Dans cette revision l'exercice de dérivée covariante de tenseurs a été ajouté pour aider à faire l'exercice de la Hessienne.

10.1. Prouver sans calcul que la sphère, l'espace Euclidien et l'espace hyperbolique ont une courbure sectionnelle constante

Indication : Montrer que pour tout $p \in M$, le groupe des isométries de (M, g) qui fixent p agit transitivement sur l'espace des 2-plans $\Pi \subset T_pM$.

Solution. On dénote (M, g) soit la sphère, soit l'espace Euclidien, soit l'espace hyperbolique. Le point clé est de montrer que le groupe d'isometrie agit transitivement sur les paires (p, Π) où $p \in M$ et $\Pi \subseteq T_pM$ est un 2-plan. En fait on peut prouver une chose plus forte :

Lemme : si $p, p' \in M$ et $(E_i)_{0\leq i<n}$, $(E'_i)_{0\leq i<n}$ sont bases orthogonales de T_pM, et $T_{p'}M$, alors il y a une isométrie $f : M \to M$ tel que $f(p) = p'$ et $f_*(E_i) = E'_i$.

Preuve : Dans le cas de l'espace Euclidien l'isometrie est une transformation affine. Dans le cas de la sphère $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $B = (p, E_0, E_1, ..., E_{n-1})$ et $B' = (p', E'_0, E'_1, ..., E'_{n-1})$ sont bases orthonormées de $\mathbb{R}^{n+1}$, donc il suffit de prendre f la transformation linéaire orthogonale qu'envoye $B \mapsto B'$. Finalement, dans le cas de l'espace hyperbolique, on peut faire la même chose que dans la sphère si on utilise le modèle hyperboloïde

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \underbrace{x_0^2 - \sum_{1\leq i<n+1} x_i^2}_{q(x)} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Les isométries de H^n sont les transformations linéaires qui préservent la forme quadratique q, et $B = (p, E_0, E_1, ..., E_{n-1})$ est une base q-orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e., elle satisfait $B_q(v_i, v_j) = \pm\delta_{ij}$ où B_q est la forme bilinéaire symmetrique associé à q selon l'identité $B_q(v, v) = q(v)$. □

10.2. Soit $N \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface, soit $p \in N$ et soit $P \ni p$ un plan different du plan tangent T_pN. Calculer la courbure de la courbe $P \cap N$ dans le point p en termes de la deuxième forme fondamental de N et les orientations des plans P et T_pN.

Solution. Comme P est transverse à T_pN, l'intersection $P \cap N$ est une courbe dans une voisinage de p. On considère un paramétrage $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \cap N \cap P$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\|\gamma'(t)\| = 1$. On dénote $v = \gamma'(0)$. Remarquer que la direction de v est la même de la ligne d'intersection $P \cap T_pN$.

La courbure de γ est $\kappa = \|\gamma''(0)\|$.

Pour calculer ça on remarque deux faits :

— La direction de $\gamma''(0)$ est dans le plan P et orthogonale à v, donc determinée.

— On peut calculer la composante orthogonale à T_pN de $\gamma''(0)$ en utilisant la deuxième forme fondamentale de N dans le point p, dénotée B_p. On a

$$\gamma''(0)^\perp = B_p(v, v).$$

On conclut que $\kappa = \frac{|B_p(v,v)|}{\sin\alpha}$, où $\alpha \in [0, \pi/2]$ est l'angle entre les plans P et T_pN. □

10.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $N \subseteq \mathbb{R}^3$ son graphe. Calculer la deuxième forme fondamental dans un point p où $\mathrm{d}_pf = 0$ en termes des dérivées secondes de f.

Solution. On peut supposer sans perte de généralité que $p = (0, 0, 0)$. Les vecteurs tangentes à N sont de la forme $v = (v_0, v_1, 0)$. On va calculer $B_p(v, v)$. La courbe γ definie par

$$\gamma(t) = (\underbrace{v_0\, t, v_1\, t}_{\beta(t)}, f(\beta(t))$$

est contenue dans N et satisfait $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, donc

$$B_p(v, v) = \gamma''(0)^\perp = (f \circ \beta)''(0) = f_{00}(0)\, v_0^2 + f_{01}(0)\, v_0 v_1 + f_{10}(0)\, v_1 v_0 + f_{11}(0)\, v_1^2$$

où $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. □

10.4. Soit M Une variété munie une connexion affine ∇ et $\alpha \in \Omega^1(M)$. On rappelle que la différentielle extérieure de α est le 2-tenseur antisymétrique $\mathrm{d}\alpha$ défini par :

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = X \cdot (\alpha(Y)) - Y \cdot (\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \tag{1}$$

i) Montrer que α est fermée (i.e. $\mathrm{d}\alpha = 0$) si et seulement si $\nabla\alpha$ est un 2-tenseur symétrique.

Solution. La dérivée covariante $\nabla\alpha$ est un tenseur donné par

$$\nabla\alpha(X, Y) = (\nabla_X \alpha)Y = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y).$$

Ce tenseur est symétrique si et seulement si sa partie antisymétrique, i.e. le tenseur A défini par la formule $A(X, Y) = \nabla\alpha(X, Y) - \nabla\alpha(Y, X)$, est nulle. Alors on calcule

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= \nabla\alpha(X, Y) - \nabla\alpha(Y, X) \\ &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha(\underbrace{\nabla_X Y - \nabla_Y X}_{=[X,Y]}) \\ &= \mathrm{d}\alpha(X, Y). \end{aligned}$$

Cela montre que $A = \mathrm{d}\alpha$. On conclut que $\nabla\alpha$ est symétrique si et seulement si $\mathrm{d}\alpha = 0$. □

ii) Soit f une fonction lisse. On définit la Hessienne de f par $\mathrm{Hess}_f = \nabla \mathrm{d}f$, ou, de façon equivalante,

$$\mathrm{Hess}_f(X, Y) = (\nabla \mathrm{d}f)(X, Y) = (\nabla_X \mathrm{d}f)(Y).$$

Montrer que Hess_f est symétrique.

Solution. La partie antisymétrique de la Hessienne de f est le tenseur A donné par

$$A(X, Y) = \mathrm{Hess}_f(X, Y) - \mathrm{Hess}_f(Y, X) = (\mathrm{dd}f)(X, Y) = 0,$$

donc Hess_f est symétrique. Ici on a utilisé le fait que $\mathrm{dd}f = 0$ pour toute f. □

iii) Montrer l'égalité suivante : $\mathrm{Hess}_f(X, Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)$.

Solution. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_f(X, Y) = (\nabla_X \mathrm{d}f)(Y) &= X(\mathrm{d}f(Y)) - \mathrm{d}f(\nabla_X Y) \\ &= X\langle \operatorname{grad} f, Y\rangle - \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X Y\rangle. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y\rangle = X\langle \operatorname{grad} f, Y\rangle - \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X Y\rangle.$$

□

iv) Trouver les composantes de Hess_f en coordonnées locales.

Solution. Assuming moreover the coordinates vector fields are orthonormal (if not introduce the function g_{ij}...), we set

$$X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial_i},$$

$$Y = \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial_j}$$

and

$$\operatorname{grad} f = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial_k}.$$

Now we just have to unfold the previous concise expression using the definition of the Christoffel symbols. We find

$$\mathrm{Hess}_f(X,Y) = \sum_{ik} x_i y_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{ijk} x_i y_k \frac{\partial f}{\partial x_j} \Gamma_{ij}^k.$$

□

10.5. *(Métrique produit)* Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit de deux variétées Riemanniennes, muni de la métrique produit $g = g_1 \oplus g_2$. (g_i est une métrique Riemannienne sur M_i et $g(X_1+X_2, Y_1+Y_2) = g_1(X_1,Y_1) + g_2(X_2,Y_2)$ où X_i et Y_i sont tangents à M_i). On note R_i le tenseur de courbure de (M_i, g_i).

i) Calculer le tenseur de courbure R de g en fonction de R_1 et R_2.

ii) Même question pour la courbure de Ricci et la courbure scalaire.

iii) Montrer qu'une métrique produit ne peut pas avoir une courbure sectionnelle positive ou négative. Est-il possible d'avoir une courbure de Ricci positive ou négative ?

Solution. **The connection**

For this we need some information about the Levi-Civita connection of (M,g). However it will be enough for our purpose to only compute it on some special vector fields. The vector fields we will consider which come from vector fields on each of the M_i.
Recall that, for every $p = (p_1, p_2) : inM_1 \times M_2$, $T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2$ is canonically isomorphic to $T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$, thus any vector $X_p \in T_pM$ can be uniquely written as $X_p = (X_1)_{p_1} + (X_2)_{p_2}$ [1] where $(X_1)_{p_1} \in T_{p_1}M_1$ and $(X_2)_{p_2} \in T_{p_2}M_2$.
Now pick any vector field on M_1, $X_1 : p_1 \to (X_1)_{p_1} \in T_{p_1}M_1$. From this we can define a vector fields on M by $p = (p_1,p_2) \mapsto (X_1)_{p_1} \in T_{p_1}M_1 \subset T_pM$. We will also denote this vector field by X_1. Similarly from a vector field on X_2 we can define a vector field on M, that will also be denoted by M_2.
From now on every vector field which has 1 or 2 as a subscript comes from the above construction.
The Levi-Civita of (M,g) satisfies the following properties :

$\nabla_{X_1} Y_2 = \nabla_{Y_2} X_1 = 0.$

1. We could also write $X_p = ((X_1)_{p_1}, (X_2)_{p_2})$.

ii. $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1$ [2],
iii. $\nabla_{X_2} Y_2 = \nabla^2_{X_2} Y_2$,
First let us prove that $\nabla_{X_1} Y_2 = 0$, we will use Koszul formula :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) =& X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) \\ &+ g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Set $X = X_1$, $Y = Y_2$ and $Z = Z_1$ for now, we get :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_1) =& X_1 \cdot g(Y_2, Z_1) + Y_2 \cdot g(X_1, Z_1) - Z_1 \cdot g(X_1, Y_2) \\ &+ g([X_1, Y_2], Z_1) - g([X_1, Z_1], Y_2) - g([Y_2, Z_1], X_1). \end{aligned}$$

This will vanish for the following reasons :
- The inner product of a vector on M_1 with a vector on M_2 is zero by definition of g.
- The Lie bracket of two vector fields on M_1 is again a vector field on M_1.
- The Lie bracket of a vector field on M_1 with a vector field on M_2 is zero.
- The inner product of two vectors on M_1, as a function on M, doesn't depend on p_2.

For instance $Y_2 \cdot g(X_1, Z_1)$ vanishes because $g(X_1, Z_1)$ is a function on M which depends only on p_1 and Y_2 has no component along M_1, and $g([X_1, Z_1], Y_2) = 0$ because $[X_1, Z_1]$ is a vector field on M_1 and Y_2 is a vector field on M_2.
Similarly one shows that $2g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_2) = 0$, which will imply that $\nabla_{X_1} Y_2 = 0$. Hence property **1.** is proved.
For property **2.**, first show that $2g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_2) = 0$, in a similar way to what we already did. Then, plugging only vector fields on M_1 in :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_1) =& X_1 \cdot g(Y_1, Z_1) + Y_1 \cdot g(X_1, Z_1) - Z_1 \cdot g(X_1, Y_1) \\ &+ g([X_1, Y_1], Z_1) - g([X_1, Z_1], Y_1) - g([Y_1, Z_1], X_1). \end{aligned}$$

Since $g = g_1$ on vector fields from M_1, what we get is exactly the Koszul formula for ∇^1, this ends the proof that $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1$.
We have proved all we need about the connection now !

The curvature

Let X be a vector field of the form $X = X_1 + X_2$ with X_1 a vector field on M_1 and X_2 a vector field on M_2. Similarly let $Y = Y_1 + Y_2$ and $Z = Z_1 + Z_2$. We have :

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \nabla_{Y_1 + Y_2} (Z_1 + Z_2) \\ &= \nabla_{X_1 + X_2} (\nabla^1_{Y_1} Z_1 + \nabla^2_{Y_2} Z_2) \\ &= \nabla^1_{X_1} \nabla^1_{Y_1} Z_1 + \nabla^2_{X_2} \nabla^2_{Y_2} Z_2. \end{aligned}$$

We can then get the curvature tensor from there :

$$R(X, Y)Z = R_1(X_1, Y_1)Z_1 + R_2(X_2, Y_2)Z_2.$$

(A similar formula holds for the $\binom{0}{4}$ tensor.)
Taking traces one gets :

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}_1(X_1, Y_1) + \mathrm{Ric}_2(X_2, Y_2)$$

and

$$\mathrm{Scal} = \mathrm{Scal}_1 + \mathrm{Scal}_2\,.$$

2. On the left, ∇ is applied to vector fields on M, on the right hand side, ∇^1 is applied to vector fields on M_1. Thus this equality makes sense only using the embedding of vector fields on M_1 to vector fields on M that we have seen before. You should keep that in mind.

(ii) Using the formula for R, we get that, for 2 vectors $u, v \in T_pM$:

$$K(u,v) = \begin{cases} K_1(u,v) & \text{if } u,v \in T_{p_1}M_1, \\ K_2(u,v) & \text{if } u,v \in T_{p_2}M_2, \\ 0 & \text{if } u \in T_{p_1}M_1, v \in T_{p_2}M_2. \end{cases}$$

In particular a product metric can never have everywhere non vanishing sectionnal curvature.
However it can have positive or negative Ricci curvature, for instance assume $\mathrm{Ric}_1 = kg_1$ and $\mathrm{Ric}_2 = kg_2$, then $\mathrm{Ric} = k(g_1 \oplus g_2) = kg$. Similarly, on can have strictliy positive scalar curvature.

An interesting open question : *We know the sphere $\mathbb{S}^2$ with its standard metric has constant sectionnal curvature* 1.
In this exercise we proved that $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ with the product metric has nonnegative sectional curvature but does not have positive sectional curvature everywhere. It has been conjectured by Hopf that $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ cannot be endowed with a metric with (everywhere) positive sectional curvature, and this question has been opened for many decades.

□

10.6. Exprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionnelle de g.

Solution. Notons tout d'abord que la connexion de Levi-Cività de g et de g' sont les mêmes (ce qu'on montre en vérifiant que celle de g vérifie toutes les axiomes de celle de g'). Il faut alors distinguer la courbure comme tenseur $(1,3)$ (qui s'exprime uniquement à l'aide de la connexion et qui est donc inchangée) et la courbure $(0,4)$ qui fait intervenir le produit scalaire. On a

$$R' = a^2 R.$$

On constate ensuite que $K' = \frac{1}{a^2}K$ (un facteur a^2 au numérateur, un facteur a^4 au dénominateur). □

10.7. Soit p un point quelconque d'une variété Riemannienne (M,g) et $\Pi \subset T_pM$ un 2-plan (= sous-espace vectoriel de dimension 2). Soit Ω un voisinage de $0 \in T_pM$ pour lequel l'exponentielle au point p est bien définie et est un difféomorphisme sur son image. Notons aussi $S = \exp_p(\Omega \cap \Pi)$. Alors S est une surface dans M et on note $\bar{g}$ la métrique induite par le plongement $S \subset M$. Quelle est la valeur de

$$\bar{K}_p(\Pi) - K_p(\Pi)$$

où K est la courbure sectionnelle de (M,g) et $\bar{K}$ est la courbure sectionnelle de (S,g) ?

Solution. Remarquer que S est totalement géodésique, donc sa deuxième forme fondamentale est nulle, donc la solution vient directement de la formule de Gauss ; on trouve que $\overline{K} = K$. □

10.8. (Dérivée covariante d'un tenseur) Soit T un tenseur de type $\binom{0}{k}$ sur une variété M munie d'une connexion ∇. On définit alors un tenseur ∇T de type $\binom{0}{k+1}$ par la formule

$$\nabla(Z, X_1, \ldots, X_k) = (\nabla_Z T)(X_1, \ldots, X_k) = Z(T(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{j=1}^{k} T(X_1, \ldots, \nabla_Z X_j, \ldots X_k).$$

Cette définition est motivée par le fait qu'elle donne une règle de Leibniz pour la dérivation de la fonction $T(X_1, \ldots, X_k)$ en direction du champ de vecteurs Z. Par exemple si $k = 2$, alors

$$Z(T(X,Y))) = (\nabla_Z T)(X,Y) + T(\nabla_Z X, Y) + T(X, \nabla_Z Y).$$

a) Soit g une métrique riemannienne. Prouver que ∇ est la connexion de Levi-Civita de g si et seulement si ∇ est sans torsion et $\nabla g = 0$.

Solution. Comme g est un tenseur de type $\binom{0}{2}$, par définition de ∇g on a

$$X(g(Y,Z)) = (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour $X, Y, Z \in \Gamma(M)$. Cela montre que ∇ est compatible avec la métrique g si et seulement si $\nabla g = 0$. □

b) Si α est un 1-forme, calculer les coefficients de $\nabla\alpha$ en coordonnées locales.

Solution. Par definition de $\nabla\alpha$ on a pour toutes $X, Y \in \Gamma(M)$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \alpha)(Y) &= X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) \\
(\nabla_X \alpha)_i Y^i &= X(\alpha_i Y^i) - \alpha_k (\nabla_X Y)^k \\
(\nabla_X \alpha)_i Y^i &= (X(\alpha_i) Y^i + \alpha_i X(Y^i)) - \alpha_k (X(Y^k) + \Gamma^k_{ji} X^j Y^i) \\
(\nabla_X \alpha)_i Y^i &= X(\alpha_i) Y^i - \alpha_k \Gamma^k_{ji} X^j Y^i
\end{aligned}$$

Cette équation est valable pour chaque Y, donc

$$(\nabla_X \alpha)_i = X(\alpha_i) - \Gamma^k_{ji} X^j \alpha_k.$$

□

c) Prouver que si α est une 1-forme et ∇ est une connexion sans torsion, alors

$$\mathrm{d}\alpha(X,Y) = (\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X).$$

Solution. Par définition de $\mathrm{d}\alpha$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha(X,Y) &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) \\
&= (\nabla_X \alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y)) - (\nabla_Y \alpha)(X) - \alpha(\nabla_Y X) - \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= (\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X).
\end{aligned}$$

□