EPFL - Printemps 2020	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 11 – avec solutions	18 mai 2020

11.1. (Inégalité de Synge)

(a) Une surface N de $\mathbb{R}^3$ est dite *réglée* si pour tout point $p \in N$ il existe un segment de droite euclidienne $[a, b]$ contenu dans N et qui contient le point p en son intérieur (exemples : un plan, un cylindre ou un cône).
Prouver que si $N \subset \mathbb{R}^3$ est une surface réglée, alors sa courbure est négative ou nulle.

(b) Définir la notion de surface réglée dans une variété riemannienne quelconque et généraliser le résultat précédent.

Solution. Voir Corollaire 4.2.11 du Polycopié. □

11.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne.

(a) Montrer qu'en dimension 2, la courbure scalaire vaut le double de la courbure sectionnelle.

Solution. En dimension 2 il n'y a que un plan dans l'espace tangent T_pM ; on denote k_p sa courbure sectionnelle. Soit e_0, e_1 une base orthonormée de T_pM. Alors :

$$\mathrm{Ric}(e_0, e_0) = \mathrm{trace}(X \mapsto R(X, e_0)e_0) = g(R(e_0, e_0)e_0, e_0) + g(R(e_1, e_0)e_0, e_1) = 0 + k_p.$$

De même, $\mathrm{Ric}(e_1, e_1) = k_p$, donc $\mathrm{Scal} = \mathrm{trace}(\mathrm{Ric}) = 2k_p$. □

(b) On dit que (M, g) est une *variété d'Einstein* si $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$ pour une constante λ. Montrer que si (M, g) est d'Einstein et de dimension 3, alors sa courbure sectionnelle est constante. Est-ce valable en dimension supérieure ?

Solution. Soit M une variété d'Einstein à 3 dimensions. Comme $\mathrm{Ric} = \lambda g$, pour chaque vecteur unitaire $v \in T_pM$ on a $\mathrm{Ric}(v, v) = \lambda$. Soit $\Pi \subset T_pM$, un 2-plan, et soit (e_0, e_1, e_2) une base orthonormée de T_pM tel que (e_0, e_1) est une base orthonormée de Π. On calcule :

$$\lambda = \mathrm{Ric}(e_0, e_0) = K(e_0, e_1) + K(e_0, e_2).$$

En faisant de même pour $\mathrm{Ric}(e_1, e_1)$ et $\mathrm{Ric}(e_2, e_2)$, et en dénotant $K_{ij} = K(e_i, e_j)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} K_{01} + K_{02} = \lambda \\ K_{01} + K_{12} = \lambda \\ K_{02} + K_{12} = \lambda. \end{cases}$$

On somme les premières deux équations et on reste la troisième pour montrer que $K_{01} = \frac{\lambda}{2}$, et cela montre que la courbure sectionnelle du plan $\Pi \subseteq T_pM$ est $\frac{\lambda}{2}$.
En dimension 4 on a l'example de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ avec la métrique produit. Cette variété est Einstein mais sa courbure sectionnelle n'est pas constante. □

11.3. (*) Prouver la *seconde identité de Bianchi* : Si R est le $\binom{0}{4}$ tenseur de courbure de (M, g), alors

$$\nabla R(X, Y, U, V, W) + \nabla R(X, Y, V, W, U) + \nabla R(X, Y, W, U, V) = 0.$$

Indication : Il suffit de prouver cette identité en un point $p \in M$ fixé (mais quelconque). On peut se donner un système de coordonnées inertielles de Riemann au point p.

Solution. Voir le livre de Lee, Proposition 7.5 $\square$

11.4. Soit (M, g) une variété Riemannienne et $p \in M$. Montrer que le développement de Taylor de g en coordonées normales centrées en p est

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iklj} x^k x^l + \mathcal{O}(|x|^3).$$

Indication : Soit $\gamma(t) = (tV_1, ..., tV_n)$ une géodésique radiale et $J(t) = tW^i \partial_i$ un champs de Jacobi le long de γ. Dériver un nombre suffisant de fois $g(J(t), J(t))$.

Solution. D'abord on voit que $J(t)$ est bien un champs de Jacobi le long de γ parce qu'il y a une variation de géodésiques $\gamma_s(t)$ tel que $\gamma_0 = \gamma$ et $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \gamma_s(t) = J(t)$, à savoir, $\gamma_s(t) = t(V + sW)$. Cela implique que $J(t)$ est un champs de Jacobi ; voir Prop. 4.5.2 du polycopié.
En calculant 4 dérivées de $t \mapsto (\|J(t)\|_{\gamma(t)})^2$ dans le point $t = 0$ on obtient le développement Taylor

$$(\|J(t)\|_{\gamma(t)})^2 = (\|W\|_{x=0})^2 \, t^2 - \frac{1}{3} \langle R|_{x=0}(V, W)V, W\rangle \, t^4 + o(t^4).$$

Le calcul est fait dans le livre de Do Carmo, Chap. 5, Prop. 2.7.
On peut diviser la dernière équation par t^2 parce que

$$(\|J(t)\|_{\gamma(t)})^2 = (\|tW\|_{tV})^2 = t^2 (\|W\|_{tV})^2.$$

On obtient

$$(\|W\|_{tV})^2 = (\|W\|_{x=0})^2 - \frac{1}{3} \langle R|_{x=0}(V, W)V, W\rangle \, t^2 + o(t^2),$$

ou, en coordonnées,

$$g_{kl}(tV) W^k W^l = g_{kl}(0) W^k W^l - \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) V^i W^k V^j W^l t^2 + o(t^2).$$

Comme cette equation est valable pour tout W, on déduit que

$$g_{kl}(tV) = g_{kl}(0) - \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) V^i V^j t^2 + o(t^2).$$

On compare cette developpement Taylor spécial avec le développement Taylor générique

$$g_{kl}(x) = \delta_{kl} + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j g_{kl}(0) x^i x^j + \mathcal{O}(|x|^3)$$

(Remarquer que $\partial_i g_{kl}(0) = 0$ parce que le système de coordonées est normal, donc inertiel dans l'origine.) En particulier, en substituant $x = tV$ on obtient

$$g_{kl}(tV) = \delta_{kl} + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j g_{kl}(0) tV^i tV^j + \mathcal{O}(t^3).$$

La comparaison montre que $\frac{1}{2} \partial_i \partial_j g_{kl} V^i V^j = -\frac{1}{3} R_{ikjl} V^i V^j$ dans l'origine. Comme $\partial_i \partial_j g_{kl}$ est symmetrique dans le paire d'indices i, j, on conclut que $\frac{1}{2} \partial_i \partial_j g_{kl}(0) = -\frac{1}{3} R_{ikjl}(0)$ et donc

$$g_{kl}(x) = \delta_{kl} - \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) x^i x^j + \mathcal{O}(|x|^3).$$

$\square$

11.5. Soit (M, g) Une variété Riemannienne de courbure sectionnelle non positive ($K \leq 0$), et $\gamma : [0,1] \to M$ une géodésique de M. Montrer que si Z est un champ de Jacobi le long de γ, alors

$$t \to \|Z_t\|$$

est une fonction convexe.
Indication : Montrer d'abord que $t \mapsto \|Z_t\|^2$ est convexe.

Solution. On a

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\|Z_t\|^2 = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \nabla_t Z, Z\rangle = 2\langle (\nabla_t)^2 Z, Z\rangle + 2\|\nabla_t Z\|^2 = 2\langle R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma, Z\rangle + 2\|\nabla_t Z\|^2,$$

et cette quantité es non-negative parce que la courbure sectionnelle est non-positive.
En utilisant l'identité $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sqrt{f} = \frac{ff'' - \frac{1}{2}f'^2}{2f^{3/2}}$ pour $f(t) = \|Z_t\|^2$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\|Z_t\| = \frac{\|Z\|^2\langle R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma, Z\rangle + \|Z\|^2\|\nabla_t Z\|^2 - \langle \nabla_t Z, Z\rangle^2}{\|Z\|^3} \geq \frac{\|Z\|^2\langle R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma, Z\rangle}{\|Z\|^3} \geq 0.$$

Ici on a utilisé l'inégalité de Cauchy–Schwarz $\langle \nabla_t Z, Z\rangle^2 \leq \|Z\|^2\|\nabla_t Z\|^2$ et le fait que $\langle R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma, Z \geq 0$. □

11.6. Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe dans M. On défini l'énergie de γ par

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt.$$

Écrire les formules de variation première et seconde pour l'énergie.

Solution. Voir Do Carmo, Chap. 9 □