EPFL - Printemps 2020	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 12	24 mai 2020

12.1. Une *variété de Cartan–Hadamard* est une variété Riemannienne complète, simplement connexe et à courbure sectionelle non-positive. Dans une telle variété M, montrer que si $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to M$ sont des géodésiques, alors la fonction $t \mapsto d(\gamma_0(t), \gamma_1(t))$ est convexe.

Indication : Il peut être utile de montrer que l'exponentielle globale

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}: & TM & \longrightarrow & M \times M \\ & (p,v) & \longmapsto & (p, q = \exp_p(v)) \end{array}$$

est un difféomorphisme. Après il faut utiliser la formule de variation seconde.

12.2. Prouver le théorème 4.5.1 du polycopié : On peut réécrire la formule de variation seconde sous la forme suivante : Si $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ est une variation de la géodésique $\gamma : [a,b] \to M$ (parametrée par longueur), alors

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \ell(\varphi_s) = \left(\langle \nabla_Y Y, \dot\gamma \rangle + \langle \nabla_t Y^\perp, Y^\perp \rangle\right)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \langle J(Y^\perp), Y^\perp \rangle \, \mathrm{d}t$$

où $\ell = \ell(\gamma)$, $Y := \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ et $J(Z) = (\nabla_t)^2 Z - R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma$.

12.3. (Théorème de Synge) Soit M une variété Riemannienne compacte de dimension n à courbure sectionnelle positive.

(a) Si n es pair et M est orientable, alors M est simplement connexe.

(b) Si n es impair, alors M est orientable.

Indication :
On peut utiliser le fait que dans chaque classe d'homotopie non-triviale de courbes fermées il y a une courbe γ de longueur minimale ; cette courbe est une géodésique fermée.
Construire un champ V le long de γ qui soit parallèle, orthogonal à γ' et non nul. Utiliser la formule de variation seconde.