Variétés Riemanniennes, cours du mai 2020

Rappels : Soit (M,g) = var. riemannienne et $N \subset M$ sous-variété. On note $\bar{g} = g|_N$ (= 1ère forme fondamentale).

On décompose

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \mathrm{II}(X,Y)$$
$$= (\nabla_X Y)^T + (\nabla_X Y)^\perp = \pi^T(\nabla_X Y) + \pi^\perp(\nabla_X Y)$$

ici $X \in T_pN$ $(p \in N)$, $Y \in \Gamma(M, N)$

(il suffit que Y soit défini le long d'une courbe $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ tq. $\gamma(0) = p$ et $\dot\gamma(0) = X$)

Déf II est la seconde forme fondamentale de $N \subset M$.

On a :

1) $\bar{\nabla}_X Y$ est la connexion de Levi-Civita de $(N, \bar{g})$

2) $B_p : T_pN \times T_pN \to T_pN^\perp$ est bien défini et

$B : TN \times TN \to TN^\perp$

est tensoriel (C^∞ - bilinéaire)

(on a $B(X,Y) = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y$)

3) $B(X,Y) = B(Y,X)$

<u>Def</u> N est totalement géodésique si les géodésiques de N sont des géodésiques de M.

Alors : N est tot. géodésique

$\iff B \equiv 0$

Proposition (Equation de Weingarten)

Si $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ tq. $\forall p \in N$ on a

$X_p, Y_p \in T_pN$ et $Z_p \in T_pN^{\perp}$

Alors

$$\boxed{g(\nabla_X Z, Y) = -g(Z, B(X,Y))}$$

Preuve On a $g_p(Z, Y) = 0 \quad \forall p \in N$

donc

$$X(g(Z,Y)) = 0. \quad \text{Or}$$

$$X(g(Z,Y)) = g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_X Y)$$

$$= g(\nabla_X Z, Y) + g(Z, \bar{\nabla}_X Y + B(X,Y))$$

$$= g(\nabla_X Z, Y) + g(Z, B(X,Y))$$

$$= 0$$

$\#$

Théorème (Formule de Gauss) Soit $N \subset (M, g)$ une sous-variété d'une variété riemannienne. Alors

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z, W) - g(R(X,Y)Z, W) \\ &\quad = g(B(X,W), B(Y,Z)) - g(B(X,Z), B(Y,W))\end{aligned}}$$

où R est le $(1,3)$-tenseur de courbure de g

$\bar{R}$ est le $(1,3)$-tenseur de courbure de $\bar{g}$

ici $X, Y, Z, W \in T_pN$ (en un point $p \in N$)

Preuve On peut étendre les vecteurs X, Y, Z, W au voisinage de p en des champs tels que

1) $X, Y, Z, W \in \Gamma(M, N)$

2) $[X, Y] = [Y, Z] = 0$ etc...

On calcule:

$$\bar\nabla_X \bar\nabla_Y Z = \bar\nabla_X \left(\nabla_Y Z - B(Y,Z) \right)$$

$$= \bar\nabla_X (\nabla_Y Z) - \bar\nabla_X (B(Y,Z))$$

$$= \left(\nabla_X \nabla_Y Z - B(X, \nabla_Y Z)\right)$$

$$- \left(\nabla_X (B(Y,Z)) - B(X, B(Y,Z))\right)$$

$$= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X (B(Y,Z)) + Q$$

où $Q \perp T_pN$

$\Rightarrow$

$$g(\bar\nabla_X \bar\nabla_Y Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) - g(\nabla_X B(Y,Z), W) + \underbrace{g(Q, W)}_{=0}$$

car $W \in T_pN$, $Q \in T_pN^\perp$

Donc

$$g(\bar\nabla_X \bar\nabla_Y Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) - g(\nabla_X B(Y,Z), W)$$

On utilise Weingarten :

$$g(\nabla_X (B(Y,Z)), W) = -g(B(Y,Z), B(X,W))$$

$\Rightarrow$

(*) $$g(\bar\nabla_X \bar\nabla_Y Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) - g(B(X,W), B(Y,Z))$$

de même

(*') $$g(\bar\nabla_Y \bar\nabla_X Z, W) = g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) - g(B(Y,W), B(X,Z))$$

on rappelle que $[X,Y] = 0$

$\Rightarrow$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \underbrace{- \nabla_{[X,Y]} Z}_{=0}$$

Donc

(*), (*') $\Rightarrow$

$$g(\bar R(X,Y)Z, W) = g(R(X,Y)Z, W) - g(B(X,W), B(Y,Z)) + g(B(Y,W), B(X,Z))$$

A

Corollaire 1 Si $N \subset M$ est totalement géodésique, alors $\bar{R} = R$.

(i.e. $g(R(X,Y)Z,W) = \bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,W)$ $\forall p \in N$, $X,Y,Z,W \in T_pN$)

Preuve $\mathrm{II} = 0$ #

Corollaire 2 Si $p \in N$, $X,Y \in T_pN$ linéairement indépendants, alors

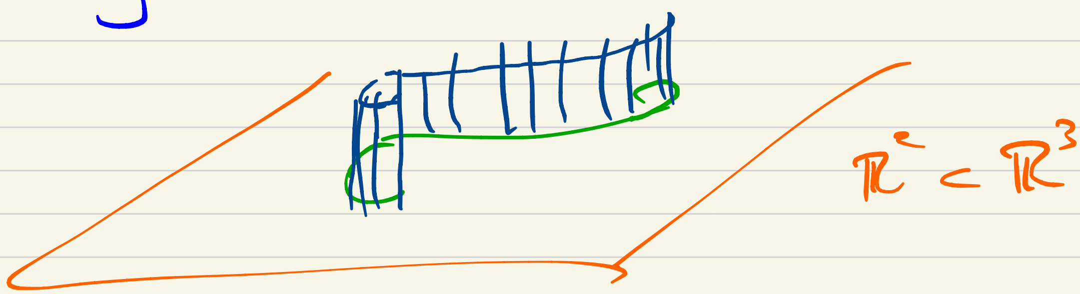
$$\bar{K}(X,Y) = K(X,Y) + \frac{g(\mathrm{II}(X,X),\mathrm{II}(Y,Y)) - \|\mathrm{II}(X,Y)\|^2}{\|X \wedge Y\|^2}$$

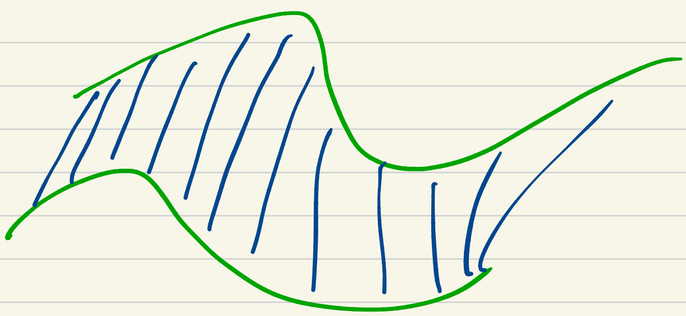
Preuve Rappelons que

$$K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X \wedge Y\|^2}$$

Définition Une surface réglée dans une variété riemannienne (M, g) est une sous-variété $N \subset M$ telle que $\dim(N) = 2$ et $\forall p \in N$ il existe une géodésique (non constante) passant par p

Exemple dans $\mathbb{R}^3$ plan, cylindre, cône, cylindre généralisé





Prop Si $N \subset M$ est une surface réglée

$$\Rightarrow \quad \bar{K}_p(X, Y) \leq K_p(X, Y) \quad \left(X, Y \in T_p N \text{ lin. indépendants} \right)$$

on peut écrire

$$\bar{K}(T_p N) \leq K(T_p N)$$

Preuve Soit $p \in N$, il existe une géodésique $\gamma \subset N$ tq $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X \neq 0$. Soit $Y \in T_pN$ un vecteur non colinéaire à X, alors on a

$$\bar K(X,Y) = K(X,Y) + \frac{\langle \mathbb{B}(X,X), \mathbb{B}(Y,Y)\rangle - \|\mathbb{B}(X,Y)\|^2}{\|X \wedge Y\|^2}$$

et

$$\mathbb{B}(X,X) = \nabla_X X - \bar\nabla_X X = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma - \bar\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

$\Rightarrow$

$$\bar K(X,Y) = K(X,Y) - \frac{\|\mathbb{B}(X,Y)\|^2}{\|X\wedge Y\|^2} \leq K(X,Y)$$

#

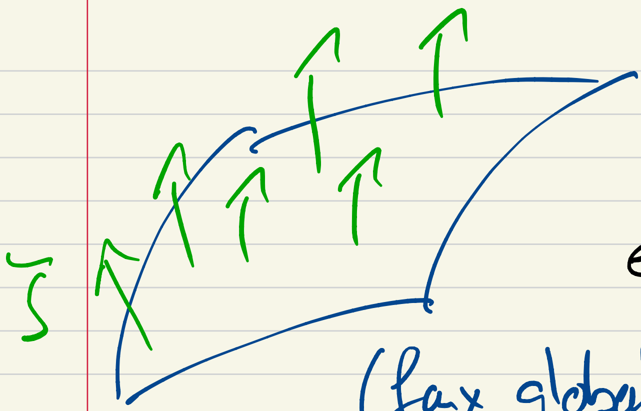
---

le cas des hypersurfaces i.e.

$$n = \dim N = m - 1 = \dim(M) - 1.$$

Définition N est *co-orientable* s'il existe

$$\mathcal{I} : N \to TM \quad \text{tq} \quad \mathcal{I}_p \perp T_pN, \ \mathcal{I}_p \neq 0 \quad \forall p$$



Rem Toute hypersurface est localement co-orientable.

(faux globalement : ex ruban de Möbius dans $\mathbb{R}^3$).

Définition Si $N \subset M$ est une hypersurface co-orientable, et si $\xi : N \to TN^{\perp}$ t.q. $\|\xi_p\| = 1 \ \forall p$. Alors on définit la seconde forme fondamentale scalaire

par

$$b(X,Y) = g(B(X,Y), \xi)$$

$$\iff \quad B(X,Y) = b(X,Y) \cdot \xi$$

On défini aussi l'application de Weingarten ("Shape operator")

$\forall p \in N$, $L_p : T_p N \to T_p M$ par

$$\boxed{L_p(X) = \nabla_X \xi}$$

(on écrit souvent $L = \nabla \xi$)

__Propriétés__ 1) $L(X) \in T_p N$

2) $g(L(X), Y) = -b(X,Y)$

3) L est auto-adjoint :

$$g(LX, Y) = g(X, LY)$$

__Preuve__ 1) $g(\xi, \xi) = 1$ donc

$$0 = X(g(\xi,\xi)) = 2g(\nabla_X \xi, \xi)$$
$$= 2g(LX, \xi)$$
$$\Rightarrow L(X) \perp \xi \Leftrightarrow X \in TN$$

2) C'est l'identité de Weingarten, mais on peut prouver directement

$$g(Y, \mathcal{J}) \equiv 0 \quad \left(\text{si } Y \text{ est un champ tangent à } N\right)$$

$\Rightarrow$

$$0 = X(g(Y, \mathcal{J})) = g(\nabla_X Y, \mathcal{J}) + g(Y, \nabla_X \mathcal{J})$$

$$= b(X, Y) + g(Y, LX)$$

$\left(\text{car } b(X,Y) = g(\nabla_X Y, \mathcal{J})\right)$

3) Découle de la symétrie de b

$$g(LX, Y) = -b(X,Y) = -b(Y,X)$$
$$= g(X, LY)$$

#

<u>Rappel</u> : Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est auto-adjoint

$\Rightarrow$ L est orthogonalement diagonalisable i.e., il existe une base

$u_1, \dots, u_n \in T_p N \quad (\forall p \in N)$

qui vérifie

1) $g(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

2) $L(u_i) = k_i u_i$

($k_i \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres)

<u>Def</u> 1) $k_1, \dots, k_n$ sont les <u>courbures principales</u> de l'hypersurface

2) les $u_i \in T_p N$ représentent les directions principales de N en p

3) $\operatorname{Det}(L) = \prod_{i=1}^{n} k_i = K_{Gauss}(p)$

= <u>Courbure de Gauss</u> de N en p

4) $\frac{1}{n} \operatorname{Trace}(L) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = H(p)$

= <u>courbure moyenne</u>

<u>Théorème</u> Si $N^2 \subset M^3$ est une surface dans une variété riemannienne de dim 3

Alors $\forall p \in N$ on a

$$\boxed{\bar{K}_p(T_pN) = K_p(T_pN) + K_{Gauss}(p)}$$

<u>Preuve</u> On peut choisir $u_1, u_2 \in T_pN$ qui sont orthonormés et vecteurs propres pour L (directions principales)

$$\Rightarrow K_{Gauss}(p) = \det L = k_1(p) \cdot k_2(p)$$
$$= b(u_1,u_1) \cdot b(u_2,u_2) - b(u_1,u_2)^2$$

Donc par le résultat précédent $\Rightarrow$

$$\bar{K}(u_1,u_2) = K(u_1,u_2) + \frac{K_{Gauss}(p)}{\|u_1 \wedge u_2\|^2}$$

avec $\|u_1 \wedge u_2\| = 1$.

#

En particulier Si $M = \mathbb{R}^3$ (i.e. $N \subset \mathbb{R}^3$)

alors $K(T_pN) = 0$ $\Rightarrow$

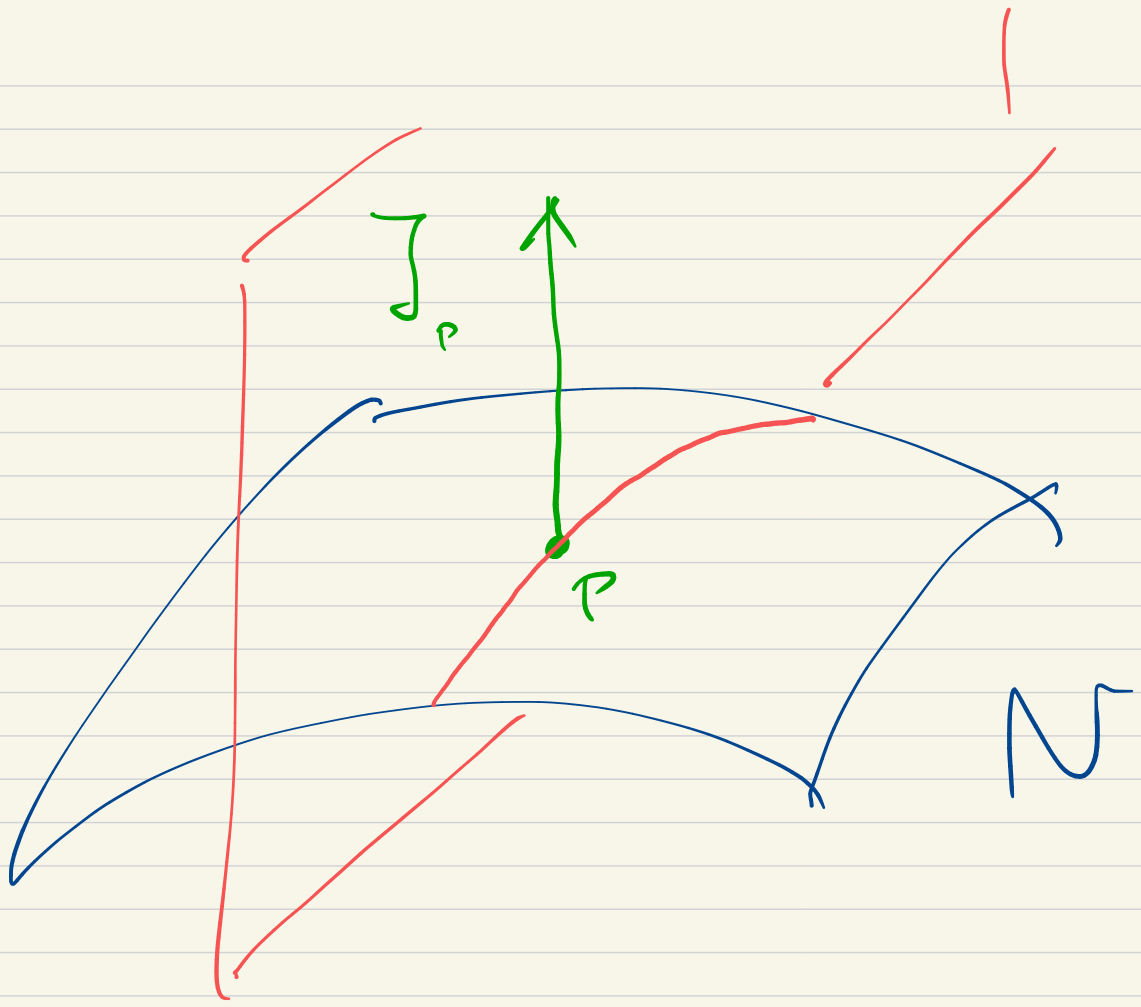
$$K_{Gauss}(p) = \bar{K}(p) \quad (= \bar{K}(T_pN))$$

(quantité définie extrinsèquement $= k_1 \cdot k_2$)

quantité intrinsèque définie à partir de la 1ère forme fondamentale (des g_{ij} et les dérivées)

$\Rightarrow$ Théorème egregium de Gauss (1827)

"Le produit des courbures principales d'une surface dans $\mathbb{R}^3$ ne dépend que de la géométrie intrinsèque de la surface"



T_p
p
N