9.1. Arnaud et Bernard jouent le jeu suivant. Arnaud definit une metrique $g = g_{ij}(y)$ dans un entourage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Ensuite Bernard doit faire un changement de coordonnées $y = f(x)$ (sans déplacer l'origine) de façon que la métrique resultante, $h = h_{ij}(x) = f^*g$, soit aussi similaire que possible à la métrique Euclidienne en ce qui concerne à la valeur des coefficients h_{ij} et leurs dérivées partielles dans l'origine.

(a) Écrire les coefficients h_{ij} et leurs dérivées partielles jusqu'a l'ordre k ($k = 0, 1, 2$) dans l'origine en termes de la valeur de f et ses dérivées jusqu'a l'ordre $k + 1$.

(b) Montrer que, une fois choisis les derivées premières $\partial_i f(0)$, il y a exactement une manière de régler les derivées secondes de f de façon que $\partial_j h_{kl} = 0$.

(c) Montrer qu'en général il n'est pas possible de assurer que $\partial_i\partial_j h_{kl} = 0$ par manque de degrées de liberté. Combien de degrées ils manquent ?

(d) Dans le cas où M est une surface, dans le système de coordonnées normales (cf. exercice 6.5), montrer que toutes les dérivées $\partial_i\partial_j h_{kl}$ s'écrivent en termes d'un seul nombre. (Ce nombre est la courbure de Gauss.)

9.2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, trouver toutes les connexions qui ont les mêmes géodésiques que la connexion de Levi–Civita. Réfléchir sur le mot "torsion".

9.3. Rappeler ce qu'est un 2-plan $\Pi \subset TM$ dans une variété Riemannienne (M, g) et la courbure sectionnelle $K(\Pi)$. Puis démontrer que cette notion est bien définie (i.e. indépendante des choix effectués dans la définition).

9.4. Montrer que le tenseur de Ricci est symétrique : $R(X, Y) = R(Y, X)$.

9.5. Dans une variétée riemannienne (M, g), soit $f : M \to (0, +\infty)$ une fonction lisse. Éxprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionelle de g.

9.6. On considère une surface riemannienne où la métrique est donnée en "coordonnées polaires" par

$$g = \mathrm{d}r^2 + f(r, \theta)^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

(a) Montrer que la courbure sectionnelle $K(r, \theta)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + Kf = 0.$$

Cette équation s'appelle l'équation de Jacobi dans le cas des surfaces. Elle réapparaîtra dans le cours dans le cas général.

(b) Justifier que

$$\lim_{r\to 0} f(r, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = 1.$$

pour tout θ.

(c) Déduire la valeur de la courbure de la géométrie hyperbolique.

(d) Donner une expression (en coordonnées polaires) de toutes les métriques à courbure constante sur une surface.

(e) Prouver que deux surfaces de mêmes courbures constantes sont localement isométriques. Sont elles globalement isométriques ?

9.7. Que valent les courbures (sectionnelle, de Ricci et scalaire) de la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$?