EPFL - Printemps 2020	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 10	12 mai 2020

Dans cette revision l'exercice de dérivée covariante de tenseurs a été ajouté pour aider à faire l'exercice de la Hessienne.

10.1. Prouver sans calcul que la sphère, l'espace Euclidien et l'espace hyperbolique ont une courbure sectionnelle constante

Indication : Montrer que pour tout $p \in M$, le groupe des isométries de (M, g) qui fixent p agit transitivement sur l'espace des 2-plans $\Pi \subset T_pM$.

10.2. Soit $N \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface, soit $p \in N$ et soit $P \ni p$ un plan different du plan tangent T_pN. Calculer la courbure de la courbe $P \cap N$ dans le point p en termes de la deuxième forme fondamental de N et les orientations des plans P et T_pN.

10.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $N \subseteq \mathbb{R}^3$ son graphe. Calculer la deuxième forme fondamental dans un point p où $\mathrm{d}_p f = 0$ en termes des dérivées secondes de f.

10.4. Soit M Une variété munie une connexion affine ∇ et $\alpha \in \Omega^1(M)$. On rappelle que la différentielle extérieure de α est le 2-tenseur antisymétrique $\mathrm{d}\alpha$ défini par :

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = X \cdot (\alpha(Y)) - Y \cdot (\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \tag{1}$$

i) Montrer que α est fermée (i.e. $\mathrm{d}\alpha = 0$) si et seulement si $\nabla\alpha$ est un 2-tenseur symétrique.

ii) Soit f une fonction lisse. On définit la Hessienne de f par $\mathrm{Hess}_f = \nabla \mathrm{d}f$, ou, de façon equivalante,

$$\mathrm{Hess}_f(X, Y) = (\nabla \mathrm{d}f)(X, Y) = (\nabla_X \mathrm{d}f)(Y).$$

Montrer que Hess_f est symétrique.

iii) Montrer l'égalité suivante : $\mathrm{Hess}_f(X, Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)$.

iv) Trouver les composantes de Hess_f en coordonnées locales.

10.5. *(Métrique produit)* Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit de deux variétées Riemanniennes, muni de la métrique produit $g = g_1 \oplus g_2$. (g_i est une métrique Riemannienne sur M_i et $g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$ où X_i et Y_i sont tangents à M_i). On note R_i le tenseur de courbure de (M_i, g_i).

i) Calculer le tenseur de courbure R de g en fonction de R_1 et R_2.

ii) Même question pour la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

iii) Montrer qu'une métrique produit ne peut pas avoir une courbure sectionnelle positive ou négative. Est-il possible d'avoir une courbure de Ricci positive ou négative ?

10.6. Exprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionnelle de g.

10.7. Soit p un point quelconque d'une variété Riemannienne (M, g) et $\Pi \subset T_pM$ un 2-plan (= sous-espace vectoriel de dimension 2). Soit Ω un voisinage de $0 \in T_pM$ pour lequel l'exponentielle au point p est bien définie et est un difféomorphisme sur son image. Notons aussi $S = \exp_p(\Omega \cap \Pi)$. Alors S est une surface dans M et on note $\bar{g}$ la métrique induite par le plongement $S \subset M$. Quelle est la valeur de

$$\bar{K}_p(\Pi) - K_p(\Pi)$$

où K est la courbure sectionnelle de (M, g) et $\bar{K}$ est la courbure sectionnelle de (S, g) ?

10.8. (Dérivée covariante d'un tenseur) Soit T un tenseur de type $\binom{0}{k}$ sur une variété M munie d'une connexion ∇. On définit alors un tenseur ∇T de type $\binom{0}{k+1}$ par la formule

$$\nabla(Z, X_1, \ldots, X_k) = (\nabla_Z T)(X_1, \ldots, X_k) = Z(T(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{j=1}^{k} T(X_1, \ldots, \nabla_Z X_j, \ldots X_k).$$

Cette définition est motivée par le fait qu'elle donne une règle de Leibniz pour la dérivation de la fonction $T(X_1, \ldots, X_k)$ en direction du champ de vecteurs Z. Par exemple si $k = 2$, alors

$$Z(T(X, Y))) = (\nabla_Z T)(X, Y) + T(\nabla_Z X, Y) + T(X, \nabla_Z Y).$$

a) Prouver que ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique riemannienne g si et seulement si ∇ est sans torsion et $\nabla g = 0$.

b) Si ω est un 1-forme, calculer les coefficients de $\nabla\omega$ en coordonnées locales.

c) Prouver que si ω est une 1-forme et ∇ est une connexion sans torsion, alors

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = (\nabla_X \omega)(Y) - (\nabla_Y \omega)(X).$$