Géométrie Riemannienne, cours du 26 Mai

§ 4.5 Champs de Jacobi et Th. de Cartan-Hadamard

Soit $\gamma : [a,b] \to M$ une géodésique d'une variété riemannienne (M,g). On note

$$\Gamma_\gamma := \{ X : [a,b] \to TM \mid X \in C^\infty, \; X_t \in T_{\gamma(t)} M \}$$

l'ensemble des champs de vecteurs le long de γ

c'est un $C^\infty([a,b])$.

<u>Déf</u> a) <u>L'opérateur de Jacobi</u> : $J_\gamma : \Gamma_\gamma \to \Gamma_\gamma$ est défini par

$$\boxed{J_\gamma(X) = \nabla_t^2 X + R(X,\dot\gamma)\dot\gamma}$$

b) $X \in \Gamma_\gamma$ est un <u>champ de Jacobi</u> si

$$X \in \operatorname{Ker}(J) \;, \quad J_\gamma(X) = 0$$

Proposition Soit γ une géodésique de M et $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ une variation de γ par des géodésiques. Alors

$$Y := \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$$ est un champ de Jacobi.

Preuve Soit $X = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ alors on a

1) $\nabla_X X \equiv 0$ (car $t \mapsto \varphi(s,t)$ est géodésique $\forall s$)

2) $[X, Y] = d\varphi\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right]\right) = 0$

3) $\nabla_Y X = \nabla_X Y - \underbrace{[Y, X]}_{=0} = \nabla_X Y.$

Donc

$$\begin{aligned}
J_\gamma(Y) &= \nabla_X \nabla_X Y + R(X,Y)Y \\
&= \nabla_X \nabla_Y X + R(X,Y)Y \\
&= \nabla_Y \nabla_X X \quad \text{(par définition de } R\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $J_\gamma(Y) = \nabla_Y \underbrace{\nabla_X X}_{=0} = 0$ #

Y doit être un champs de Jacobi dès que les courbes intégrales de X sont géodésiques

<u>Remarque</u> La réciproque de la proposition est aussi vraie (cf. polycopié).

<u>Application</u> (Calcul de courbure en dim 2)

Supposons que dans un ouvert U d'une surface Riemannienne (M, g) on a

$$g = dx^2 + b^2(x,y)\,dy^2$$

$$\left(\text{i.e. } G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^2(x,y) \end{pmatrix} \right)$$

Alors les courbes $\{y = \text{constantes}\}$ sont géodésiques

Donc $X = \frac{\partial}{\partial x}$ vérifie $\nabla_X X = 0$ $\left(\|X\| = 1 \right)$

D'autre part $W = \frac{1}{b} Y$ vérifie

- $\|W\| = 1$
- $g(X, W) = 0$

Donc W est parallèle le long des géodésiques $t \mapsto (t, y_0)$ (ici on utilise que $\dim(M) = 2$).

$$\Rightarrow \quad \nabla_t W = \nabla_X W = 0$$

D'autre part $Y = \frac{\partial}{\partial y} = b \cdot W$ est Jacobi

(car $\varphi(s,t) = (t,s)$ est géodésique $\forall s$
et on peut appliquer la proposition précédente)

$\Rightarrow$

$$0 = J_\gamma(Y) = \nabla^2_X Y + R(Y,X)X$$

$$= \nabla^2_X (b.W) + R(bW,X)X$$

$$= X(X(b)).W + b.R(W,X)X$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}.W + b.R(W,X)X = 0$$

Si on fait le produit scalaire avec W

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}.\underbrace{\|W\|^2}_{=1} + b\,\underbrace{\langle R(W,X)X, W\rangle}_{= K(X,W)} = 0$$

(car $\|X\| = \|W\| = 1$, $X \perp W$)

$\Rightarrow$

$$\boxed{K = -\frac{1}{b}.\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}}$$

(courbure des surface si $g = dx^2 + b^2 dy^2$)

Exemples ① Si $b(x,y) = (p \cdot x + q)$

$\Rightarrow \quad g = dx^2 + (px+q)^2 \, dy^2$

est de courbure nulle

(par exemple $dr^2 + r^2 d\theta^2 \rightarrow$ courbure nulle)

② Sur la sphère on a en coordonnées polaires

$$d\varphi^2 + \sin^2(\varphi) \, d\theta^2$$

vérifie

$$K = +1. \quad \left(\text{car} \; -\frac{\sin''(\varphi)}{\sin(\varphi)} = +1 \right)$$

③ le plan hyperbolique en coordonnée polaire

$\rightarrow \quad g = dr^2 + \sinh^2(r) \, d\varphi^2$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{\sinh''(r)}{\sinh(r)} = -1.$$

(3bis) Dans le $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré on a

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

faisons le changement de variable :

$$x = x \quad , \quad z = \log(y) \Rightarrow y = e^z$$

et $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} \Rightarrow dz^2 = \frac{dy^2}{y^2}$

$\Rightarrow$

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) = e^{-z} dx^2 + dz^2$$

(on dit que (x,z) sont des coordonnées horocycliques)

et donc

$$K = -\underbrace{\frac{1}{e^{-z}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-z})}_{=1} = -1 \quad !$$

<u>Lemme</u> Soit (M,g) une variété Riemannienne à $K \leq 0$ (Courbure sectionelle ≤ 0)

et $\gamma : [0,1] \to M$ une géodésique. Alors

Si $Y \in \Gamma_\gamma$ est un champs de Jacobi

alors $f(t) = \frac{1}{2} \| Y_t \|^2$ est convexe.

<u>Preuve</u>

On a $f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \langle Y_t , Y_t \rangle \right) = \langle \nabla_t Y , Y \rangle$

$\Rightarrow$

$$f''(t) = \langle \nabla_t Y , \nabla_t Y \rangle + \langle \nabla_t^2 Y , Y \rangle$$

$$= \| \nabla_t Y \|^2 - \langle R(Y, \dot\gamma) \dot\gamma , Y \rangle$$

(car $Y \in \Gamma_\gamma$ est Jacobi : $\nabla_t^2 Y + R(Y, \dot\gamma)\dot\gamma = 0$)

Observons que

$\langle R(Y, \dot\gamma) \dot\gamma , Y \rangle = 0$ si $Y, \dot\gamma$ sont lin. dépendants

et

$$\langle R(Y, \dot\gamma) \dot\gamma , Y \rangle = K(Y, \dot\gamma) \cdot \| Y \wedge \dot\gamma \|^2 \leq 0$$

Car on suppose (M,g) est à $K \leq 0$.

On a donc toujours

$$f''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}\|Y_t\|^2\right) \geq \|\nabla_t Y\|^2 \geq 0$$

#

(Remarque On peut aussi prouver que
$t \mapsto \|Y_t\|$ est convexe)

Théorème de Cartan-Hadamard (partie géométrique)

Soit (M,g) une variété riemannienne t.q.

1) (M,g) complète
2) $K \leq 0$ $\quad$ (i.e. $K_p(X,Y) \leq 0$, $\forall p$, $\forall X,Y \in T_pM$)

Alors l'application exponentielle est localement dilatante :

$$\|d\,[\exp_p(v)]\,(\xi)\| \geq \|\xi\|$$

$(\forall\ \xi \in T_v(T_pM) = T_pM)$

Preuve Il s'agit de comprendre la différentielle (en un pt de T_pM) de

$$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$$

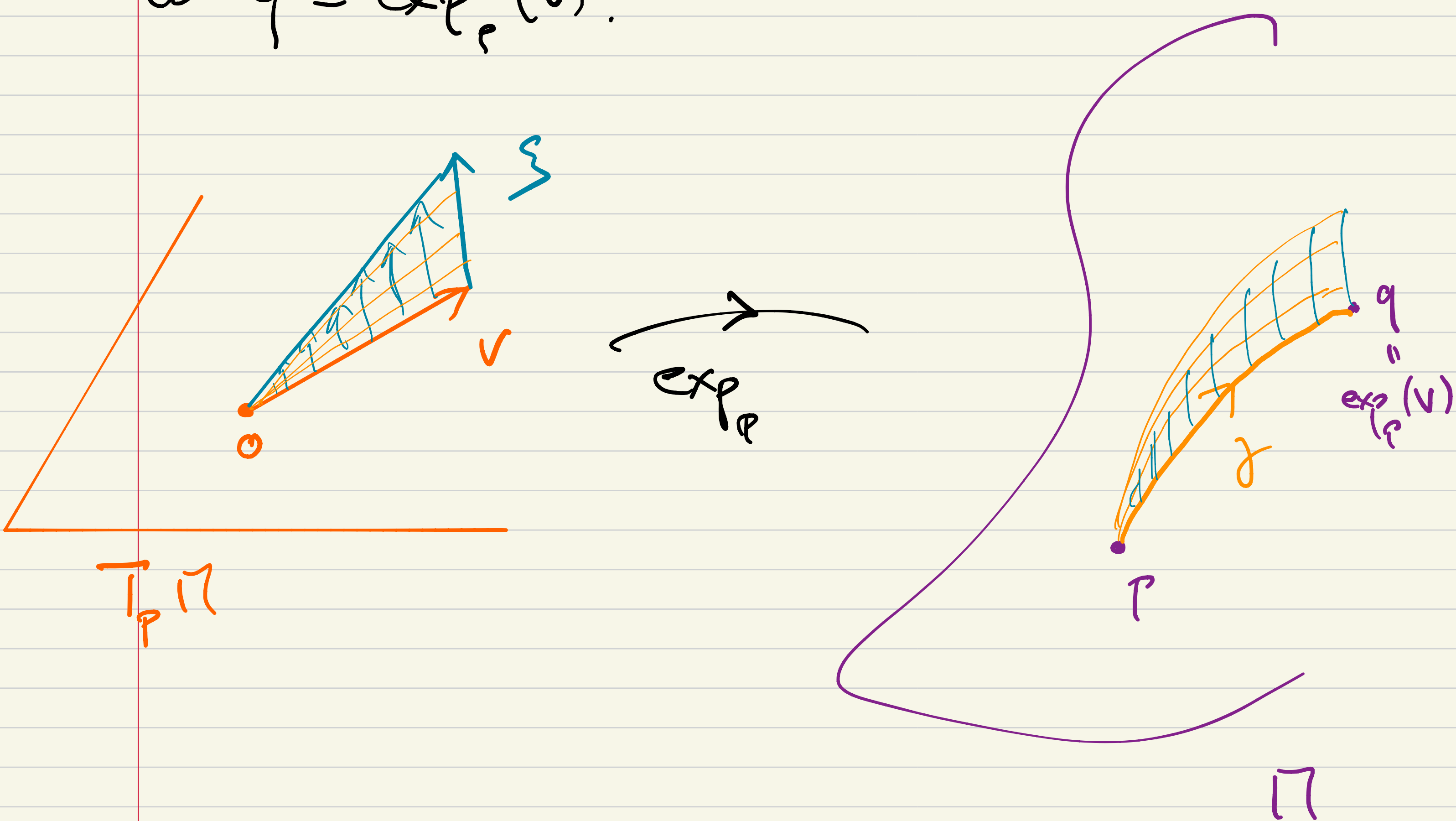
cela fait intervenir les champs de Jacobi.

Soit $v \in T_pM$ et $\xi \in T_v(T_pM) = T_pM$

on veut comprendre

$$d(\exp_p(v))(\xi) \in T_qM$$

où $q = \exp_p(v)$.



On pose $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ $(0 \leq t \leq 1)$

c'est une géodésique de M qui relie p à $q = \exp_p(v)$. On considère ensuite la déformation suivante $\varphi(t,s)$ de γ définie par

$$\varphi(s,t) = \exp_p\big(t\cdot(v + s\xi)\big)$$

On note que

(i) $t \mapsto \varphi(s,t)$ est géodésique $\forall s$

(ii) $t \mapsto \varphi(0,t) = \gamma(t) = \exp_p(tv)$

(iii) $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(1,0) = Y_{(1,0)} = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \exp_p(v + s\xi)$

$$= d\big(\exp_p(v)\big)\,\xi$$

Donc $t \mapsto Y_{(t,0)} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\Big|_{s=0}(t,0) \in \Gamma_\gamma$

est un champ de Jacobi.

Par la proposition précédente :

$$t \longmapsto \|Y_t\|^2 \quad \text{est convexe.}$$

On rappelle que $d(\exp_p(0)) = Id_{T_pM}$

Donc

$$\|Y_{(0,0)}\| = \|\xi\| \quad \text{et} \quad \|Y_{(1,0)}\| = \|d\exp_p(v)(\xi)\|$$

Par convexité $\Rightarrow$

$$\|Y_{(1,0)}\|^2 \geq \|Y_{(0,0)}\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|Y_{(1,0)}\| \geq \|Y_{(0,0)}\| = \|\xi\|$$

Donc $\forall\, \xi \in T_pM = T_v(T_pM)$ on a

$$\|\xi\|_p \leq \|d\exp_p(v)(\xi)\|_q \qquad (q = \exp_p(v))$$

#

Théorème de C.H. (partie topologique)

Soit (M, g) convexe, complète, à $K \leq 0$

Alors

$$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$$

est un revêtement.

Preuve On note

$$h = \exp_p^*(g)$$

c'est une métrique riemannienne sur $T_pM \cong \mathbb{R}^n$

et $(\mathbb{R}^n, h)$ est complet (car $h \geq g_p$) [exercice]

Donc $\exp_p : (\mathbb{R}^n, h) \to (M, g)$

avec
- $(\mathbb{R}^n, h)$ est complet
- $\exp_p$ est une isométrie local

$\Rightarrow \exp_p$ est un revêtement

#

Corollaire (1) $\exp_p : T_pM \to M$ est le revêtement universel.

(2) Si M est compacte à $K \leq 0$

$\Rightarrow \pi_1(M)$ est infini.

Preuve (1) Car $T_pM = \mathbb{R}^n$ est simplement convexe

(2) Un résultat standard de topologie algébrique dit que si $f : \tilde{M} \to M$ est le revêtement universel de M et M est compact, alors

$\pi_1(M)$ est fini $\Leftrightarrow$ $\tilde{M}$ est compact

#