EPFL - Printemps 2020	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 8 – avec solutions	8 mai 2020

8.1. Une courbe $\gamma : [0,\infty) \to M$ est *divergente* si pour tout compact $K \subset M$ il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a $\gamma(t) \notin K$. Montrer qu'une variété riemannienne (M, g) est complète si et seulement si toute courbe divergente est de longueur infinie.

Solution. $\Rightarrow$: Soit M complète et $\gamma : [0, +\infty)$ une courbe divergente. Par le théorème de Hopf-Rinow, on a que toute boule fermée est compacte, et donc si on considère $\bar{B}(\gamma(0), r)$, alors γ sort de cette boule, pour n'importe quel choix de $r > 0$, donc $\ell(\gamma) > r$ pour tout r et donc γ es de longueur infinie.

$\Leftarrow$: Soit M pas complète. Par le théorème de Hopf-Rinow, il existe une géodésique à vitesse unitaire $\gamma : [0, L) \to M$, avec $L < +\infty$, qu'on ne peut pas étendre au delà de L. On va montrer que γ est divergente mais de longueur finie. C'est claire que $\ell(\gamma) < \infty$ parce que $L < \infty$. Pour montrer que γ est divergente, soit $K \subseteq M$ un compact. On doit montrer qu'il exist un $T < L$ tel que $\gamma(t) \notin K$ si $t > T$. On suppose le contraire. Donc il y a une suite $(t_n)_n$ tel que $t_n \to L$ et $\gamma(t_n) \in K$, et on peut supposer que $\gamma(t_n) \to x \in K$. D'autre part, on voit dans la solution de l'exercice **??**, qu'il existe un $r > 0$ et un voisinage W de x tel que pour chaque $x' \in W$ l'application exponentielle $\exp_{x'}(v)$ est defini pour chaque v de norme $\|v\| < r$. Cela montre que toute géodésique à vitesse unitaire qui visite W peut être continuée pendant un temps $\geq \frac{r}{2}$. Cela contradit le fait que γ ne peuve pas être étendu au delà de L. $\square$

8.2. Soit (M, g) une variété riemannienne et $x, y \in M$ deux points de M. Supposons qu'il existe deux géodésiques minimisantes distinctes γ_1, γ_2 reliant x à y. Montrer qu'aucune de ces géodésiques n'est minimisante après le point y.

Solution. Soit $r = d(x, y)$, et soient $\gamma_i : [0, r + \varepsilon] \to M$ courbes differentes, à vitesse unitaire, telles que $\gamma_i(0) = x$ et $\gamma_i(r) = y$. Les courbes ne peuvent pas avoir le même vecteur vitesse finale $\gamma_0'(r) = \gamma_1'(r)$, parce que dans ce cas-là il seraient égales. Alors on suppose que γ_0 est minimal dans l'intervalle $[0, r + \varepsilon]$. Soit $z = \gamma_0(r + \varepsilon)$. Alors $d(x, z) = r + \varepsilon$. La courbe C^1 par morceaux $\gamma_1|_{[0,r]} * \gamma_0|_{[r,r+\varepsilon}$ à la même longueur $r + \varepsilon$. Mais elle est pas différentiable, donc elle peuve pas être minimial. Cela montre qu e en fait $d(x, z) < r + \varepsilon$, et cela contredit l'hypothèse de minimalité de γ_0. $\square$

8.3. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Montrer que

(a) Il existe un nombre $r > 0$, appelé *rayon de normalité*, tel que pour tout point $p \in M$, l'exponentielle $\exp_p : B_p(0) \subseteq T_pM \to M$ est injective et réguliere.

Solution. On considère l'application

$$E : \begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & M \times M \\ (p, v \in T_pM) & \longmapsto & (p, q = \exp_p(v)) \end{array}$$

On va montrer elle est un diffeomorphisme local dans chaque point $(p, 0)$. À cette fin il suffit de montrer que sa différentielle $\mathrm{d}E_{(p,0)}$ dans le point $(p, 0)$ est un isomorphisme. Pour calculer la différentielle on prends un système de coordonnées locales $(x_i)_i$ et on écrit $p = (p_i)_i$, $v = (v_i)_i = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $q = (q_i)_i$. Alors la matrice jacobienne est

$$[\mathrm{d}E_{(p,0)}] = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right)$$

où n est la dimension de M et I_n est la matrice identité $n \times n$. Cette matrice est inversible, donc E est un diffeomorphisme local. Cela veut dire que il existe un voisinage ouvert U de p tel que $E(U)$ est ouvert et $E : U \to E(U)$ est un diffeomorphisme. En fait, on peut prendre l'ouvert U sous la forme

$$U = U_{W,r} = \{(p', v) \mid p \in W, v \in T_pM \text{ tel que } \|v\| < r\}$$

où $W \subseteq M$ est un voisinage ouvert de p et $r > 0$. Comme M est compacte, on peut recouvrir tous les points $(p, 0)$ avec une quantité finie d'ouverts U_{W_i,r_i}. Alors $r = \min_i r_i$ est un rayon de normalité pour M. □

(b) Pour tout paire de points $x, y \in M$ à distance $d(x, y) < r$ il y a exactement une géodésique minimisante de x à y.

Solution. On fixe x. Soit $B_x^r = \{v \in T_xM : \|v\| < r\}$. Dans l'ouvert $U_r = \exp_x(B_x^r)$ on définit une fonction $f(y) = \left\|\exp_x^{-1}(r)\right\|$. Après on doit montrer que le gradient ∇f est le champs radial unitaire et appliquer l'exercice 3a de la série 6plus. Pour plus de détails voir les livres de do Carmo ou de Lee. □

(c) Toute courbe fermée de longeur $< 2r$ est contractible.

Solution. Soit γ une courbe fermé de longueur $< 2r$. Pour chaque point $p \in \gamma$, l'entourage $B(p, r)$ est diffeomorphe à un disque. Comme $\gamma \subseteq B(x, r)$ elle est contractible. □

8.4. Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte. Montrer que dans chaque classe d'homotopie non triviale $\mathcal{C}$, il existe une géodésique fermée lisse dont la longueur est minimale dans $\mathcal{C}$.

Solution. Soit L la longueur infimum dans la classe d'homotopie, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2\frac{L}{n} < r$, où $r > 0$ est un rayon de normalité (cf. exercice **??**). Dans la classe d'homotopie $\mathcal{C}$, on considère une suite de courbes fermés $\gamma^k : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$ parametrées à vitesse constante et de longueur $L_k \to L$. Soit $t_i = \frac{i}{n}$ $(i \in \mathbb{Z}_n)$ soit $p_i^k = \gamma^k(t_i)$. On peut supposer que pour chaque i la suite p_i^k converge à un point p_i. Pour k assez grand, chaque courbe $\gamma_i^k = \gamma_i|_{[t_i,t_{i+1}]}$ a longueur $\frac{L_k}{n} < \frac{r}{2}$, donc $d(p_i, p_{i+1}) \leq \frac{L}{n} < \frac{r}{2}$. Soit γ_i la géodésique minimisante de p_i à p_{i+1}, et soit $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$ la courbe defini par $\gamma_{[t_i,t_{i+1}]} = \gamma_i$. Remarquer que elle est C^1 par morceaux et que sa longueur est $\leq L$. On va montrer que γ est dans la classe $\mathcal{C}$ et qu'elle est géodésique.
Pour prouver la première affirmation on prends k de façon que $d(p_i^k, p_i) < \frac{r}{2}$, et on rélie p_i à p_i^k par une courbe β_i^k de longueur $< \frac{r}{2}$. Á l'aide de l'exercice **??** on montre que $\gamma_i * \beta_{i+1} \simeq \beta_i \gamma_i^k$, et ça implique que $\gamma \simeq \gamma^k$.
Pour prouver la seconde affirmartion on doit montrer que la vitesse finale de chaque courbe γ_i coincide avec la vitesse initiale de γ_{i+1}. Si cela n'est pas le cas, on remplace dans γ le morceau $\gamma_i * \gamma_{i+1}$, de longueur $< r$, pour la géodésique minimisante de p_i at p_{i+1}. On obitent donc une courbe homotopique et encore plus courte que γ, ce qui est absurde. □