EPFL - Printemps 2020	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 6 – avec solutions	28 mai 2020

6.1. (Coordonnées inertielles) Soit (M, g) une variété riemannienne.

(a) Montrer que pour chaque point $p \in M$ il y a un système de coordonnées x^i qui est inertiel dans le point p, ça veut dire, tel que les dérivées partielles $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ sont nulles dans le point p.

(b) Montrer qu'on peut garantir en plus que $g_{ij} = \delta_{ij}$ dans le point p.
Donc $g_{ij} = \delta_{ij} + o(\|x\|)$ si le point p est représenté par l'origine $x = 0$.

Résoudre cet exercice sans recourir à l'exponentielle.
Indication : Montrer d'abord q'il y a des cordonnées y^l telles que les coefficients $\widetilde{g}_{ij}$ satisfont la première condition ($\widetilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$ dans le point) mais pas nécessairement la seconde ($\partial_k \tilde{g}_{ij} = 0$ dans le point). Puis faire un changement à coordonnées x^i tel que $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ dans le point.)

Solution. On prends une base orthonormée $(E_l)_l$ de T_pM et un système de coordonées y^l telles que, dans le point p, on a $y^l = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y^l} = E_l$. Dans ce système de coordonnées la métrique g s'écrit $g = \widetilde{g}_{lm}(y)\mathrm{d}y^l\mathrm{d}y^m$, et on sait que, dans le point p,

$$\widetilde{g}_{lm} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^l}, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) = g(E_l, E_m) = \delta_{lm}.$$

Puis on considère des changements de coordonées du type $y = f(x)$ où $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f|_0 = I_n$ (où en notation tensoriel, $\delta_i f^j|_{x=0} = 0$). La métrique g dans le système x^l est

$$g_{ij}(x) = \widetilde{g}_{lm}(y)\,\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\,\frac{\partial y^m}{\partial x^j}$$

ou, en dénotant $g_{ij} = g_{ij}(x)$, $\widetilde{g}_{lm} = \widetilde{g}_{lm}(y)$, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\widetilde{\partial}_j := \frac{\partial}{\partial y^i}$,

$$g_{ij} = \widetilde{g}_{lm}\,\partial_i y^l\,\partial_j y^m$$

Dans l'origine, le fait que $\partial_i y^l = \delta_i^l$ garantit que $g_{ij} = \delta_{ij}$. En plus on doit obtenir $\partial_k g_{ij} = 0$ dans le même point. Alors on dérive

$$\partial_k g_{ij} = \widetilde{\partial}_p \widetilde{g}_{lm}\,\partial_k y^p\,\partial_i y^l\,\partial_j y^m + \widetilde{g}_{lm}\,\partial_k\partial_i y^l\,\partial_j y^m + \widetilde{g}_{lm}\,\partial_i y^l\,\partial_k\partial_j y^m.$$

Dans l'origine, on à $\partial_i y^j = 0$, donc en dénotant $b_{ij}^k = b_{ijk} = \partial_i\partial_j f^k(0)$, on a

$$\partial_k\partial g_{ij}|_{x=0} = \partial_k\widetilde{g}_{ij}|_{y=0} + b_{kij} + b_{kji}$$

Alors on a $\partial_k\partial g_{ij}|_{x=0} = 0$ si et seulement si

$$b_{kij} + b_{kji} = -\partial_k\widetilde{g}_{ij}|_{y=0}. \tag{1}$$

Il serait mieux avoir juste b_{kij} à gauche. Pour arriver à celle situation on fait une somme signée d'équations similaires

$$\begin{aligned} &+(b_{kij} + b_{kji} = -\partial_k\widetilde{g}_{ij}) \\ &+(b_{ijk} + b_{ikj} = -\partial_i\widetilde{g}_{jk}) \\ &-(b_{jki} + b_{jik} = -\partial_j\widetilde{g}_{ki}) \end{aligned}$$

On obtient

$$b^j_{ki} = -\frac{1}{2}\big(\underbrace{\partial_k\widetilde{g}_{ij} + \partial_i\widetilde{g}_{jk} - \partial_j\widetilde{g}_{ki}}_{=\widetilde{\Gamma}^j_{ki}}\big)\big|_{y=0}$$

et cette équation est en fait équivalent à (1). En résumé, la métrique g satisfait $\partial_k g_{ij}|_{x=0} = 0$ si et seulement si $b^j_{ki}(0) = -\widetilde{\Gamma}^j_{ki}|_{y=0}$. Donc on peut définir f, par example, comme ça :

$$f^l(x) = x^l + \frac{1}{2}b^l_{ij}x^ix^j$$

où

$$b^j_{ki} = \widetilde{\Gamma}^j_{ki}|_{y=0} = -\frac{1}{2}\left(\partial_k\widetilde{g}_{ij} + \partial_i\widetilde{g}_{jk} - \partial_j\widetilde{g}_{ki}\right)\Big|_{y=0}.$$

□

6.2. On dit qu'une métrique g sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est inertielle dans un point $p \in U$ si elle satisfait une des conditions suivantes :

(a) Les dérivées partielles premières $\partial_i g_{jk}$ sont nulles dans le point p.

(b) Les symboles de Christoffel Γ^k_{ij} sont nuls dans le point p.

(c) La dérivée covariante coincide avec la dérivée habituelle dans le point p : pour tout champ de vecteurs Z on a

$$\nabla_j Z = \frac{\partial Z}{\partial x^j} \text{ dans le point } p,$$

(Donc pour tout vecteur $V = V^j\partial_j|_p \in T_pU$ on a $\nabla_V Z = V^j\frac{\partial Z^k}{\partial x^j}\partial_k$ dans le point p.)

(d) Toute géodésique γ tel que $\gamma(t_0) = p$ satisfait $\gamma''(t_0) = 0$, où γ'' est la dérivée seconde habituelle dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer que toutes les conditions sont équivalentes.

Solution. C'est clair que is $\partial_i g_{ij}(0) = 0$, alors $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$ et reciproquement, les calculs autour de l'équation (1) montrent que si $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$, alors $\partial_i g_{ij}(0) = 0$. Cela montre que les deux premières conditions sont équivalentes.
L'équation $\nabla_i Z^j = \partial_i Z^j + \Gamma^j_{ik}Z^k$ montre que la dérivé covariante $\nabla_i Z$ coincide avec la dérivée habituelle $\partial_i Z$ si et seulement si $\Gamma^k_{ij} = 0$. Finalement, soit γ une géodésique tel que $\gamma(0) = 0$ et soit $V = \gamma'(0)$. Par l'équation des géodésiques, on a

$$0 = (\nabla_t)^2|_{t=0}\gamma = \gamma''(0) + \Gamma^k_{ij}V^iV^j\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Si $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$, alors $\gamma''(0) = 0$, et si $\gamma''(0) = 0$ pour tout V, alors $\Gamma^k_{ik}(0)V^iV^j$ pour tout V, et cela implique que $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$ par la symétrie $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. □

6.3. Soit (M, g) une variété riemannienne et soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse tel que son champ gradient ∇f satisfait $\|\nabla f\| = 1$ partout.

(a) Si $x, y \in M$, montrer que toute courbe C^1 à morceaux γ de x à y satisfait $\ell(\gamma) \geq f(y) - f(x)$.

Solution. Soit $\gamma : [a, b] \to M$ tel que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. Alors

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_a^b \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \langle\nabla f, \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|\nabla f\|\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \ell(\gamma). \end{aligned}$$

□

(b) Montrer que les courbes intégrales du champ de vecteurs ∇f sont des géodésiques.

Solution. Si γ est une courbe intégral du champ ∇f, on voit dans le calcul dessus que $\ell(\gamma) = f(y) - f(x)$. Pour toute variation γ_s de γ à extrémités fixes on a $\ell(\gamma_s) \geq f(y) - f(x) = \ell(\gamma_0)$. Cela montre que γ est extremal pour le fonctional de longueur. En plus γ est parametrée à vitesse unitaire, donc γ est un géodésique. □

6.4. Dans cet exercice on va utiliser le paramétrage polaire $h(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ du plan $\mathbb{R}^2$. Soit (M, g) une surface riemannienne et soit $p \in M$.

(a) Montrer que il existe un paramétrage local $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ tel que $f(0) = p$ et que

$$(fh)^* g = \mathrm{d}r^2 + b(r,\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta^2.$$

Solution. Soit (E_0, E_1) une base orthonormé. On prends un $\varepsilon > 0$ assez petit, et pour chaque $x \in B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_i (x^i)^2 < \varepsilon^2\}$ on définit $f(x) = \exp_p(x_0 E_0 + x_1 E_1)$.
Par le Lemme de Gauss, les champs $h_r = \frac{\partial h}{\partial r}$ et $h_\theta = \frac{\partial h}{\partial \theta}$ satisfont les équations

$$g(f_* h_r, f_* h_r) = 1, \quad g(f_* h_r, f_* h_\theta) = 0.$$

On peut réécrire cela en termes de la métrique $f^* g$:

$$(f^* g)(h_r, h_r) = 1, \quad (f^* g)(h_r, h_\theta) = 0,$$

et encore en termes de la métrique $h^*(f^* g) = (fh)^* g$:

$$(f^*(h^* g))(\partial_r, \partial_r) = 1, \quad (f^*(h^* g))(\partial_r, \partial_\theta) = 0,$$

Cela montre que la métrique $(fh)^* g$ est de la forme

$$(fh)^* g = \mathrm{d}r^2 + b(r,\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta^2$$

où $b(\theta, r)^2 = (fh)^* g(\partial_\theta, \partial_\theta)$. □

(b) Remarquer que le perimètre (i.e. la longueur du bord) de la boule $B_p(r)$ de rayon r autour de p est

$$\ell_g(\partial B_p(r)) = \int_0^{2\pi} b(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

(c) Trouver la fonction $b(r,\theta)$ dans les cas où M est le plan euclidean, la sphère, ou le plan hyperbolique.

Solution. C'est clair que $b(r,\theta)$ ne dépend que de r, vu que les rotations autour de p laissent la métrique inchangée. Alors on écrit $b(r) = b(r,\theta)$.
Dans le cas du plan euclidien, c'est bien connu que la métrique en coordonnées polaires s'obtient avec $b(r) = r$.
Dans le cas de la sphère de rayon 1 on va montrer que $b(r) = \sin r$. Par l'item anterior, il suffit de montrer que le perimètre de la boule $B_p(r)$ est $\ell_g(\partial B_p(r)) = 2\pi \sin(r)$.
Pour calculer ce perimètre on part de l'expression de la métrique sphérique selon la projection stéreographique : en dénotant $|x|^2 = \sum_i (x^i)^2$, on a $g = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2 \sum_i (\mathrm{d}x^i)^2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. D'abord on doit trouver la boule $B_p(r)$. C'est la region couverte par les géodésiques issues de l'origine de longueur r.
En vue de la symétrie de rotation autour de l'origine, une courbe de la forme $\gamma_v(t) = tv$, ou $v \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur unitaire, réparametrée par longueur, doit être une géodésique.

Pour trouver le bon paramétrage on calcule la longueur de γ_v. Dans un intervale $[0,\rho]$, la g-longueur de γ_v est

$$\ell_g(\gamma_v|_{[0,\rho]}) = \int_0^\rho \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\arctan(\rho).$$

L'inverse de la fonction $\rho \mapsto s = 2\arctan(\rho)$ est $s \mapsto \rho = \tan\left(\frac{s}{2}\right)$. Alors la courbe $\beta_v(s) = \gamma_v\left(\tan\left(\frac{s}{2}\right)\right) = v\,\tan\left(\frac{s}{2}\right)$ est paramétrée par longueur et donc une géodésique.
Par conséquent, la boule $B_p(r)$ est le disque de rayon euclidien $\rho = \tan\left(\frac{r}{2}\right)$. Son g-perimètre est son perimètre euclidien $2\pi\rho$ multiplié par le facteur conforme $\frac{2}{1+\rho^2}$.

$$\begin{aligned}\ell_g(\partial B_p(r)) = 2\pi\rho\frac{2}{1+\rho^2} &= 2\pi\tan\left(\frac{r}{2}\right)\frac{2}{1+\tan\left(\frac{r}{2}\right)^2} \\ &= 2\pi 2\sin\left(\frac{r}{2}\right)\cos\left(\frac{r}{2}\right) = 2\pi\sin(r),\end{aligned}$$

comme on devait montrer.
Dans le cas du plan hypérbolique on trouve $b(r) = \sinh(r)$. Les calculs sont similaires. □

(d) ~~Si la fonction a ne dépend pas de la coordonnée θ, montrer que M est localement isométrique à une surface de révolution.~~

(e) Essayer d'analyser la fonction a et trouver un développement de Taylor autour de $r = 0$. (Après, avec d'autres outils, on va pouvoir montrer que $a = r - \frac{K_p}{6}r^3 + O(r^4)$, où K_p est la courbure gaussienne de M dans le point p.)

Solution. Voir Proposition 3.8.1 du polycopié. □

6.5. (Coordonnées normales) Soit g une métrique riemannienne dans la boule ouverte $B^n_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i (x^i)^2 < \varepsilon^2\right\}$. On dit que la métrique est en *forme normale* de Riemann si pour chaque $v \in S^{n-1}$, la courbe $\gamma_v(t) = tv$ est une géodésique paramétrée par longueur. Dans ce cas-là, montrer que

(a) Pour chaque point $x \in B^n$ on a $d(0,x) = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$.

Solution. On dénote $|x| := \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$.
La g-longueur de $[0,x]$ est $|x|$, donc $d_g(0,x) \leq |x|$. Pour montrer qu'il n'y a pas de courbes plus courtes de 0 a x, on utilise l'exercice **6.3** avec la fonction $f(x) = |x|$; elle est C^∞ dans la variété $B^n_\varepsilon \setminus \{0\}$. Il suffit donc montrer que $\|\nabla f\| = 1$ pour tout x tel que $0 < |x| < \varepsilon$.
Allons-y. Le gradient ∇f est determiné par l'equation $\mathrm{d}f = \langle \nabla f, \cdot\rangle$, donc il faut d'abord calculer $\mathrm{d}f$. Ses composantes sont les dérivées partielles

$$(\mathrm{d}f)_j = \mathrm{d}f(\partial_j) = \partial_j f = \frac{x^j}{|x|}.$$

Alors, en utilisant la partie (**6.5**b) de l'exercice, on trouve

$$\mathrm{d}f(\partial_j) = \frac{x^j}{|x|} = \delta_{ij}\frac{x^i}{|x|} = g_{ij}\frac{x^i}{|x|} = g\left(\frac{x}{|x|}, \partial_j\right).$$

Cela montre que $\mathrm{d}f = g\left(\frac{x}{|x|}, \cdot\right)$, donc le gradient $\nabla f(x)$ est le champ radial unitaire $\frac{x}{|x|}$. Sa norme est 1 par le lemme de Gauss. □

(b) Pour chaque point $x \in B^n$ on a $g_{ij}(x)\,x^i = \delta_{ij}\,x^i$.

Solution. Cette équation est équivalente au lemme de Gauss ! Voyons ça.

Il faut rémarquer d'abord que les coordonnées normales sont étroitement liés à l'exponentielle riemannienne. En effet, si g est une métrique en forme normale de Riemann, l'exponentielle dans l'origine, $\exp_0$, est l'identité.

Le lemme de Gauss dit que, dans un système de coordonnées normales, le produit scalaire $g_x(V, W)$ entre deux vecteurs V, W dans un point x est égale au produit scalaire $g_0(V, W)$ entre le même paire de vecteurs transportés à l'origine 0 si un des deux vecteurs, disons V, est égal à x. (Cette affirmation peut sembler plus forte que le lemme de Gauss selon le polycopié, mais elle est en fait équivalente. Penser pour quoi.) Une fois accepté cette formulation du lemme de Gauss,

$$g_x(V, W) = g_0(V, W) \quad \text{pour tout } W \text{ et pour } V = x,$$

on peut la récrire en coordonnés (en prennant en compte que g_0 est le produit scalaire standard) sous la forme

$$g_{ij}(x)V^iW^j = \delta_{ij}V^iW^j \quad \text{pour tout } W^j \text{ et pour } V^i = x^i,$$

ou, plus simplement,

$$g_{ij}(x)x^iW^j = \delta_{ij}x^iW^j \text{ pour tout } W^j$$

et cela équivaut à

$$g_{ij}(x)x^i = \delta_{ij}x^i.$$

□

(c) Pour toute variété riemannienne (M, g) et tout point $p \in M$ il y a un système de coordonnées normales centré dans le point p, i. e., un paramétrage local $f : B^n_\varepsilon \to M$ tel que $f(0) = p$ et la métrique f^*g est en forme normale.

Solution. C'est suffisant de prendre une base orthonormée (E_i) de T_pM et définir $f(x) = \exp_p(\sum_i x^iE_i)$. □

(d) Dans le point $x = 0$ on a $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ et $\partial_i g_{jk}(0) = 0$ et les coefficients $c_{ijkl} = \partial_i\partial_j g_{kl}(0)$ satisfont les équations

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$$
$$c_{ijkl} + c_{jkil} + c_{kijl} = 0$$

Solution. La premièr équation est évidente par la symétrie des dérivées partielles $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ et la symétrie du tenseur métrique $g_{kl} = g_{lk}$. La deuxième équation est plus intéressant ; elle se trouve par example dans le livre de Spivak, *"A Comprehensive Introduction to Differential Geometry"*, Chap. 4B, Prop. 4. Pour la démontrer on dérive trois fois l'équation du lemme de Gauss

$$\begin{aligned} g_{ij}x^i &= \delta_{ij}x^i \\ \partial_k g_{ij}x^i + g_{kj} &= \delta_{kj} \\ \partial_l\partial_k g_{ij}x^i + \partial_k g_{lj} + \partial_l g_{kj} &= 0 \\ \partial_m\partial_l\partial_k g_{ij}x^i + \partial_l\partial_k g_{mj} + \partial_m\partial_k g_{lj} + \partial_m\partial_l g_{kj} &= 0. \end{aligned}$$

Dans l'origine ces équations deviennent

$$\begin{aligned} g_{kj} &= \delta_{kj} \\ \partial_k g_{lj} + \partial_l g_{kj} &= 0 \\ \partial_l \partial_k g_{mj} + \partial_m \partial_k g_{lj} + \partial_m \partial_l g_{kj} &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième équation équivaut à $\partial_k g_{lj} = 0$, comme on a vu dans l'exercice sur les coordonnées inertielles (en fait les coordonnés normales sont inertielles). La dernière équation équivaut à celle qu'on doit démontrer :

$$\partial_k \partial_l g_{mj} + \partial_m \partial_k g_{lj} + \partial_l \partial_m g_{kj} = 0.$$

□

6.6. Soient M, N variétés riemanniennes connexes, soient $p \in M$, $q \in N$, et soient $(E_i)_{0\leq i<n}$ et $(F_i)_{0\leq i<n}$ bases ortonormées de T_pM et T_qN respectivement. Montrer qu'il existe au maximum une isometrie $f : M \to N$ tel que $f(p) = q$ et $f_*E_i = F_i$.

Solution. On va ajouter l'hypothèse que M et N sont complètes, si non la preuve est plus difficile. Tout point p' peut être écrit sous la forme $p' = \exp_p v$, avec $v \in T_pM$. Alors on va utiliser le fait que une isométrie commute avec l'exponentielle

$$f(\exp_p v) = \exp_q(f_* v)$$

(Penser pour quoi ça est vraie.) On peut écrire $v = v^i E_i$ et $f_*(v) = v^i F_i$, donc

$$f(p') = f(\exp_p v) = \exp_q(f_* v) = \exp_q(v^i F_i).$$

Cela montre que l'isométrie f est determinée par les données p, q, E_i, F_i. □

6.7. Dans une surface de révolution paramétrée par $h(z, \theta) = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z)$ montrer qu'un cercle $z = z_0$ est géodésique si et seulement si $\cancel{h'(z_0) = 0}$ $f'(z_0) = 0$. (Il avait un erreur ici.)

Solution. Le champ de vecteurs ∂_θ est un champ de Killing, et les cercles $z = z_0$ sont des courbes integrales du champ, donc on peut utiliser l'exercice **6.10**b. □

6.8. Un champ de Killing dans une variété Riemannienne (M, g) est un champ de vecteurs X dont le flux Φ_X^t préserve la métrique (i.e. $\Phi_X^t : M \to M$ est une isométrie pour chaque t). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) X est de Killing.

(b) $\mathcal{L}_X g = 0$, où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie (voir **6.11**).

(c) L'operateur $\nabla X|_p : V \in T_pM \mapsto \nabla_V X \in T_pM$ est antisymétrique, i. e.

$$\langle \nabla_Z X, W\rangle + \langle Z, \nabla_W X\rangle = 0 \quad \text{pour chaque paire de vecteurs } Z, W \in T_pM.$$

(Cette équation s'apelle l'équation de Killing.)

Solution. L'équivalence entre les deux premières deux définitions est conséquence de **6.11**b. Quant à la troisième équation, elle équivaut à $\mathcal{L}_X g = 0$ parce que

$$(\mathcal{L}_X g)(Z, W) = \langle \nabla_Z X, W\rangle + \langle Z, \nabla_W X\rangle$$

On démontre ça en utilisant quelques propriétées de la dérivée de Lie (voir exercice **6.11**). On suppose que Z et W sont étendus à champs définis autour de p. Alors

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X g)(Z,W) &= X(g(Z,W)) - g(\mathcal{L}_X Z, W) - g(Z, \mathcal{L}_X W)\\ &= X(g(Z,W)) - g([X,Z],W) - g(Z,[X,W])\\ &= g(\nabla_X Z, W) + g(Z, \nabla_X W) - g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, W) - g(Z, \nabla_X W - \nabla_W X)\\ &= g(\nabla_Z X, W) + g(Z, \nabla_W X)\end{aligned}$$

comme on avait promis. □

6.9. Trouver tous les champs de Killing dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et dans le demi-plan de Poincaré trouver plusieurs champs de Killing linéairement indépendents.

Solution. Dans l'espace euclidien : Les isométries sont de la forme $x \mapsto Rx + b$ avec $b \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice orthogonal (i.e., tel que $R^*R = I_n$). Donc si V est un champs de Killing, son flux Φ^t est du type $\Phi^t(x) = R_t x + b_t$ avec $b_t \in \mathbb{R}^n$ et R_t matrice orthogonale, telles que $R_0 = I_n$ et $b_0 = 0$ car Φ^0 est la transformation identité. On peut récuper le champs V en dérivant Φ^t. On a

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi^t(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} R_t x + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} b_t = Ax + c$$

si on dénote $A = \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} R_t$ et $c = \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} b_t$. Le vecteur $c \in \mathbb{R}^n$ peut être n'importe quel. Par contre la matrice A doit être antisymétrique, i.e., tel que $A^* = -A$. Cela resulte d'appliquer l'operateur $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}$ à l'équation $R_t^* R_t = I_n$ comme suit

$$\begin{aligned}R_t^* R_t &= I_n\\ \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (R_t^* R_t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} I_n\\ A^* I_n + I_n^* A &= 0\\ A^* + A &= 0.\end{aligned}$$

On conclut que tout champ de Killing V est de la forme $V(x) = Ax + c$ avec $c \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice antisymétrique. Réciproquement, un champs de ce forme-là est de Killing parce qu'il satisfait l'équation de Killing. En effet, sa dérivée covariante est $\nabla_Z V = AZ$ (c'est la dérivée habituelle car la métrique est euclidienne), donc

$$\langle \nabla_Z V, W\rangle + \langle Z, \nabla_W V\rangle = \langle AZ, W\rangle + \langle Z, AW\rangle = \langle Z, A^* W\rangle + \langle Z, AW\rangle = 0.$$

Dans la sphère : $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: les isométries sont de la forme $f(x) = R(x)$ où $R \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ est orthogonal, et les champs de Killing sont de la forme $V(x) = Ax$ où $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ est une matrice antisymétrique.
Dans l'espace hyperbolique : Pour pouvoir utiliser le même type de raisonement que dans la sphère, on utilise le modèle hyperboloïde

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x,x) = -1\},$$

où g est la métrique de Lorentz–Minkowski ($g(v,w) := v^* G w$ avec $G_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$). La matrice R doit être orthogonal par rapport à G (i.e. $R^* G R = G$) et la matrice A doit être antisymétrique par rapport à G (i.e. $A^* G = -GA$). □

6.10. Soit X un champ de Killing dans une variété riemannienne (M, g).

(a) (Théorème de Noether) Montrer que si γ est une géodésique, alors $\langle X, \gamma'(t)\rangle$ est constant.

Solution. Si X est un champs de Killing, l'équation de Killing

$$\langle \nabla_Z X, W\rangle + \langle Z, \nabla_W X\rangle = 0$$

dans le cas $Z = W$ donne $\langle \nabla_V X, Z\rangle = 0$. Donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X, \gamma'\rangle = \langle \nabla_{\gamma'} X, \gamma'\rangle = 0,$$

ce qui montre que $t \mapsto \langle X, \gamma'\rangle$ est constante.

En fait on peut montrer que si $\langle X, \gamma'(t)\rangle$ est constant le long de toute géodésique γ, alors X est un champ de Killing. En effet, le flux Φ_X^s appliqué à une géodésique $\gamma : [a, b] \to M$ produit une variation $\gamma_s(t) = \Phi_X^s(\gamma(t))$ qui préserve la longueur. On montre ça avec la formule de variation première

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \ell(\gamma_s) = \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \gamma''(t)\rangle = 0.$$

□

(b) Si $p \in M$, montrer que la courbe intégrale de X qui passe par le point p est une géodésique si et seulement si $\cancel{\mathrm{d}_p \|X\| = 0}$ $\mathrm{d}_p(\|X\|^2) = 0$.

Solution. Soit γ la courbe intégrale de X tel que $\gamma(0) = p$. Comme elle est intégrale, elle satisfait les équations $\gamma'(t) = X|_{\gamma(t)}$ et $\gamma''(t) = \nabla_X X|_{\gamma(t)}$.

On considère la fonction $f(y) = \frac{1}{2}\|X|_y\|^2$. On doit montrer que γ est géodésique si et seulement si $\mathrm{d}f|_p = 0$. La fonction f est invariant par le champ X parce que

$$X(f) = \langle \nabla_X X, X\rangle = 0$$

par la antisymétrie de l'operateur $Y \mapsto \nabla_Y X$. Par conséquent, $\mathrm{d}f|_p = 0$ si et seulement si $\mathrm{d}f|_{\gamma(t)} = 0$ pour tout t.

Pour étudier l'acceleration γ'' on fait le produit scalaire avec un vecteur arbitraire $Y \in T_pM$

$$\begin{aligned}\langle Y, \gamma''(0)\rangle &= = \langle Y, \nabla_X X|_p\rangle \\ &= -\langle \nabla_Y X, X|_p\rangle = -\langle \nabla_Y X, X|_p\rangle = -Y(f)\end{aligned}$$

Cela montre que $\gamma''(0) = 0$ si et seulement si $\mathrm{d}f|_p = 0$. Mais $\mathrm{d}f|_p = 0$ équivaut à que $\mathrm{d}f = 0$ le long de γ. On conclut que $\gamma''(t) = 0$ pour tout t si et seulement si $\mathrm{d}f|_p = 0$. □

6.11. (Dérivée de Lie) Soit X un champ de vecteurs sur une varieté compacte M et soit Φ_t le flux associé.

Soit A un champ de tenseurs C^∞ sur M. Par example, il peut être soit une fonction $f \in C^\infty(M)$, soit un camps de vecteurs $Y \in \Gamma(M)$, soit un champ g de fonctions bilinéaires $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.

On definit la dérivée de Lie de A selon le champ X comme

$$\mathcal{L}_X A := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A_t \quad \text{où } A_t := {\Phi_t}^* A.$$

(a) Prouver les formules suivantes :

i. $\mathcal{L}_X f = X(f)$

Solution.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X f|_p &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ({\Phi_t}^* f)(p) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\Phi_t(p)) \\
&= (\mathrm{d}_p f)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_t(p)\right) \\
&= \mathrm{d}f|_p(X|_p) = X(f)|_p
\end{aligned}$$

□

ii. $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\mathcal{L}_X f)$

Solution. On rémarque d'abord que la fonction $H(t,y) = ({\Phi_t}^* f)(y) = f(\Phi_t(y))$ est C^∞, donc on peut dériver par rapport à t et à y et èchanger l'ordre de dérivation. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathcal{L}_X f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((\mathcal{L}_x f)(y)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} ({\Phi_t}^* f)(y) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial y}({\Phi_t}^* f)(y) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{d}({\Phi_t}^* f) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} {\Phi_t}^*(\mathrm{d}f) \\
&= \mathcal{L}_x(\mathrm{d}f).
\end{aligned}$$

□

iii. $\mathcal{L}_X$ est une dérivation, donc, par example, si ω est une 1-forme et Y est un champ de vecteurs, alors la dérivée de Lie de la contraction $\omega(Y)$ se calcule selon la regle de Leibnitz

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y)$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\omega(Y)) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ({\Phi_t}^*(\omega(Y))) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (({\Phi_t}^*\omega)({\Phi_t}^* Y)) \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ({\Phi_t}^*\omega)\right)(({\Phi_t}^* Y)|_{t=0}) + ({\Phi_t}^*\omega)|_{t=0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ({\Phi_t}^* Y)\right) \\
&= (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y)
\end{aligned}$$

□

iv. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

Solution. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ on a

$$(\mathcal{L}_X Y)(f) = \mathcal{L}_X(Y(f)) - Y(\mathcal{L}_X f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f),$$

et cela montre que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. Ici on a utilisé le fait que

$$\mathcal{L}_X(Y(f)) = (\mathcal{L}_X Y)(f) + Y(\mathcal{L}_X f).$$

Pour prouver cette équation on écrit $Y(f)$ comme une contraction $Y(f) = (\mathrm{d}f)(Y)$ et on applique les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(Y(f)) &= \mathcal{L}_X((\mathrm{d}f)(Y)) \\
&= (\mathcal{L}_X(\mathrm{d}f))(Y) + (\mathrm{d}f)(\mathcal{L}_X Y) \\
&= (\mathrm{d}(\mathcal{L}_X f))(Y) + (\mathrm{d}f)(\mathcal{L}_X Y) \\
&= Y(\mathcal{L}_X f) + (\mathcal{L}_X Y)(f)
\end{aligned}$$

□

v. $(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$.

Solution. Similaire aux précédentes vu que $g(Y, Z)$ est une contraction de g, Y, Z. □

vi. Naturalité de la dérivée de Lie : Si $h : M \to N$ est un diffeomorphisme, et $X \in \Gamma(M)$ et $Y \in \Gamma(N)$ sont des champs de vecteurs relacionées par h (i.e. $h_* X|_p = Y|_{h(p)}$ pour tout $p \in M$), alors pour tout champs tensoriel A sur N on a

$$\mathcal{L}_Y(h^* A) = h^*(\mathcal{L}_X A).$$

Indication : Il convient de dénoter X_t et Y_t les flux de X et Y. On doit utiliser le fait que $h \circ Y_t = X_t \circ h$.

Solution.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y(h^* A) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} {Y_t}^*(h^* A) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (h \circ Y_t)^* A \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (X_t \circ h)^* A \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} h^*({X_t}^* A) \\
&= h^* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ({X_t}^* A) \\
&= h^*(\mathcal{L}_X A).
\end{aligned}$$

On va justifier le pas $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} h^*((X_t)^*A) = h^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} ((X_t)^*A)$. Pour ça on dénote $B_t = (X_t)^*A$ et on fixe un point p. Alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} h^*B_t\right)\bigg|_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (h^*B_t)|_p \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (\mathrm{d}h|_p)^*(B_t|_{h(p)}) \\ &= (\mathrm{d}h|_p)^* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} B_t|_p\right)\end{aligned}$$

parce que la transformation $(\mathrm{d}h|_p)^*$ que rappelle tenseurs dans le point $h(p)$ à tenseurs dans le point p opère linéairement. □

(b) Montrer que $\mathcal{L}_X A = 0$ si et seulement si A est invariant par tous les diffeomorphismes Φ_t, i.e., ${\Phi_t}^*A = A$.
Indication : Prouver et utiliser la formule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau} A_t = {\Phi_\tau}^*(\mathcal{L}_X A).$$

Solution. Ça qu'on doit montrer est conséquence directe de la formule. Pour prouver la formule on fait

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau} A_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} A_{t+\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau} {\Phi_{t+\tau}}^*A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau} {\Phi_t}^*({\Phi_\tau}^*A) = \mathcal{L}_X({\Phi_\tau}^*A) = {\Phi_\tau}^*(\mathcal{L}_X A).$$

Dans le dernier pas on à appliqué la naturalité de la dérivée de Lie au diffeomorphisme Φ_τ. □

(c) Si $X|_p = 0$, cela implique que $(\mathcal{L}_X A)|_p = 0$?

Solution. L'implication est valable si A est une champ scalaire f, parce que on a $\Phi_t(p) = p$ pour tout t et alors

$$f_t|_p = {\Phi_t}^*f|_p = f(\Phi_t(p)) = f|_p$$

pour tout t, donc $\mathcal{L}_X f|_p = 0$. Si A est un tenseur de degré supérieur, le pullback ${\Phi_t}^*A|_p$ engage la differential $\mathrm{d}\Phi_t|_p$, que n'est pas forcement nulle (par example, dans $\mathbb{R}^2$, si $p = 0$ et $X(x) = x_0\partial_1 - x_1\partial_0$). □

(d) Qu'est ce-que se passe si M n'est pas compacte ?

Solution. Dans ce cas l'expression $\Phi_t(p)$ n'est pas forcement défini pour tout paire $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$, mais elle est defini dans un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times M$ qui contient $\{0\} \times M$, donc la dérivée de Lie est bien définie. □