5.1. Dans le demi-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique, expliciter l'application de transport parallèle le long d'un horocycle (une courbe de la forme $\gamma(t) = (t, c)$ où c est une constante).

Solution. Soient $p_0 = (0, c)$ et $p_1 = (T, c)$ deux points sur la curbe γ, avec $x_0 \leq x_1$. On doit faire le transport parallèle d'un vecteur quelconque $v_0 \in T_{p_0}\mathbb{H}^2$ et obtenir un vecteur $v_1 \in T_{p_1}\mathbb{H}^2$. On cherche une formule qu'exprime v_1 en fonction de v_0.
Pour commencer on considère un champs quelconque $V = V(t)$ le long de γ ; on l'écris

$$V(t) = v_x(t)\,\partial_x + v_y(t)\,\partial_y$$

et on calcule sa dérivée covariante $\frac{DV}{\mathrm{d}t}$ (aussi denotée ∇V ou $\nabla_{\gamma'}V$),

$$\begin{aligned} \frac{D}{\mathrm{d}t}V &= \frac{D}{\mathrm{d}t}(v_x\,\partial_x) + \frac{D}{\mathrm{d}t}(v_y\,\partial_y) \\ &= v_x'\,\partial x + v_x\nabla_{\gamma'}\partial_x + v_y'\,\partial_y + v_y\,\nabla_{\gamma'}\partial_y \\ &= v_x'\,\partial x + v_x\nabla_{\partial_x}\partial_x + v_y'\,\partial_y + v_y\,\nabla_{\partial_x}\partial_y \\ &= v_x'\,\partial x + v_x c\,\partial_y + v_y'\,\partial_y + v_y\,(-c)\partial_x \\ &= (v_x' - c\,v_y)\partial x + (v_y' + c\,v_x)\partial_y. \end{aligned}$$

Ici on a utilisé les symboles de Christoffel calculés précédement.
Le champs est parallèle ($\frac{DV}{\mathrm{d}t} = 0$) si

$$\begin{aligned} v_x' &= c\,v_y \\ v_y' &= -c\,v_x. \end{aligned}$$

Ce système d'équations à comme solutions

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -a\cos(ct) + b\sin(ct) \\ v_y(t) &= a\sin(ct) + b\cos(ct) \end{aligned}$$

où $a, b, \in \mathbb{R}$ son constants. Cela definit un champs $V(t)$ où $V(0) = a\partial_x + b\partial_y \in T_{p_0}\mathbb{H}^2$. Donc

$$\begin{aligned} \text{si} \quad & v_0 = a\,\partial_x + b\,\partial_y, \\ \text{alors} \quad & v_1 = (-a\cos(cT) + b\sin(cT)\,\partial_x + (a\sin(cT) + b\cos(cT))\,\partial_y. \end{aligned}$$

$\square$

5.2. Soit M une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$. Si X et Y sont des champs tangents a M, on definit $\nabla_X Y =$ la composante tangente à M de la dérivée de Y dans la direction X. Montrer que ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique Euclidienne sur M.

Solution. En fait on peut montrer que si M est une n-sous-variété d'une k-variété riemannienne $\overline{M}$, et ∇ de M est la partie tangente de la connexion de Levi–Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$, alors ∇ est la connexion de Levi-Civita de M.

Plus précisement, pour chaque paire de champs $X, Y \in \Gamma(M)$, on definit $\nabla_X Y$ comme suit. On étend X, Y a deux champs $\overline{X}$, $\overline{Y}$ définis sur $\overline{M}$, et on définit

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top,$$

où $(-)^\top$ dénote la projection orthogonal sur TM. Cette formule permet d'utiliser les propriétés de $\overline{\nabla}$ pour en déduire proprietés similaires de ∇. Comme ça on peut montrer que ∇ est une connexion ; on omet les détails.

Note : Pour étendre un champs X de M à $\overline{M}$ localement, on peut utiliser un système de réferences adapté à M, cela veut dire que dans ce système M est la variété horizontal ($x^i = 0$ pour $i \geq n$). On definit $\overline{X}(\overline{p}) := X(p)$, où p est la projection vertical de $\overline{p}$ sur M.

Pour prouver que ∇ est symmetrique on doit montrer que la torsion $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ est nulle pour chaque paire de champs X, Y. On sait que la torsion est un tenseur, donc dans chaque point $p \in M$, la valeur $T(X, Y)|_p$ dépend juste des valeurs $X|_p$ et $Y|_p$. Cela implique que pour montrer que $T(X, Y)|_p = 0$, on peut supposer que les champs X, Y commutent, et leus extensions $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ commutent aussi. Si non, on les remplace par des champs avec composants constants (dans le système de réference adapté), en préservent leurs valeurs en p. Après ce remplacement on sait que les champs commutent. Comme ça c'est facile de calculer

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}\right)^\top = 0^\top = 0.$$

Finalement, c'est facile à demontrer que ∇ est compatible avec la métrique. Alternativement, on peut montrer que les géodésiques de ∇ sont les géodésiques de M ; cela implique que ∇ est la connexion de Levi–Civita selon l'exercice que suit. On va faire ça.

Une courbe γ dans M est géodésique si et seulement si elle est extremal *pour les variations dans* M du fonctionnel $I = I(\gamma) = \int \frac{1}{2} \|\gamma'\|^2 \, \mathrm{d}t$. On a la formule de variation première

$$\delta I = -\int \left\langle \overline{\gamma''}, \delta\gamma \right\rangle \, \mathrm{d}t$$

où $\overline{\gamma''}$ est l'acceleration de γ dans $\overline{M}$. Alors γ est extremal si et seulement si $\overline{\gamma''}$ est orthogonal à M, si et seulemement γ est géodésique de ∇. □

5.3. Soit ∇ une connexion symétrique dans une varieté Riemanniene (M, g) tel que les ∇-géodésiques sont des g-géodésiques. Montrer que ∇ est la connexion de Levi-Civita de g.

Solution. Soit $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita, et soit $A(X, Y) = \nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y$, pour $X, Y \in \Gamma(M)$. On doit montrer que $A = 0$. On sait que A est symmetrique :

$$A(X, Y) - A(Y, X) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - (\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X) = [X, Y] - [X, Y] = 0.$$

Alors pour prouver que $A = 0$ c'est suffisant de montrer que $A(X, X) = 0$ pour tout $X \in \Gamma(M)$, où, de façon équivalente, il faut montrer que $\nabla_X X = \widetilde{\nabla}_X X$, dans chaque point $p \in M$. On fixe p et on prends une géodésique $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ avec vitesse initial $\gamma'(0) = X|_p$. Remarquer que γ est géodésique pour les deux connexions, donc dans un système de coordonnées quelconque, elle satisfait deux équations géodésiques

$$\gamma''^i = -\Gamma^i_{jk} \gamma' i \gamma' j \quad \text{et} \quad \gamma''^i = -\widetilde{\Gamma}^i_{jk} \gamma' i \gamma' j.$$

Comme $\gamma'(0) = X|_p$, cela montre que $\Gamma^i_{jk} X^i X^j = \widetilde{\Gamma}^i_{jk} X^i X^j$, et par conséquent $\nabla_X X = \widetilde{\nabla}_X X$. □

5.4. On considère un cercle parallèle à l'équateur de la sphère $\mathbb{S}^2$. Calculer l'holonomie le long de cette courbe.
(Conseil : Introduire le cône de $\mathbb{R}^3$ tangent à la sphere le long de la courbe considérée.)

Solution. Dans la sphère unitaire S^2 on considère le cercle S determiné par l'équation $z = \cos\theta$ et parametré par

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\sin\theta\, \cos t, \sin\theta\, \sin t, \cos\theta).$$

Soit $V = V(t)$ un champs définit le long de γ. Pour calculer la dérivée covariante $\frac{D}{\mathrm{d}t}V$ on utilise l'exercice **5.2**, selon lequel

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}V = (V')^\top,$$

où V' est la dérivée de V en tant que fonction $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ et $(V')^\top$ est sa composent tangent à la sphère S^2. Alors V est parallèle si et seulement si V' est orthogonal à las sphère. Cela montre que on peut remplacer la sphère S^2 par une autre surface M qui soit tangent à S^2 le long du cercle S ; on obtient le même transport parallèle dans le deux surfaces. Soit M le cône tangent à S^2 le long de S. Alors c'est facile de faire le transporte parallèle le long de M parce que M est localement isométrique au plan Euclidien ; on omet le calcul. □

5.5. **Géodésiques dans les modèles de courbures constantes**

(a) Quelles sont les géodésiques de l'espace euclidien ?

(b) i. Les coordonnées sphériques de la sphère $\mathbb{S}^2$ sont données par l'application

$$(x, y, z) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

Exprimer la métrique ronde de $\mathbb{S}^2$ dans ces coordonnées. Puis calculer les symboles de Christoffel. En déduire enfin que les méridiens $((\theta(t), \varphi(t) = (\theta_0, t))$ sont des géodésiques.

ii. On s'intéresse maintenant au cas général de la sphère ronde $\mathbb{S}^n$. Soit

$$\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_{n+1}(t))$$

une géodésique partant du pôle nord et de vitesse initiale $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Montrer que cette géodésique est un grand cercle. En déduire une description de toutes les géodésiques de la sphère.

Solution. La courbe γ avec $x_{n+1} = \cos(t)$, $x_1(t) = \sin t$, $x_i(t) = 0$ si $i = 2, ..., n$ est une géodésique. La preuve est similaire à celle dans le cas de la courbe (x_0, e^{at}) dans le plan hyperbolique ; voir ci-dessous. Les autres géodésiques peuvent être obtenus de γ par rotations. □

Indication : On pourra utiliser le fait que le groupe d'isométries de la sphère $\mathbb{S}^n$ est le groupe $O_{n+1}(\mathbb{R})$.

(c) On cherche maintenant les géodésiques du demi-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique.

i. Prouver que les courbes de la forme

$$\gamma(t) = (x_0, e^{at})$$

sont des géodésiques.

Solution. La fonction e^{at} a été choisi pour obtenir une paramétrage à vitesse constante de la ligne vertical, ie, avec $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$. En dérivant on obtient $\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 1$, donc γ'' est un vecteur à composante verticale nulle. Mais la composante horizontale doit être nulle aussi parce que la métrique et la courbe son symmetriques par raport à la ligne $x = x_0$. On conclut que $\gamma'' = 0$, donc γ est une géodésique. Rémarquer aussi que le groupe d'isométries du plan de Poincaré agit transitivement sur les paires (x, v) où $x \in H^2$ et $v \in T_x H^2$ avec $\|v\| = 1$. Cela implique que toutes les autres géodésiques à peuvent être obtenues comme images des géodésiques γ. $\square$

ii. On appelle "cercle généralisé" une courbe de $\mathbb{R}^2$ qui est soit une droite, soit un cercle. Montrer que le groupe des homographies

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ & z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

envoie tout cercle généralisé sur un cercle généralisé.

Solution. Le groupe d'homographies est généré par des homothéties et l'inversion, et cettes deux types de transformation préservent les cercles. $\square$

iii. Montrer aussi qu'une homographie conserve les mesures des angles.

Solution. Toute fonction holomorphe préserve les angles. $\square$

iv. En déduire que les géodésiques du plan hyperbolique sont des droites verticales ou des demi-cercles orthogonaux au bord, paramétrés à vitesse constante.

5.6. (a) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le gradient de f par le champ de vecteurs $\mathrm{grad} f \in \Gamma(M)$ tel que $\langle \mathrm{grad} f, X \rangle = \mathrm{d}f(X) = X(f)$ pour tout $X \in \Gamma(M)$. Calculer l'expression du gradient en coordonnées.

Solution.
Le gradient $\nabla f \in \Gamma(M)$ doit satisfaire l'équation $\mathrm{d}f(X) = \langle \nabla f, X \rangle$ pour tous les champs $X \in \Gamma(M)$. On écrit $X = a^i \partial_i$ et $\nabla f = b^j \partial_j$ (où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$) et on calcule :

$$\mathrm{d}f \cdot X = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k \right) \cdot (a^i \partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x^k} \delta_i^k a^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} a^i$$

$$\langle \nabla f, X \rangle = \langle b^j \partial_j, a^i \partial_i \rangle = g_{ij} b^j a^i$$

Cettes expressions doivent avoir la même valeur pour tous les choix de champs $X = a^i \partial_i$, donc pour toutes les $(a^i)_i \in \mathbb{R}^n$. Cela implique que

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = g_{ij} b^j.$$

En multipliant par la matrice inverse de la métrique, on obtient

$$g^{ki} \frac{\partial f}{\partial x^i} = g^{ki} g_{ij} b^j = \delta_j^k b^j = b^k.$$

Alors $\nabla f = b^k \frac{\partial}{\partial x^k} = g^{ki} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$. $\square$

(b) Soit $Y \in \Gamma(M)$ un champ de vecteurs, alors la divergence de Y est donnée par la fonction lisse $\mathrm{div}(Y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ définie par $\mathrm{div}(Y) = \mathrm{Trace}(\nabla Y)$ où $\nabla Y : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est donnée par $\nabla Y(X) = \nabla_X Y$. Calculer l'expression de la divergence en coordonnées.

Solution. Si $Y = b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, alors

$$\nabla_j Y := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y = \underbrace{\left(\frac{\partial b^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} b^k \right)}_{=:(\nabla_j Y)^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$$\mathrm{div}(Y) = \mathrm{Trace}(\nabla Y) = (\nabla_i Y)^i = \frac{\partial b^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} b^k.$$

□

(c) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le laplacien de f par la fonction $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$. Calculer l'expression du laplacien en coordonnées.

Solution. Le Laplacien d'une fonction f est $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$. En coordonnées :

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

Remarque. On a par ailleurs la formule suivante :

$$\sum_j \Gamma^j_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \log(\sqrt{|g|}) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

où $|g| = \det(g_{i,j})$. On peut donc aussi écrire

$$\mathrm{div}(Y) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot b^i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^i} + \sum_j \frac{\partial \log(|g|)}{\partial x^j} \cdot b^j \right).$$

et

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

□

(d) Remarquer que si $M = \mathbb{R}^n$, les concepts de gradient, divergence et laplacien correspondent à ce que vous avez appris en deuxième année.

Solution. Dans $\mathbb{R}^n$ avec la métrique Euclidienne on a $g_{ij} = \delta_{ij}$ et les symboles de Christoffel sont nuls donc on retrouve les formules connues. □