). Alors le tenseur de courbure associé vérifie
$$R_{\lambda g} = R_g \quad \text{et} \quad \bar{R}_{\lambda g} = \lambda^2 \bar{R}_g$$

Preuve g et $g' = \lambda^2 g$ ont la même connexion de Levi-Civita.

Donc $R = R'$ (car le $(1,3)$-tenseur de courbure ne dépend que de ∇)

et $\bar{R}' = "g' R'" = \lambda^2 \bar{R}$ #

Définition La courbure sectionnelle de (M,g) associe à toute paire $X, Y \in T_pM$ linéairement indépendants le nombre

$$\boxed{K(X,Y) = \frac{\bar{R}(X,Y,Y,X)}{\|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2}}$$

Rem : $\|X \wedge Y\|^2 = \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2$

$= (\text{aire du parallélogramme sur } X,Y)^2 > 0$.

<u>Proposition</u> $K(X,Y)$ ne dépend que

$$\Pi = \Pi_{X,Y} = \mathrm{Span}\{X,Y\} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y$$

$$\subset T_pM$$

(Π est le 2-plan engendré par X, Y).

<u>Déf</u> On note $G_2(TM)$ = l'ensemble

$$\{(p,\Pi) \mid p \in M,\ \Pi \subset T_pM,\ \text{un 2-plan}\}$$

= la Grassmannienne d'ordre 2 de M.

($G_2(TM)$ est une variété).

Donc la courbure sectionelle définit donc une fonction

$$K : G_2(TM) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

<u>Remarque</u> Si $\dim(M) = 2$ alors $G_2(TM) = M$

(il n'y a qu'un 2-plan $\subset T_pM$, $\forall p$)

<u>Donc</u> la courbure sectionnelle définit une fonction $K : M \to \mathbb{R}$ (si $\dim(M)=2$)

(K coïncide avec la courbure de Gauss si $M \subset \mathbb{R}^3$, preuve plus tard).

<u>Preuve de la proposition</u> : Supposons que

$$X' = aX + bY \quad , \quad Y' = cX + dY$$

avec $ad - bc \neq 0$, alors :

$$\bar{R}(X', Y', Y', X') = \bar{R}(X, Y, Y', X') \cdot (ad - bc)$$

$$= \bar{R}(X, Y, Y, Z)\,(ad - bc)^2$$

et

$$\| X' \wedge Y' \| = \| X \wedge Y \| \cdot | ad - bc |$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{R}(X', Y', Y', X')}{\| X' \wedge Y' \|^2} = \frac{\bar{R}(X, Y, Y, X)}{\| X \wedge Y \|^2}$$

#

Remarque $\bar{R}(X,Y,Y,X) = -\bar{R}(X,Y,X,Y)$.

Proposition Si $g' = \lambda^2 g$, alors

$$K_{g'}(X,Y) = \frac{1}{\lambda^2} K_g(X,Y)$$

Preuve $\bar{R}' = \lambda^2 \bar{R}$ et

$$\| X \wedge Y \|_{g'} = \lambda^2 \| X \wedge Y \|_g$$

#

Exemples ① On (long) calcul montre que

Si $g = \dfrac{|dx|^2}{(1 + \frac{1}{4}|x|^2)^2} \Rightarrow K = +1$
$= \text{constante}$.

Cette métrique = métrique de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (sphère de rayon 1) en coordonnées stéréographique.

Donc la sphère de rayon $a > 0$ a courbure sectionnelle constante

$$K = \frac{1}{a^2}$$

② L'espace hyperbolique dans le modèle (sphérique) de Poincaré admet la métrique

$$g = \frac{|dx|^4}{\left(1 - \frac{1}{4}|x|^2\right)^2} = \left(\frac{4|dy|^2}{(1-|y|^2)^2}\right)$$

Alors

$$K = -1 \quad \left(= \left(\sqrt{-1}\right)^2 \right)$$

Donc l'espace hyperbolique est une "pseudosphère"

$$= \text{sphère de rayon } i = \sqrt{-1}$$

Digression On appelle "forme spatiale" (space form) une variété riemannienne (M, g) telle que

(1) (M, g) est complète.

(2) la courbure sectionnelle est constante.

Problème : Classifier les formes spatiales (à isométrie près).

Théorème Soit (M, g) une forme spatiale de courbure K. Alors

1) Si M est simplement convexe, alors

$M = \mathbb{R}^n$ (si $K = 0$)

$M = S^n_a$ (si $K = \frac{1}{a^2} > 0$)

$M = \mathbb{H}^n_a$ si $K = -\frac{1}{a^2} < 0$

avec $\mathbb{H}^n_a$ un homothétique de l'espace hyperbolique

Corollaire Si M est une forme spatiale de courbure $K = 0, +1$ ou -1.

Alors

$$M \cong \mathbb{R}^n/\Gamma \quad , \quad M = S^n/\Gamma \quad , \quad M = \mathbb{H}^n/\Gamma$$

Avec $\Gamma <$ Isométrie $(\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n)$ un sous-groupe discret sans point fixe)

($\Rightarrow$ le revêtement universel de M est isométrique à

$$\tilde{M} \cong \mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n \quad)$$

Exemples

1) $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (tore)

est une forme spatiale de courbure nulle

2) $\mathbb{RP}^n = S^n/(\pm I_d) =$ forme spatiale de $K = +1$.

De plus $\pi_1(M) \cong \Gamma$

(si $M = \mathbb{R}^n/\Gamma,\ S^n/\Gamma,\ \mathbb{H}^n/\Gamma$)

__Remarque__ Si la variété M a une structure de variété complexe (alors T_pM est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel)

Alors $\forall X \in T_pM$, $X \neq 0$

on peut définir la courbure "__bisectionnelle__"

$$K_{\mathbb{C}}(X) = K(X, JX)$$

(où J = "structure complexe de T_pM")

$K(\Pi)$ est bien définie si

Π = $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par $X \in T_pM$.

Courbure de Ricci

Si $Z, W \in T_p M$ alors on a un endomorphisme

$$\begin{aligned} T_p M &\to T_p M \\ X &\mapsto R(X,Z)W \end{aligned}$$

Def La courbure de Ricci de (M,g) est la trace de cet endomorphisme

Donc
$$Ric(Z,W) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, Z, W, e_i)$$

avec $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_p M$ base orthonormée.

Composantes en coordonnées :

$$Ric = R_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \qquad \text{où}$$

$$\underline{\underline{R_{ij}}} = Ric\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \underline{\underline{\sum_k R^k_{kij}}}$$

$= \text{trace (ou contraction) de } R$

Propriété Si $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_pM$ orthonormé

$$Ric(e_i, e_i) = \sum_{j \neq i} \overline{R}(e_j, e_i, e_j, e_i)$$

$$= \sum_{j \neq i} K(e_i, e_j)$$

(Ric est un tenseur covariant d'ordre 2)

Définition la courbure scalaire de M est la trace de Ric

$$S : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto \mathrm{Trace}(Ric_p)$$

$$S(p) = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i)$$

Exemples: (1) Si la courbure sectionelle de M = K = constante, alors

$$Ric_p(e_i, e_i) = (n-1) \cdot K \quad \forall p \in M$$

$$S(p) = n \cdot (n-1) \cdot K$$

(2) En dimension 2 $(n = 2)$ alors $K, S : M \to \mathbb{R}$ sont reliées par

$$S = 2 \cdot K$$