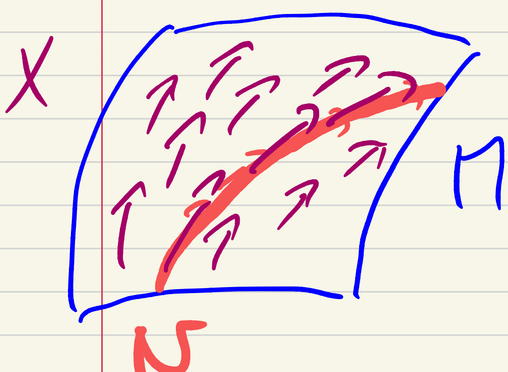
Variétés Riemanniennes, 5 Mai 2020

§ 4.2 Sous Variétés et 2ème forme fondamentale

Préliminaires Soit M une variété diff de dimension m et $N \subset M$ une sous-variété de dimension n $(2 \leq n < m)$.

Définition: Un champ de vecteurs $X \in \Gamma(M)$ est tangent à N si

$$X_p \in T_p N \quad , \quad \forall\, p \in N$$



On note $\Gamma(M, N)$ l'ensemble de ces champs.

Remarque

$$\Gamma(M, N) \subset \Gamma(M)$$

est un sous-module par l'algèbre $C^\infty(M)$.

$(i.e.\ X \in \Gamma(M,N),\ f \in C^\infty(M) \Rightarrow fX \in \Gamma(M,N))$

Lemme Soit $X \in \Gamma(M)$, alors

① $X \in \Gamma(M, N)$ ssi

$$X_p(f) = 0, \quad \forall p \in N \text{ et } f \in C^\infty(M)$$

qui est constante sur N.

② Si $X, Y \in \Gamma(M, N)$ alors

$$[X, Y] \in \Gamma(M, N).$$

③ L'application de restriction

$$\Gamma(M, N) \longrightarrow \Gamma(N)$$

est surjective.

Preuve ① Soit $X \in \Gamma(M, N)$, $p \in M$

et $f : M \to \mathbb{R}$ qui est constante sur N.

le vecteur $X_p \in T_pM$ appartient à T_pN

Donc on peut choisir une courbe C^1

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ t.q. $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X_p$

Alors

$$\Rightarrow \quad X_p(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$$

car $\gamma(t) \in N$ $\forall t$, $f : N \to \mathbb{R}$ est contant.

Par démontrer la réciproque, on choisit un système de coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ dans un voisinage $U \subset M$ de $p \in N$ telles que

$$q = (x^1, \ldots, x^m) \in N \cap U$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{n+1} = x^{n+2} = \ldots = x^m = 0.$$

(on dit que $(x^1, \ldots, x^m)$ sont des coordonnées adaptées à la sous-variété).

Soit $X \in \Gamma(M)$ tel que $X_p(f) = 0$ $\forall p \in N$ et f est constante sur N

Dans le voisinage on peut écrire

$$X = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Mais si $j > n = \dim(N)$ alors

$$a^j = X(x^j) = 0$$ (car $x^j = 0$ est constante sur $N \cap U$)

Donc

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$ est bien un champ de $\Gamma(M, N)$

(car $\forall p \in N \cap U$ on a

$$T_p N = \mathrm{Span}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right).$$

② Se déduit de ①: Si $X, Y \in \Gamma(M,N)$ et $f \in C^\infty(M,N)$ constante sur N $\Rightarrow$

$$[X,Y]_p(f) = X(\underbrace{Y(f)}_{=0}) - Y(\underbrace{X(f)}_{=0})$$

$$= 0 \quad (\text{en tout } p \in N).$$

(3) la restriction $\Gamma(M, N) \to \Gamma(N)$ est surjective car si $p \in N$ et $(x^1, \dots, x^m)$ des coordonnées dans un voisinage $U \subset M$ de p adaptée à la sous-variété. Alors pour tout

$$X \in \Gamma(N \cap U)$$

on peut écrire

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

ce champ est alors défini dans U (avec la même formule) ce qui montre la surjectivité

$$\Gamma(M \cap U, N \cap U) \longrightarrow \Gamma(N \cap U).$$

On conclut par un argument de partition de l'unité

#

Soit maintenant une métrique riemannienne g sur M. On définit

① $\bar{g} = g|_N$ $\left(\text{i.e. } \bar{g} = g|_{TN \times TN} \right)$

$=$ "première forme fondamentale" de $N \subset (M, g)$

Remarque $\bar{g}$ est une métrique riemannienne sur N.

② $\pi_p^T : T_p M \to T_p N$, $\pi_p^\perp : T_p M \to T_p N^\perp$

les projections tangentielles et orthogonales associées à $T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp$ $(\forall p \in N)$

On note aussi $X^T = \pi^T(X)$, $X^\perp = \pi^\perp(X)$ $\forall X \in T_p M$

③ $\bar{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^T = \pi^T(\nabla_X Y)$

$\forall X, Y \in \Gamma(M, N)$

④ $\mathbb{I}(X,Y) = (\nabla_X Y)^{\perp} = \pi^{\perp}(\nabla_X Y)$

$\mathbb{I} : T_pN \times T_pN \to T_pN^{\perp}$

s'appelle la 2^{e} forme fondamentale de $N \subset M$.

Noter que

$$\boxed{\nabla_X Y = \underbrace{\bar{\nabla}_X Y}_{\in TN} + \underbrace{\mathbb{I}(X,Y)}_{\in TN^{\perp}}}$$

(ici, $X, Y \in \Gamma(M,N)$ en $p \in N$)

<u>Lemme 1</u> $\bar{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita de $(N, \bar{g})$.

<u>Preuve</u> ① $\bar{\nabla}$ est sans torsion : Soient $X, Y \in \Gamma(N)$. On étend X, Y en des champs de $\Gamma(M, N)$

alors

$$\left(\bar\nabla_X Y - \bar\nabla_Y X\right)_p = \pi_p^T\left(\bar\nabla_X Y - \bar\nabla_Y X\right)$$

$$= \pi_p^T\left([X,Y]\right)$$

$$= [X,Y]_p$$

$\forall p \in N$ (car on a vu que si $Y, X \in \Gamma(\Pi, N) \Rightarrow [X,Y] \in \Gamma(\Pi, N)$.

② $\bar\nabla$ est compatible avec $\bar g$

On se donne $X, Y, Z \in \Gamma(N)$, on étend ces champs à $\Gamma(\Pi, N)$, alors $\forall p \in N$ on a

$$Z(\bar g(X,Y))_p = Z(g(X,Y))_p =$$

$$= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

$$= g(\bar\nabla_Z X + \mathrm{II}(Z,X), Y) + g(X, \bar\nabla_Z Y + \mathrm{II}(Z,Y))$$

$$= g(\bar{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \bar{\nabla}_Z Y)$$
$$+ g(B(Z,X), Y) + g(X, B(Z,Y))$$

on évalue cette idetité en $p \in N$

$(\Rightarrow X_p, Y_p, Z_p \in T_p N)$

$$\Rightarrow \quad g(B(Z,X), Y) = 0 = g(X, B(Z,Y))$$

et $\quad \bar{\nabla}_Z X \in T_p N, \quad Y \in T_p N$

$$\Rightarrow \quad g(\bar{\nabla}_Z X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_Z X, Y)$$

de même $\quad g(X, \bar{\nabla}_Z Y) = \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Z Y)$

Finalement

$\Rightarrow$
$$Z\bar{g}(X,Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_Z X, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Z Y)$$

$\Rightarrow \quad \bar{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita de (N, g)

#

Lemme 2 ① $\mathbb{I}$ est tensoriel (i.e. $C^\infty(N)$ bilinéaire)

② $\mathbb{I}_p : T_pN \times T_pN \to T_pN^\perp$ est bien définie (ne dépend pas de l'extension des vecteurs en champs de vecteurs).

③ $\mathbb{I}$ est symétrique $\mathbb{I}(X,Y) = \mathbb{I}(Y,X)$.

Preuve: ① $\mathbb{I}$ est clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire

à voir $\mathbb{I}(fX,Y) = \mathbb{I}(X,fY) = f\,\mathbb{I}(X,Y)$

$\forall f \in C^\infty(M)$.

On a

$$\mathbb{I}(fX,Y) = \pi^\perp(\nabla_{fX} Y) = \pi^\perp(f\nabla_X Y)$$

$$= f\cdot \pi^\perp(\nabla_X Y) = f\cdot \mathbb{I}(X,Y)$$

et

$$\mathbb{I}(X,fY) = \pi^\perp(\nabla_X(fY)) = \pi^\perp(f\nabla_X Y + X(f)\cdot Y)$$

$$= \pi^\perp(f\nabla_X Y) + \underbrace{\pi^\perp(X(f)\cdot Y)}_{=0 \text{ car } Y\in T_pN}$$

$$= f\,\pi^\perp(\nabla_X Y)$$

$$= f \cdot \pi^{\perp}(\nabla_X Y) = f\, B(X,Y).$$

on a prouvé que B est $C^\infty(N)$ bilinéaire.

② Pour voir que $B_p(X,Y)$ ne dépend que de $X, Y \in T_pN$ on se donne des coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$ dans un voisinage de $p \in N$ adaptées à N.

alors on définit $B_{ij}^k(x)$ par

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}$$

(par $i,j = 1, \dots, n$)

et alors, par ① on a par

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\Rightarrow \quad B_p(X,Y) = \sum_{i,j,k} a^i b^j \cdot B_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

ne dépend que a^i, b^i en p.

③ $\mathrm{II}(X,Y) - \mathrm{II}(Y,X) = \pi^{\perp}(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$

$$= \pi^{\perp}([X,Y])$$

$$= 0.$$

car

$$X, Y \in \Gamma(M, N) \Rightarrow [X,Y] \in \Gamma(M, N)$$

$$\Rightarrow [X,Y]_p \in T_pN = \mathrm{Ker}(\pi^{\perp})$$

#

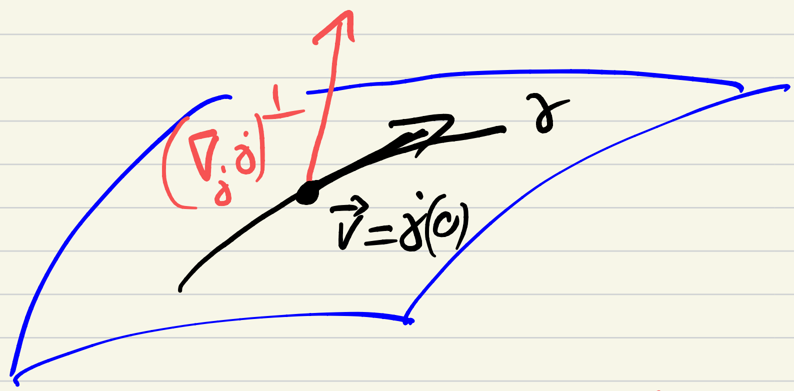
Interpretation de II :

Si $v \in T_pN$ alors $\mathrm{II}(v,v)$ admet l'interpretation suivante : Par toute courbe $\gamma : (-\varepsilon, -\varepsilon) \to N$ tq $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = v$ on a

$$\mathrm{II}(v,v) = \mathrm{II}(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) = \left(\nabla_{\dot{\gamma}(0)} \dot{\gamma}(0) \right)^{\perp}$$

= composante orthogonale de l'accélération covariante en particulier : $(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)^{\perp}$ ne dépend que de $v = \dot\gamma(0)$ (si $\gamma(t) \in N, \forall t$).

M



N

$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ ne dépend que de $v = \dot\gamma(0)$ et pas de la paramétrisation de γ

Ainsi Si $\gamma(t)$ est une géodésique de $(N, \bar g)$ alors en général $\gamma(t)$ n'est pas géodésique de M.

et

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = B(\dot\gamma, \dot\gamma)$$

(car γ géodésique de $N \Rightarrow \bar\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \Rightarrow \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = B(\dot\gamma, \dot\gamma)$)

Définition La sous-variété $N \subset (M, g)$ est **totalement géodésique** si

Pour toute courbe $\gamma : I \to N$ on a

γ géodésique de $N \Rightarrow \gamma$ géodésique de M

(**Remarque**: $\Leftarrow$ est toujours vraie).

Exemples ① Si $M = \mathbb{R}^n$, g = métrique standard alors $N \subset M$ est totalement géodésique $\Leftrightarrow$ N est un sous-espace affine.

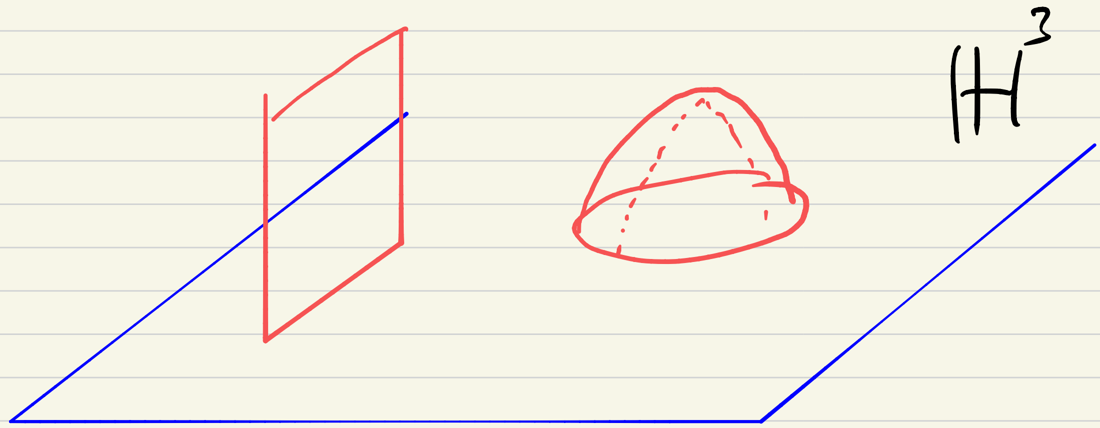
② Si $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avec g = métrique canonique

$\Rightarrow$ N est totalement géodésique

$\Leftrightarrow$ $N = S^n \cap W$

avec $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un sous-espace vectoriel.

③ Si $\mathbb{H}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0 \}$ alors les sous-variétés tot. géodésiques sont les $\frac{1}{2}$ plans verticaux et les $\frac{1}{2}$ sphères centrées sur $\partial \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}$



Proposition $N \subset (M, g)$ est totalement géodésique

$$\iff B \equiv 0$$

Preuve Si γ géodésique de N alors γ est aussi une géodésique de $M \iff$

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = B(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0 \qquad \#$$