

10.1. Prouver sans calcul que la sphère, l'espace Euclidien et l'espace hyperbolique ont une courbure sectionnelle constante

Indication : Montrer que pour tout $p \in M$, le groupe des isométries de (M, g) qui fixent p agit transitivement sur l'espace des 2-plans $\Pi \subset T_p M$.

10.2. Soit $N \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface, soit $p \in N$ et soit $P \ni p$ un plan différent du plan tangent $T_p N$. Calculer la courbure de la courbe $P \cap N$ dans le point p en termes de la deuxième forme fondamentale de N et les orientations des plans P et $T_p N$.

10.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit $N \subseteq \mathbb{R}^3$ son graphe. Calculer la deuxième forme fondamentale dans un point p où $d_p f = 0$ en termes des dérivées secondes de f .

10.4. Soit M une variété munie d'une connexion affine ∇ et $\alpha \in \Omega^1(M)$. On rappelle que la différentielle extérieure de α est le 2-tenseur antisymétrique défini par : $d\alpha(X, Y) = X \cdot (\alpha(Y)) - Y \cdot (\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$.

i) Montrer que α est fermée (i.e. $d\alpha = 0$) si et seulement si $\nabla\alpha$ est un 2-tenseur symétrique.

ii) Soit f une fonction lisse. On définit la Hessienne de f par :

$$\text{Hess}_f(X, Y) = \nabla df(X, Y).$$

Montrer que Hess_f est symétrique.

iii) Montrer l'égalité suivante : $\text{Hess}_f(X, Y) = g(\nabla_X \text{grad} f, Y)$.

iv) Trouver les composantes de Hess_f en coordonnées locales.

10.5. (*Métrique produit*) Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit de deux variétés Riemanniennes, muni de la métrique produit $g = g_1 \oplus g_2$. (g_i est une métrique Riemannienne sur M_i et $g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$ où X_i et Y_i sont tangents à M_i). On note R_i le tenseur de courbure de (M_i, g_i) .

i) Calculer le tenseur de courbure R de g en fonction de R_1 et R_2 .

ii) Même question pour la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

iii) Montrer qu'une métrique produit ne peut pas avoir une courbure sectionnelle positive ou négative. Est-il possible d'avoir une courbure de Ricci positive ou négative ?

10.6. Exprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionnelle de g .

10.7. Soit p un point quelconque d'une variété Riemannienne (M, g) et $\Pi \subset T_p M$ un 2-plan (= sous-espace vectoriel de dimension 2). Soit Ω un voisinage de $0 \in T_p M$ pour lequel l'exponentielle au point p est bien définie et est un difféomorphisme sur son image. Notons aussi $S = \exp_p(\Omega \cap \Pi)$. Alors S est une surface dans M et on note \bar{g} la métrique induite par le plongement $S \subset M$. Quelle est la valeur de

$$\bar{K}_p(\Pi) - K_p(\Pi)$$

où K est la courbure sectionnelle de (M, g) et \bar{K} est la courbure sectionnelle de (S, \bar{g}) ?