Math 125 – Chap 3

Espace Euclidiens : Isometries

4 mai 2020

φ isometrie lineaire

$\Updownarrow$

M_φ matrice dans la base canonique

$$M_\varphi \cdot {}^tM_\varphi = {}^tM_\varphi \cdot M_\varphi = Id$$

$$M_\varphi^{-1} = {}^tM_\varphi$$

THÉORÈME 3.6. *L'application lineaire φ est une isometrie ssi*

$$M_\varphi.{}^tM_\varphi = {}^tM_\varphi.M_\varphi = \mathrm{Id}_n. \tag{4.1}$$

En d'autres termes

$$M^{-1} = {}^tM.$$

Si M_φ est de cette forme on a alors

$$\det(M) = \pm 1.$$

DÉFINITION 3.13. *Une matrice M verifiant (4.1) est appellee matrice orthogonale. Si $\det M = +1$ cette matrice est dite speciale et si $\det M = -1$ cette matrice est dite non-speciale.*

On note respectivement

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+ = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^- \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

l'ensemble des matrices orthogonales, orthogonales speciales et orthogonales non-speciales.

DÉFINITION 3.14. *Une isometrie lineaire φ sera dites speciale ou non-speciale suivant que sa matrice M_φ dans la base canonique est speciale ou non-speciale.*

On note respectivement

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^- \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$$

l'ensemble des isometries speciales ou non-speciales.

THÉORÈME 3.7. *L'ensemble des matrices orthogonales* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *isomorphe a* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$.

L'ensemble des matrices orthogonales speciales $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+$ *est un sous-groupe distingue de* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *d'indice 2 et* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ *est un sous-groupe distingue d'indice isomorphe.*

L'ensemble des matrices orthogonales non-speciales $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^-$ *est une orbite de* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+$ *et de meme* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^-$ *est une orbite de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+$.

On a pour toute matrice non-speciale $M^- \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})^-$ *(toute isometrie non-speciale)* $\sigma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^-$

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^- = M^-.\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+ = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+.M^-, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^- = \sigma.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+.\sigma$$

et

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+ \sqcup M^-.\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+,$$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ \sqcup \sigma.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+.$$

4.4. Proprietes spectrales des isometries.

Proposition 3.15. *Soit φ une isometrie* linéaire *sur $\mathbb{R}^n$ alors toute valeur propre reelle si elle existe vaut ± 1.*

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \qquad \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

PROPOSITION 3.16. *Supposons n impair et soit φ une isometrie lineaire alors φ possede une valeur propres reelle et un vecteur propre de longueur 1: il existe $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{e}\| = 1$ et $\lambda = \pm 1$ avec*

$$\varphi(\mathbf{e}) = \lambda.\mathbf{e}.$$

De plus si φ est speciale ($\det M_\varphi = +1$) *alors $+1$ est valeur propre.*

Exercice: Si n est pair et φ est non-speciale $\det M_\varphi = -1$ alors $+1$ et -1 sont valeurs propres et les vecteurs propres associes sont $\perp$.

4.5. Reduction des isometries.

THÉORÈME 3.9. *Soit* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ *une isometrie lineaire et* $W \subset \mathbb{R}^n$ *un sous-espace qui est stable par* φ*:*

$$\varphi(W) \subset W.$$

Soit

$$W^\perp = \{\vec{w}' \in \mathbb{R}^n,\ \forall \vec{w} \in W, \langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle = 0\}$$

l'orthogonal de W *alors* $W^\perp$ *est un SEV stable par* φ *et on a une decomposition en somme* ~~*speciale*~~ *(orthogonale)*

directe

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp.$$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_r, \vec{w}'_1, \cdots, \vec{w}_{r'})$ *un base orthonormee formee d'une BO de* W *et de* $W^\perp$ *alors la matrice de* φ *dans cette base est une matrice blocs*

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} M_{\varphi,\mathcal{B}_W} & 0 \\ 0 & M_{\varphi,\mathcal{B}_{W^\perp}} \end{pmatrix}$$

ou

$$M_{\varphi,\mathcal{B}_W} \in \mathrm{O}_r(\mathbb{R}),\ M_{\varphi,\mathcal{B}_{W^\perp}} \in \mathrm{O}_{r'}(\mathbb{R})$$

sont des matrices orthogonales. En particulier on a

$$\det(M_{\varphi,\mathcal{B}}) = \det(M_{\varphi,\mathcal{B}_W})\det(M_{\varphi,\mathcal{B}_{W^\perp}})$$

<u>Preuve</u> : $W^{\perp} = \{ \vec{w}' \in \mathbb{R}^n$ tq $\forall \vec{w} \in W$
$\langle \vec{w}', \vec{w} \rangle = 0 \}$

est un sev de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$.

si W est stable par $\varphi \Rightarrow$
$W^{\perp}$ est stable par φ

Soit $\vec{w}' \in W^{\perp}$ on veut mq $\varphi(\vec{w}') \in W^{\perp}$

$$\forall \vec{w'} \in W \quad \langle \varphi(\vec{w'}), \vec{w} \rangle \overset{?}{=} 0$$

$$\underset{\text{adjonction}}{=} \langle \vec{w'}, \varphi^{-1}(\vec{w}) \rangle$$

il suffit de voir $\varphi^{-1}(\vec{w}) \in W$

φ est isometrie donc elle est injective et $\varphi(W) \subset W$ $\Rightarrow \varphi(W) = W$

$\dim \varphi(W) = \dim W$

$$\Longrightarrow \quad \varphi^{-1}(W) = W$$

$$\Longrightarrow \quad \langle \varphi(\vec{w}'), \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}', \varphi^{-1}(w) \rangle$$

$$= \langle \vec{w}', \underbrace{\vec{w}''}_{\in W} \rangle = 0$$

$\vec{w}' \in W^{\perp}$

$$\varphi(W) = W$$

$$\varphi(W^{\perp}) = W^{\perp}.$$

On considère la restriction de

ç à W et W' sont des isometries de W et W' et donc leur matrices ds des BON de W et $W^\perp$ sont athogonales

Et si on a deux telles bases B_W et $B_{W^\perp}$ BON leur reunion et une base de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$) qui est une BON

Comme $\varphi(W) \subset W$ $\varphi(W^\perp) \subset W^\perp$

la matrice de φ dans la base $(B_W, B_{W^\perp})$ est une matrice bloc formée des matrices de $\varphi_{|W}$ ds la base B_W et de la matrice de $\varphi_{|W^\perp}$ ds la base $B_{W^\perp}$

$$M_{\varphi,(B_W, B_{W^\perp})} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} M_{\varphi,B_W} & 0 \\ \hline 0 & M_{\varphi,B_{W^\perp}} \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{M_{\varphi,B_W}}}_{B_W} \quad \underbrace{\hphantom{M_{\varphi,B_{W^\perp}}}}_{B_{W^\perp}} \end{array}$$

$$\det M_{\varphi,(B_W, B_{W^\perp})} = \det(M_{\varphi,B_W}) \det(M_{\varphi,B_{W^\perp}})$$

$\square$

THÉORÈME 3.10. *Soit $n \geqslant 1$ un entier impair et $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ une isometrie lineaire; il existe une base orthonormee que l'on peut supposer orientee $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$ telle que $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ est de la forme*

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } M_{n-1} \in \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$$

la matrice d'une isometrie. On a

$$\det(M_{\varphi,\mathcal{B}}) = (\pm 1)\det(M_{n-1}).$$

— Si de plus φ est speciale on peut supposer $\pm 1 = 1$ & $M_{n-1} \in SO_{n-1}(\mathbb{R})$.

Preuve : On applique le thm precedent à $W = \mathbb{R}\vec{w}$ ou $\vec{w}$ et un vecteur propre de φ de valeur propre $\lambda = \pm 1$

dont on sait qu'ils existent car
n est supposé impair.

on prend $W = \mathbb{R}\vec{w}$ (qui est stable par φ)

et $W^{\perp} = (\mathbb{R}\vec{w})^{\perp}$

= l'ensemble des vecteurs

$\perp$ à $\vec{w}$.

Le cas $n=3$

Corollaire 3.7. *Soit* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0}}$ *une isometrie lineaire; il existe une base orthonormee* $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *telle que* $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ *est de la forme*

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

une matrice orthogonale. Si de plus $M_2 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^-$ *est une matrice de symetrie alors (quitte a modifier* $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$*), on peut supposer que*

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si enfin $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0}}^+$ *est speciale, on peut prendre la matrice* $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ *de la forme*

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

une matrice de rotation.

Isometries affines.

$$\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$$

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0 \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_0 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$$

$\vec{u} = \varphi(\vec{0})$ et

$$\varphi_0 = t_{-\varphi(\vec{0})} \circ \varphi.$$

Définition 3.17. *L'ensemble des isometries*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \varphi_0 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+_{\mathbf{0}}\} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \det(\varphi_0) = +1\}$$

dont la partie lineaire est une speciale est s'appelle groupe des deplacements affines; son complementaire dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des anti-deplacements affines*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \varphi_0 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^-_{\mathbf{0}}\} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n),\ \det(\varphi_0) = -1\}.$$

THÉORÈME 3.11. *L'ensemble des deplacements affines* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$ *forme un sous-groupe distingue de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *d'indice* 2*; l'ensemble des anti-deplacements est la seconde des deux orbites pour l'action de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$ *sur* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *par multiplication: on a pour tout* $s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^-$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = s.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+.s$$

et

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup s.\,\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+.s$$

Preuve: $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \text{ tq } \det(\varphi_0) = +1 = \det(\mathrm{lin}(\varphi))\}$

$= \{\varphi \text{ tq } \det \circ \mathrm{lin}(\varphi) = +1\}$

$= \ker(\underline{\det \circ \mathrm{lin}})$ morphisme de gpe

$\det \circ \operatorname{lin} : \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n) \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$

son noyau est un sous gpe distingué.

$\det \circ \operatorname{lin}$ est surjectif sur $\{\pm 1\}$

car l'isometrie lineaire qui envoie

$$\varphi_0 : \begin{array}{l} e_1^\circ \longrightarrow -e_1^\circ \\ e_2^\circ \longrightarrow e_2^\circ \\ \vdots \\ e_n^\circ \longrightarrow e_n^\circ \end{array}$$

est un isometrie de det -1.

$\left(= \text{symetrie orthogonale } /\!/ \langle e_2^\circ, \dots, e_n^\circ \rangle . \right)$

par le thm noyau-Image

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) / \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \simeq \{\pm 1\}$$

et $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$ est d'indice 2.

$\square$

THÉORÈME 3.~~11~~12 (Decomposition des isometries affines). *Soit* $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *une isometrie affine de partie lineaire* $\varphi_0 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$. *L'isometrie* φ *se decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t_{\vec{v}} \circ \varphi' \text{ avec } \varphi' = t_{\vec{w}} \circ \varphi_0$$

$\vec{u} = \varphi(\vec{0}) = \vec{v} + \vec{w}$

avec $\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$ *et* $\vec{w} \in \mathrm{Im}(\varphi_0 - \mathrm{Id})$. *On a les proprietes suivantes*

(1) *Les sous espaces* $\ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$ *et* $\mathrm{Im}(\varphi_0 - \mathrm{Id})$ *sont perpendiculaires et en particulier supplementaires.*

(2) φ' *commute avec* $t_{\vec{v}}$:
$$t_{\vec{v}} \circ \varphi' = \varphi' \circ t_{\vec{v}},$$

(3) *L'ensemble des points fixes de* φ' *est non-vide et un espace affine de direction* $\ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$: *plus precisement soit* $\vec{z}$ *tel que*
$$\vec{w} = \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z}$$
alors
$$\mathrm{Fix}(\varphi') = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \varphi'(x) = x\} = -\vec{z} + \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id}).$$

(4) *L'isometrie* φ *admet des points fixes si et seulement si* $\vec{v} = \mathbf{0}$ *c'est a dire si et seulement si* $\varphi = \varphi'$.

On commence par montrer la

Proposition 3.17. *Soit φ_0 une isometrie lineaire et $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. L'isometrie $\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$ admet un point fixe ssi $\vec{u} \in \mathrm{Im}(\varphi_0 - \mathrm{Id})$ et alors l'ensemble des points fixes est un espace affine de direction $\ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$: soit $\vec{z}$ tel que $\vec{u} = (\varphi_0 - \mathrm{Id})(\vec{z})$ alors*

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(x) = x\} = -\vec{z} + \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id}).$$

Preuve: Soit x un pts fixe de φ

$$\varphi(x) = x \iff \vec{u} + \varphi_0(x) = x$$

$$\iff -\vec{u} = \varphi_0(x) - x = (\varphi_0 - I_d)(x)$$

$$\iff \vec{u} = (\varphi_0 - I_d)(-x)$$

$$\iff \vec{u} \in \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)$$

Soient x_0 et x deux pts fixes de φ

$$\Longrightarrow (\varphi_0 - I_d)(x_0) = (\varphi_0 - I_d)(x)$$

$$\underbrace{(\varphi_0 - I_d)(x_0)}_{= -\vec{u}} = \underbrace{(\varphi_0 - I_d)(x)}_{= -u}$$

$$(\varphi_0 - I_d)(x - x_0) = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow x - x_0 \in \ker(\varphi_0 - I_d)$$

$$x \in x_0 + \ker(\varphi_0 - I_d)$$

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = x_0 + \ker(\varphi_0 - I_d)$$

voyons si $\vec{z}$ est tel que

$$(\varphi_0 - I_d)(\vec{z}) = \vec{u} \quad \text{alors}$$

$-\vec{z} = x_0$ est un pt fixe de φ

$$\varphi(-\vec{z}) = \vec{u} + \varphi_0(-\vec{z}) = \vec{u} - \varphi_0(z_0)$$

$$= \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} - \varphi_0(\vec{z}) = -\vec{z}$$

$\square$

PROPOSITION 3.18. *Soit φ_0 une isometrie lineaire; on a la decomposition en somme directe orthogonale*

$$\mathbb{R}^n = \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id}) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(\varphi_0 - \mathrm{Id}).$$

Preuve : soit $\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - I_d)$

$\vec{w} \in \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)$

mq $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \overset{?}{=} 0$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} \rangle$$

$$= \langle \vec{v}, \varphi_0(\vec{z}) \rangle - \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle$$

$$\varphi_0(\vec{v}) = \vec{v} \quad (\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - I_d))$$

$$= \langle \varphi_0(\vec{v}), \varphi_0(\vec{z}) \rangle - \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle$$

$$= \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle = 0$$

Comme $\ker(\varphi_0 - I_d) \perp \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)$

on un decomposition en somme direct

$$\mathbb{R}^n \overset{?}{=} \ker(\varphi_0 - I_d) \oplus \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)$$

$$(\text{cad} \quad \ker(\varphi_0 - I_d) \cap \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d))$$

Maison a aussi que cette somme directe c'est $\mathbb{R}^n$ en entier.

On a

par le thm noyau - Image (pour les eVs)

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \ker(\varphi_0 - I_d) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d))$$

po

$$\mathbb{R}^n = \ker(\varphi_0 - I_d) \oplus \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)$$

$\square$

Proposition 3.19. *Soit φ affine alors $t_{\vec{v}}$ commute avec φ si et seulement si $\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \mathrm{Id})$.*

Preuve : $\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0 \quad \vec{V} \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ \varphi \iff t_{\vec{v}} \circ \varphi \circ t_{-\vec{v}} = \varphi$$

$$\iff t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} \circ \varphi_0 \circ t_{-\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$$

$$\iff \cancel{t_{\vec{u}} \circ}\, t_{\vec{v}} \circ \varphi_0 \circ t_{-\vec{v}} = \cancel{t_{\vec{u}}} \circ \varphi_0$$

$$t_{\vec{v}} \circ \varphi_0 \circ t_{-\vec{v}} \overset{?}{=} \varphi_0$$

$$\left(t_{\vec{v}} \circ \varphi_0 \circ t_{-\vec{v}} := \psi = t_{\psi(\vec{0})} \circ \varphi_0 \right)$$

$$t_{\psi(\vec{0})} \circ \varphi_0 \overset{?}{=} \varphi_0 \quad \left(\psi(\vec{0}) = \vec{0} \right)$$

Ce aussi vrai ssi

ψ et φ_0 prennent la même valeur en un vecteur quelconque

On a ce qu'on veut ssi

$$\psi(\vec{v}) \overset{?}{=} \varphi_0(\vec{v})$$

$$\psi(\vec{v}) = \underbrace{t_{\vec{v}} \circ \underbrace{\varphi_0 \circ \underbrace{t_{-\vec{v}}(\vec{v})}_{\vec{0}}}_{\vec{0}}}_{\vec{v}} = \vec{v}$$

on a ce qu'on veut ssi

$$\psi(\vec{v}) = \vec{v} = \varphi_0(\vec{v})$$

$$\iff \vec{v} \in \ker(\varphi_0 - I_d)$$

$\square$

Preuve du Thm 3.12 :

Soit $\varphi = t_{\vec{v}} \circ \varphi_0$

Comme $\mathbb{R}^n = \ker(\varphi_0 - I_d) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{W}$$

decomposition unique

$$\varphi = t_{\vec{V}+\vec{W}} \circ \varphi_0 = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{W}} \circ \varphi_0$$
$$= t_{\vec{V}} \circ \varphi'$$

Par la première prop :

$Fix(\varphi') =$ un sous espace affine de direction $\ker(\varphi_0 - Id)$

$(\varphi'_0 = \varphi_0)$

et par la même prop

$\varphi = t_{\vec{v}} \circ \varphi' = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$ admet des pts fixes ssi

$$\vec{u} \in \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d) \iff \vec{u} = \vec{w}$$

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{v}}_{\in \ker(\varphi_0 - I_d)} + \underbrace{\vec{w}}_{\in \mathrm{Im}(\varphi_0 - I_d)} \qquad \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \vec{u} \in \ker(\varphi_0 - I_d)^{\perp}$$

$$\iff \varphi = \varphi'.$$

$t_{\vec{v}}$ et φ' commutend par la 3^{eme} prop. $\square$