Série 11

Reprise des Exercices 9, 10, 11, 12 de la Serie 9

On pourra utiliser les resultats de l'exercice 7 de la serie 9.

Exercice 9. Soit φ et ψ deux isometries affines de parties lineaires φ_0 et ψ_0.

1. Montrer que si φ est d'un certain type (translation, rotation, vissage, symetrie centrale, axiale, planaire, glissee, anti-rotation) alors la conjuguee

$$\varphi' = \mathrm{Ad}(\psi)(\varphi) = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

   est du meme type.
2. Montrer qu'en cas de rotation, anti-rotation ou vissage, l'angle est preserve au signe pres (si l'angle est le nombre complexe de module 1, z le nouvel angle sera $z^{\pm 1}$; ou si l'angle est exprime en radians $\theta \pmod{2\pi}$ le nouvel angle sera $\pm\theta \pmod{2\pi}$). Calculer l'axe de φ' en fonction de ψ et de l'axe de φ.
3. En general, quels sont les points fixes de φ' en fonction de ψ et de ceux de φ.

Exercice 10. Soit φ la transformation affine

$$\varphi(x, y, z) = (X, Y, Z)$$

avec

$$X = \frac{1}{9}(x - 8y + 4z) - 1$$

$$Y = \frac{1}{9}(4x + 4y + 7z) + 2$$

$$Z = \frac{1}{9}(-8x + y + 4z) + 2.$$

1. Determiner la nature de φ.

2. Meme question pour $\psi(x,y,z) = (X', Y', Z')$ avec

$$X' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 1$$

$$Y' = \frac{1}{3}(2x + y - 2z) - 1$$

$$Z' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) - 1.$$

3. Determiner la nature de $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$.

Exercice 11. 1. Determiner la matrice dans la base canonique de la rotation lineaire r d'angle $\pi/6$ et d'axe $\mathbb{R}(1,1,1)$.

2. Soit l'isometrie affine $r' = t_{(1,0,-1)} \circ r$. Quelle est la nature de r', ces eventuels points fixes et calculer $(r')^{2018}$.
3. Meme question pour $r'' = t_{(2,2,2)} \circ r$.

Exercice 12 (Exercice 2 Examen 2019)**.** Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. On considère la transformation de l'espace donnée dans la base canonique par $\varphi(x,y,z) = (X, Y, Z)$ avec

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{d}(2x - 2y + az) + 1 \\ Y &= \frac{1}{d}(x + by + 2z) + e \\ Z &= \frac{1}{d}(cx - y + 2z) + f \end{aligned}$$

1. Décrire l'ensemble des $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^5$ tels que φ est un vissage.
2. Même question en demandant que φ soit une anti-rotation.
3. Si φ n'est pas un vissage montrer que $\varphi^6 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Engendrement des isometries par les symetries hyperplanes

Dans $\mathbb{R}^n$, soit $\vec{v} \neq 0$ un vecteur non-nul. On rappelle que l'application lineaire

$$s_{\vec{v}} : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \to \vec{u} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v} \tag{0.1}$$

est une isometrie non-speciale : la symetrie par rapport a l'hyperplan $\vec{v}^{\perp}$. On dira que $s_{\vec{v}}$ est une symetrie hyperplane lineaire.

Une symetrie hyperplane affine (ou encore par rapport a un hyperplan affine) est une isometrie de la forme

$$s_{\vec{v},\vec{u}} := t_{\vec{u}} \circ s_{\vec{v}},\ \ \vec{u} \in \mathbb{R}^n.$$

On va montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$, le groupe des isometries lineaires de $\mathbb{R}^n$ est engendre par l'ensemble des symetries hyperplanes lineaires et ensuite que le groupe des isometries affines $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est engendre par les symetries hyperplanes affines (les composees d'une symetrie hyperplane lineaire et d'une translation).

Exercice 1. On commence avec les cas $n = 2, 3$

1. (Re)demontrer qu'une rotation lineaire de $\mathbb{R}^2$ se decompose en un produit de deux symetries lineaires.
2. Etant donne une rotation lineaire r de $\mathbb{R}^3$. En utilisant la question precedente, montrer qu'il existe une BON telle que la matrice de r dan cette base se decompose en produit deux symetries par rapport a des plans et que tout rotationest composee de deux symetries par rapport a des plans.
3. Montrer que tout isometrie non-speciale de $\mathbb{R}^3$ est composee d'une symetrie para rapport a une plan et d'une rotation et conclure que tout isometrie lineaire est composee de symetries (lineaires) planes.
4. Montrer que tout translation peut s'ecrire comme la composee de deux symetries hyperplanes (l'une pourra meme etre lineaire).

On passe au cas general. Pour cela on a besoin du resultat ci-dessous dont l'interet est independent de notre probleme.

Exercice 2. Dans cet exercice, on va realiser la reduction des isometries lineaires de $\mathbb{R}^n$, c'est a dire etant donne $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$, on va montrer l'existence d'une BON ou la matrice de φ est "simple" : diagonale par blocs avec des blocs de taille 1×1 ou 2×2.

Soit M la matrice de φ dans la base canonique. La matrice M appartient a $M_n(\mathbb{R})$ et on peut donc egalement la considerer comme une matrice a coefficients complexes.

1. On suppose que M possede une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ qui est NON-REELLE. Soit $\vec{v} \in \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\}$ un vecteur propre associe (si $\vec{v}$ est ecrit comme un vecteur colonne, on a $M.\vec{v} = \lambda.\vec{v}$). Montrer que $\overline{\lambda}$ est valeur propre de $\vec{v}$ de vecteur propre $\overline{\vec{v}}$ (ici $\bar{\cdot}$ designe la conjugaison complexe). Pour cela on utilisera le fait que M etant a coefficients reels on a

$$\overline{M} = M.$$

2. On considere les vecteurs (colonnes) a coefficients reels
$$\vec{x} = \Re\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \overline{\vec{v}}),\ \ \vec{y} = \operatorname{Im}\vec{v} = \frac{1}{2i}(\vec{v} - \overline{\vec{v}}) \in \mathbb{R}^n.$$
Montrer que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont non-nuls et orthogonaux et que le sous-espace (reel) qu'ils engendrent est stable par φ.
3. Montrer que (sous l'hypothese ou M possede une valeur propre non-reelle) il existe une BON $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de φ peut s'ecrire sous la forme
$$M_{\mathcal{B},\varphi} = \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & M_{n-2} \end{pmatrix}$$
avec $M_2 \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ une matrice 2×2 de rotation et $M_{n-2} \in O_{n-2}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de rang $n-2$. Quel est le determinant de M_{n-2} ?
4. Soit φ une isometrie lineaire generale, montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de φ est une matrice diagonale par blocs de la forme
$$M_{\mathcal{B},\varphi} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{r'} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M_{2,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M_{2,r''} \end{pmatrix}$$
avec $r + r' + 2r'' = n$ et les $M_{2,i},\ i = 1, \cdots, r''$ sont des matrices 2×2 de rotation.

Exercice 3. On traire le cas general.

1. Soit $s_{\vec{v}}$ la symetrie hyperplane definie en (0.1). Exhiber une BON dans laquelle la matrice de $S_{\vec{v}}$ est une matrice diagonale.
2. A l'aide de l'exercice precedent montrer que toute isometrie lineaire de $\mathbb{R}^n$ se decompose en produit d'au plus n symetries hyperplanes.
3. Montrer qu'une translation de $\mathbb{R}^n$ peut s'ecrire comme la composee de deux symetries hyperplanes affines (on peut meme choisir l'une d'elles lineaire).
4. En deduire que le groupe des isometries affines est engendre par l'ensemble des symetries hyperplanes (affines).

Groupe symetrique et symetries

Exercice 4. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, n\}$. On associe a toute permutation
$$\sigma : i \in \{1, \cdots, n\} \mapsto \sigma(i) \in \{1, \cdots, n\},$$

l'application $\mathbb{R}$-lineaire φ_σ, telle que

$$\forall i = 1, \cdots, n \ \varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

en d'autres termes pour $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$

$$\varphi_\sigma(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i e_{\sigma(i)}.$$

Cette application est unique.

1. Montrer que $\det \varphi_\sigma = \mathrm{sign}(\sigma)$.
2. Montrer que φ_σ est une isometrie et que l'application $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ est un morphisme de groupe a valeur dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$.
3. On suppose que $\sigma = (ij), \ i \neq j$ est une transposition. Quelle est la matrice de φ_σ et la nature de φ_σ (on pourra commencer par le cas $(ij) = (12)$).
4. Montrer que $(1, \cdots, 1) = \mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n$ est un vecteur invariant commun a tous les φ_σ.
5. Montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout σ, la matrice $M_{\mathcal{B},\varphi_\sigma}$ de φ_σ dans cette base est de la forme

   $$M_{\mathcal{B},\varphi_\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1,\sigma} \end{pmatrix}$$

   ou $M_{n-1,\sigma} \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ est un matrice orthogonale de rang $n-1$. Que vaut $\det M_{n-1,\sigma}$.
6. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe injectif

   $$\mathfrak{S}_n \hookrightarrow O_{n-1}(\mathbb{R}).$$

   Ainsi le groupe symetrique a n elements se realise comme un groupe fini d'isometries et que son image par l'application determinant est le groupe $\{\pm 1\}$.
7. Montrer que le groupe $\mathfrak{S}_3$ est dihedral.
8. Montrer que tout groupe fini d'ordre n peut se realiser comme un sous-groupe d'isometries lineaires contenu dans $O_{n-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 5. On considere le cas $n = 4$ dans l'exercice precedent. Si $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on defini

$$\mathbf{e}'_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$$

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \ \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4), \ \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4).$$

1. Montrer que $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ est une BON de $V = \mathbf{e}'^{\perp}_4$. Ainsi V est identifie a l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ grace au choix de cette base.
2. D'apres l'exercice precedent l'application

$$\sigma \in \mathfrak{S}_4 \to M_{3,\sigma} \in O_3(\mathbb{R})$$

qui a σ associe $M_{3,\sigma}$ la matrice de la restriction de φ_σ a V dans la base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ est un morphisme de groupe injectif de $\mathfrak{S}_4$ dans $O_3(\mathbb{R})$.
3. Determiner les isometries de $\mathbb{R}^3$ correspondant aux matrices $M_{3,\sigma}$ quand

$$\sigma = (12),\ \sigma = (123),\ \sigma = (1234),\ \sigma = (12)(34).$$

On rappelle (decomposition en cycles disjoints d'une permutation) que toute permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ non-triviale est conjuguee a l'une de ces 4 permutations. On a ainsi decrit les isometries correspondant a toutes les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_4$.

Polyhedres reguliers et variations

Les exercices suivants portent sur la formule de Burnside. On pourra se reporter a la derniere serie du semestre precedent pour des cas simples d'utilisation de la formule de Burnside pour compter les coloriages.

Exercice 6. Une entreprise de jeux de societe veut vendre des dès cubiques dont les faces sont colorees (deux faces distinctes peuvent avoir la meme couleur).

1. Elle dispose d'une palette de 3 couleurs. Montrer qu'elle pourra proposer 57 modeles. On commencera par rappeler les diverses rotations laissant un cube invariant notamment leur axe et leur ordre.
2. Plus generalement si elle dispose d'une palette de n couleurs, combien de modeles differents pourra-t-elle proposer ?

Exercice 7. Un dodécaèdre tronqué est un dodécaèdre régulier (12 faces, 30 arètes, 20 sommets) (cf. Figure 1) qu'on a coupé au niveau des sommets pour former des triangles équilateraux, les faces pentagonales devenant des décagones réguliers (voir Figure 2) .

1. Remplir le tableau ci-dessous (ajouter des lignes si nécéssaire) avec les données des différents types de rotations qui préservent le dodécaèdre régulier : type de point par lequel passe l'axe (en plus du centre du dodécaèdre), ordre et nombre

de rotations de chaque type ; pour vous aider on a déjà remplit une des lignes (par définition l'axe de la rotation Identité passe "partout").

Axe passant par	Ordre	Nombre
Partout	1	1

2. On dispose de m couleurs pour colorier les faces triangulaires et de n couleurs pour les faces décagonales. Combien de modèles de dodécaèdres tronqués est-il possible de fabriquer ?

Exercice 8. Reprendre les exercices precedents a l'aide de la formule de Polya simplifiee (cf. Serie 3)

Exercice 9 (Exo 3 Examen 2019)**.** Le cube rectifié est le polytope obtenu en coupant un cube par des plans perpendiculairement aux grandes diagonales (voir la Figure 3) de sorte que les faces triangulaires s'intersectent en un sommet commun.

1. Si l'arète du cube original est de longueur a quelles sont les longueurs des arètes des faces triangulaires ?
2. Montrer que le groupe des rotations préservant le cube rectifié est le groupe des rotations du cube (on pourra réaliser le cube rectifié comme une intersection) ?
3. Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le remplir (ajouter des lignes si nécéssaire) avec les données des différents types de rotations qui préservent le cube : type de point par lequel passe l'axe (en plus du centre du cube), ordre et nombre de rotations de chaque type ; pour vous aider on a déjà remplit une des lignes (par définition l'axe de la rotation Identité passe "partout").

Axe passant par	Ordre	Nombre
Partout	1	1

4. On dispose de t couleurs pour colorier les faces triangulaires et de c couleurs pour les faces carrés. Combien de modèles $C(c,t)$ de cubes rectifiés colorés est-il possible d'obtenir ?

   Données : $C(3,1) = 57, C(1,2) = 23$.

Exercice 10 (Exo 4 Examen 2019)**.** On considère le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées

$$\frac{1}{2}(1 \pm 1, 1 \pm 1, 1 \pm 1) = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0) \cdots, (1,1,1)\}.$$

1. A partir des sommets du cube, on peut former 2 tetrahèdres réguliers T_1, T_2. Donner pour chacun de ces tétrahèdres l'ensemble des sommets du cube qui le compose. Quel est la longueur des arètes de ces tétrahèdres ?
2. On considère le tétrahèdre (disons T_1) dont un des sommets est le point $P_1 = (0,0,0)$. On note P_2, P_3, P_4 les trois autres sommets (qu'on numérotera comme on préfère). Montrer que le cosinus de l'angle de la rotation d'axe (P_1P_2) qui envoie la face de T_1 contenant le point P_3 sur la face de T_1 contenant le point P_4 vaut
$$\cos(\theta) = 1/3.$$
3. On a vu en cours que le groupe des rotations du cube induit une action (par permutation) sur l'ensemble des 4 "grandes diagonales" du cube rendant le groupe isomorphe a $\mathfrak{S}_4$. Ce même groupe agit également sur l'ensemble $\{T_1, T_2\}$. Montrer que ces actions sont compatibles au sens suivant : les rotations du cube qui agissent trivialement sur $\{T_1, T_2\}$ sont exactement les rotations qui sont de signature $+1$ quand on les identifie avec des éléments de $\mathfrak{S}_4$. Pour ce faire, on pourra, par exemple, calculer l'indice du sous-groupe des rotations qui agissent trivialement sur l'ensemble $\{T_1, T_2\}$.

Un peu de ping-pong pour se detendre...

Exercice 11 (Exo 5 Examen 2019)**.** On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, pour simplifier les notations on écrira les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en *ligne* mais on les écrira en *colonne* pour les multiplier par des matrices : par exemple on ecrira $A.(x, y, z)$ pour le produit

$$A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on rappelle la notation de congruence modulo 3 : pour $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m \equiv n \pmod 3 \iff 3 | m - n.$$

1. Quelle est la nature des transformations linéaires associées aux matrices A et B. Montrer que ces matrices sont inversibles et calculer A^{-1} et B^{-1}.
2. Soit $G = \langle A, B\rangle \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ le groupe engendré par A et B.
   On va montrer que le groupe G est un groupe libre : *c'est à dire qu'un mot réduit et non trivial dans l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, A^{-1}, B^{-1}\}$ n'est jamais égal a l'élément neutre. En d'autres termes toute matrice M de la forme*

   $$M = L_1.\cdots.L_n,\ n \geqslant 1$$

   telle que
   — *(M est un mot non-trivial de longueur n dans l'alphabet $\mathcal{A}$) $\forall i = 1, \cdots, n$,*

   $$L_i = A,\ A^{-1} \textit{ ou bien } B \textit{ ou encore } B^{-1},$$

   — *(M est un mot réduit) $\forall i = 1, \cdots n-1$, on a*

   $$L_{i+1} \neq L_i^{-1}$$

   (autrement dit $L_i.L_{i+1} \neq \mathrm{Id}_3$),
   alors

   $$M \neq \mathrm{Id}_3.$$

   Il n'est pas difficile de vérifier que comme G est libre, tout élément $g \neq e_G$ de G, s'écrit de manière *unique* sous la forme d'un mot réduit dans l'alphabet $\mathcal{A}$.
   – On se donne donc un mot réduit non-trivial M et on veut montrer que

   $$M \neq \mathrm{Id}_3.$$

   Pour cela on va jouer au *ping-pong.*
   Soit $X_3 \subset S^2$ l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de longueur 1 de la forme

   $$\vec{v} = 3^{-k}(a, b\sqrt{2}, c)$$

   avec $k \geqslant 0$ un entier et $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On écrira toujours un tel vecteur sous forme "réduite" c'est a dire que la puissance de k est minimale (ie. 3 ne divise pas simultanément a, b et c).
   Montrer que

   $$A^{\pm 1}.X_3 \subset X_3,\ B^{\pm 1}.X_3 \subset X_3 \text{ et que } G.X_3 \subset X_3.$$

3. On considère les sous-ensembles suivants de X_3 (pour chaque valeur de $\pm$)

   $$X_A^{\pm} := \{\vec{v} \in X_3,\ a \pm b \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 3,\ c \equiv 0 \pmod 3\}$$

   $$X_B^{\pm} = \{\vec{v} \in X_3,\ b \pm c \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 3,\ a \equiv 0 \pmod 3\}.$$

Montrer que

$$A.X_A^+ \subset X_A^+,\ A^{-1}.X_A^- \subset X_A^-$$
$$B.X_A^\pm \subset X_B^-,\ B^{-1}.X_A^\pm \subset X_B^+.$$

On admet les inclusions similaires

$$B.X_B^- \subset X_B^-,\ B^{-1}.X_B^+ \subset X_B^+,\ A.X_B^\pm \subset X_A^+,\ A^{-1}.X_B^\pm \subset X_A^-.$$

4. Montrer que si M est un mot réduit qui ne se termine pas par A^{-1} ($L_n \neq A^{-1}$) alors pour tout $\vec{v} = 3^{-k}(a, b\sqrt{2}, c) \in X_A^+$, si on écrit
$$M.\vec{v} = 3^{-k'}(a', b'\sqrt{2}, c')$$
on a $b' \not\equiv 0 \pmod 3$.
5. On note $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ le premier vecteur de la base canonique. Soit M un mot réduit se terminant par A. Calculer $A.\mathbf{e}_1$ et en déduire que $M.\mathbf{e}_1$ est de la forme $3^{-k'}(a', b'\sqrt{2}, c')$ avec $b' \not\equiv 0 \pmod 3$. En déduire que $M \neq \mathrm{Id}_3$.
6. En général, montrer grâce à une conjugaison convenable qu'on peut toujours supposer que M se termine par A.
7. Soit r_1, r_2 deux rotations linéaires de $\mathbb{R}^3$ d'angles $\arccos(1/3)$ et d'axes perpendiculaires. Montrer que le groupe $\langle r_1, r_2\rangle \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0}}^+$ est libre.

Application aux chaines tetrahedrales de Steinhaus

Le resultat de l'exercice precedent a ete utilise par Świerczkowski pour repondre a une question de H. Steinhaus :

Une *chaine* tetrahedrale (de Steinhaus) est une suite finie $(T_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ de tetrahedres reguliers $T_n \subset \mathbb{R}^3$ telle que

1. Les aretes de ces tetrahedres sont tous de meme longueur (par exemple de longueur 1).
2. Pour tout $n \geqslant 1$, les tetrahedres T_n et T_{n+1} ont exactement une face en commun.
3. T_{n+2} n'est pas egal a T_n.

La figure 4 donne un exemple d'une telle chaine.

Steinhaus a demande si il existait une telle chaine qui forme une *boucle* : telle que

$$T_N = T_1.$$

Utilisant le fait que le groupe $G = \langle A, B\rangle$ est libre Świerczkowski a demontre qu'une telle chaine n'existe pas (plus precisement il a meme montre qu'il n'existe aucune chaine telle que T_N est un translate de T_1). Pour se convaincre du lien, on notera que A et B sont des rotations d'angle de cosinus $1/3$ qui est precisement l'angle entre deux faces d'un tetrahedre (cf. Exo 10).

On conjecture que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une chaine de Steinhaus $(T_n)_{n\leqslant N}$ dont les tetrahedres ne se coupent que si ils sont consecutifs et tels que T_N est a distance ε de T_1.

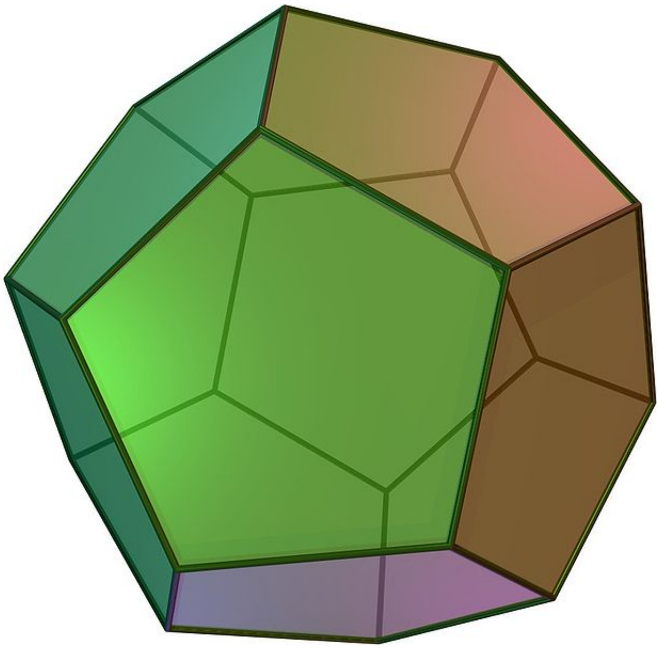

Figure 1 – Un dodécaèdre régulier

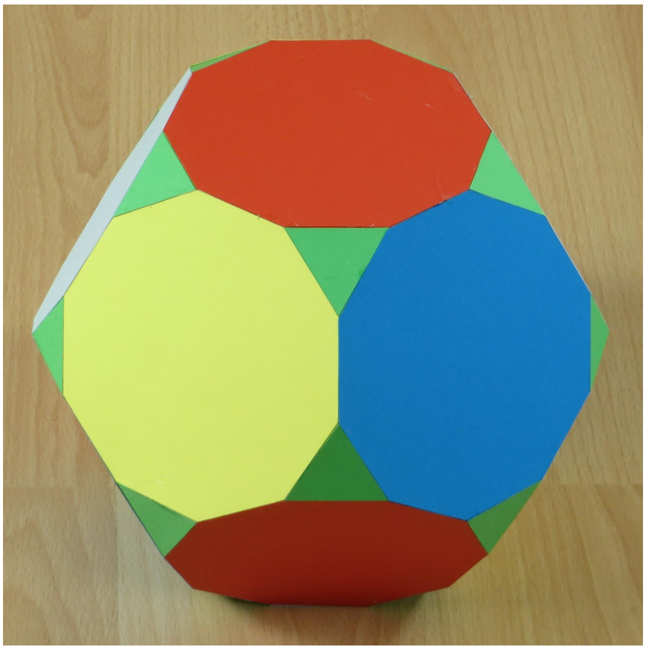

Figure 2 – Un dodécaèdre tronqué

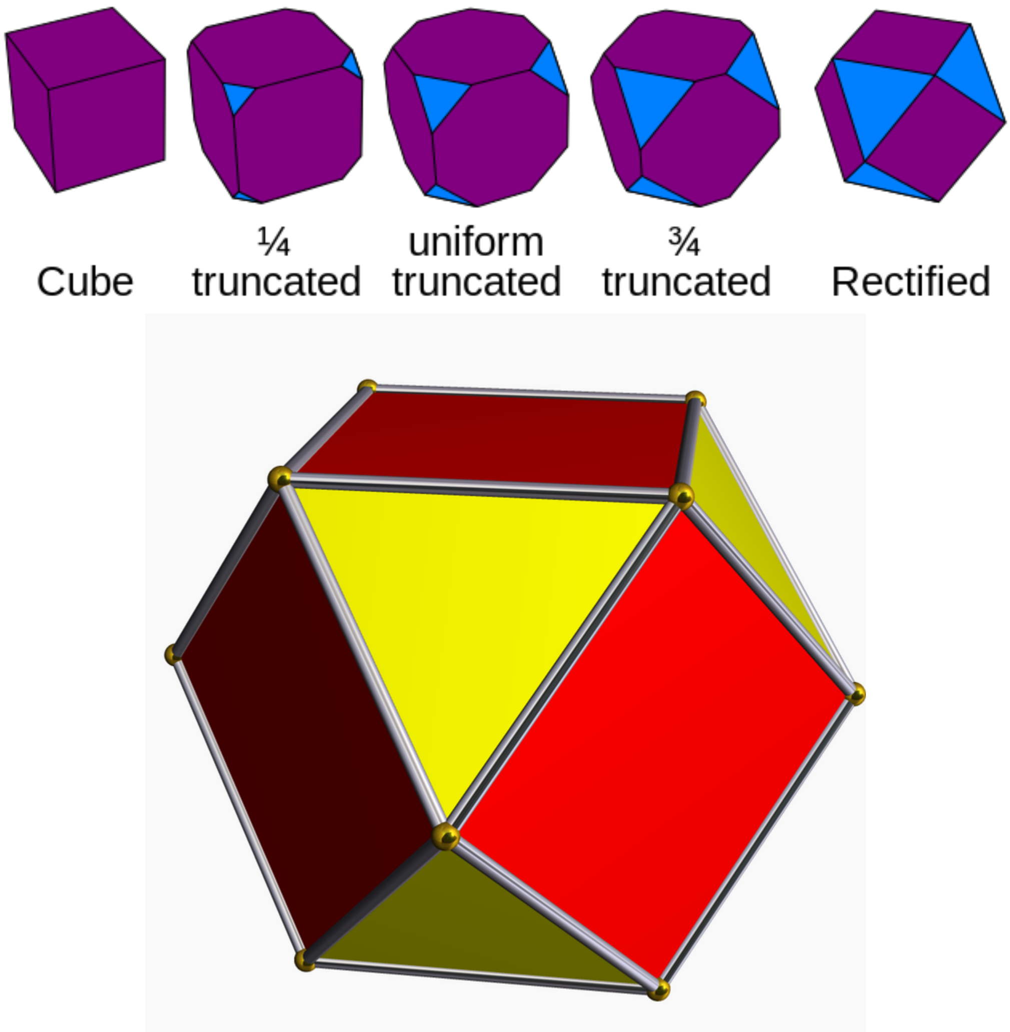

Figure 3 – Cube rectifié

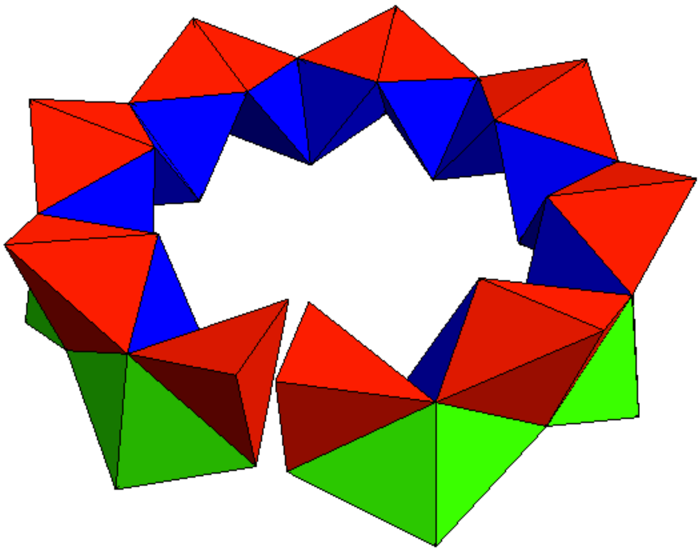

FIGURE 4 – Une chaine tetrahedrale qui se referme "presque" (image de S. Wagon)