11.1. (Inégalité de Synge)

(a) Une surface N de $\mathbb{R}^3$ est dite *réglée* si pour tout point $p \in N$ il existe un segment de droite euclidienne $[a, b]$ contenu dans N et qui contient le point p en son intérieur (exemples : un plan, un cylindre ou un cône).
Prouver que si $N \subset \mathbb{R}^3$ est une surface réglée, alors sa courbure est négative ou nulle.

(b) Définir la notion de surface réglée dans une variété riemannienne quelconque et généraliser le résultat précédent.

11.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne.

(a) Montrer qu'en dimension 2, la courbure scalaire vaut le double de la courbure sectionnelle.

(b) Montrer qu'une variété d'Einstein de dimension 3 a une courbure sectionnelle constante. Est-ce valable en dimension supérieure ? *(On rappelle qu'une variété Riemannienn (M, g) est dite d'* Einstein *si $Ric_g = \lambda g$ pour une constante λ).*

11.3. (*) Prouver la *seconde identité de Bianchi* : Si R est le $\binom{0}{4}$ tenseur de courbure de (M, g), alors

$$\nabla R(X, Y, U, V, W) + \nabla R(X, Y, V, W, U) + \nabla R(X, Y, W, U, V) = 0.$$

Indication : Il suffit de prouver cette identité en un point $p \in M$ fixé (mais quelconque). On peut se donner un système de coordonnées inertielles de Riemann au point p.

11.4. Soit (M, g) une variété Riemannienne et $p \in M$. Montrer que le développement de Taylor de g en coordonées normales centrées en p est

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iklj} x^k x^l + \mathcal{O}(|x|^3).$$

Indication : Soit $\gamma(t) = (tV_1, ..., tV_n)$ une géodésique radiale et $J(t) = tW^i \partial_i$ un champs de Jacobi le long de γ. Dériver un nombre suffisant de fois $g(J(t), J(t))$.

11.5. Soit (M, g) Une variété Riemannienne de courbure sectionnelle non positive ($K \leq 0$), et $\gamma : [0, 1] \to M$ une géodésique de M. Montrer que si Z est un champ de Jacobi le long de γ, alors

$$t \to \|Z_t\|$$

est une fonction convexe.
Indication : Montrer d'abord que $t \to \|Z_t\|^2$ est convexe.

11.6. Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\gamma : [0, 1] \to M$ une courbe dans M. On défini l'énergie de γ par

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Ecrire les formules de variation première et seconde pour l'énergie.