12.1. Une variété de Cartan–Hadamard est une variété Riemannienne complète, simplement connexe et à courbure sectionelle non-positive. Dans une telle variété M, montrer que si $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to M$ sont des géodésiques, alors la fonction $t \mapsto d(\gamma_0(t), \gamma_1(t))$ est convexe.
Indication : Il peut être utile de montrer que l'exponentielle globale

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}: & TM & \longrightarrow & M \times M \\ & (p,v) & \longmapsto & (p, q = \exp_p(v)) \end{array}$$

est un difféomorphisme. Après il faut utiliser la formule de variation seconde.

Solution. Selon le théorème de Cartan–Hadamard, pour chaque point $p \in M$, l'exponentielle ponctuelle $\exp_p : T_pM \to M$ est bijective. Cela implique que l'exponentielle global es bijective. En plus, sa différentielle est de la forme

$$\mathrm{d}_{p,v}\,\mathrm{Exp} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{T_pM} & 0 \\ * & \mathrm{d}_v \exp_p \end{pmatrix},$$

donc régulière. Cela implique que l'exponentielle globale est un difféomorphisme. L'application inverse est

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}^{-1}: & M \times M & \longrightarrow & TM \\ & (p,q) & \longmapsto & (p, v = \exp_p^{-1}(q)) \end{array}$$

Soient $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to M$ des géodésiques. Pour $s \in [0,1]$ et $t \in [a,b]$ on définit $\gamma_s(t) = \exp_{\gamma_0(t)}(s\,V(t))$, où $V(t) = \exp^{-1}_{\gamma_0(t)}(\gamma_1(t))$. Remarquer que $\gamma_s = \gamma_0$ si $s = 0$, et que $\gamma_s = \gamma_1$ si $s = 1$. Remarquer aussi que V est un champs de vecteurs C^∞ le long de γ_0 parce que $(p,q) \mapsto \exp_p^{-1}(q)$ est une application C^∞.
Pour chaque t, la courbe $\eta_t : s \mapsto \gamma_s(t)$ est un géodésique de longueur $\ell(\eta_t) = d(\gamma_0(t), \gamma_1(t))$, donc on doit motrer que $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ell(\eta_t) \geq 0$. Cela est possible en utilisant la formule de variation seconde (Théorème. 4.3.1 du polycopié). Le terme de bord est nul parce que les extrèmités $\eta_t(0) = \gamma_0(t)$ et $\eta_t(1) = \gamma_1(t)$ parcourent des géodésiques. L'intégrant est positif parce que la courbure est négative, donc on conclut que $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ell(\eta_t) \geq 0$. $\square$

12.2. Prouver le théorème 4.5.1 du polycopié : On peut réécrire la formule de variation seconde sous la forme suivante : Si $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ est une variation de la géodésique $\gamma : [a,b] \to M$ (parametrée par longueur), alors

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} \ell(\varphi_s) = \left(\langle \nabla_Y Y, \dot\gamma\rangle + \langle \nabla_t Y^\perp, Y^\perp\rangle\right)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \langle J(Y^\perp), Y^\perp\rangle\,\mathrm{d}t$$

où $\ell = \ell(\gamma)$, $Y := \frac{\partial\varphi}{\partial s}$ et $J(Z) = (\nabla_t)^2 Z - R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma$.

Solution. On commence avec la formule de variation second du Théorème 4.3.1. On réécrit le terme $\int_0^1 \|\nabla_t Y^\perp\|^2 \mathrm{d}t$ en utilisant l'équation

$$\left\|\nabla_t Y^\perp\right\|^2 = \langle \nabla_t Y^\perp, \nabla_t Y^\perp\rangle = X(\langle \nabla_t Y^\perp, Y^\perp\rangle) - \langle \nabla_t \nabla_t Y^\perp, Y^\perp\rangle$$

On obtient

$$\int_0^1 \|\nabla_t Y^\perp\|^2\,\mathrm{d}t = \langle \nabla_t Y^\perp, Y^\perp\rangle\big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \langle (\nabla_t)^2 Y^\perp, Y^\perp\rangle\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, on sait que

$$R(\dot\gamma, Y, \dot\gamma, Y) = R(\dot\gamma, Y^{\perp}, \dot\gamma, Y^{\perp}) = \langle R(\dot\gamma, Y^{\perp})\dot\gamma, Y\perp\rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\left\|\nabla_t Y^{\perp}\right\|^2 + R(\dot\gamma, Y, \dot\gamma, Y)\right) \mathrm{d}t &= \langle \nabla_t Y^{\perp}, Y^{\perp}\rangle\big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \langle (\nabla_t)^2 Y^{\perp}, Y^{\perp}\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \langle R(\dot\gamma, Y^{\perp})\dot\gamma, Y^{\perp}\rangle \mathrm{d}t \\ &= \langle \nabla_t Y^{\perp}, Y^{\perp}\rangle\big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \langle J(Y^{\perp}), Y^{\perp}\rangle \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

12.3. (Théorème de Synge) Soit M une variété Riemannienne compacte de dimension n à courbure sectionnelle positive.

(a) Si n es pair et M est orientable, alors M est simplement connexe.

(b) Si n es impair, alors M est orientable.

Indication :
On peut utiliser le fait que dans chaque classe d'homotopie non-triviale de courbes fermées il y a une courbe γ de longueur minimale ; cette courbe est une géodésique fermée.
Construire un champ V le long de γ qui soit parallèle, orthogonal à γ' et non nul. Utiliser la formule de variation seconde.

Solution. Soit M orientable, de dimension n pair et à courbure sectionnelle positive. On suppose qu'elle n'est pas simplement connexe, donc il y a une classe d'homotopie non-triviale de courbes fermées. Soit $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$ une courbe de longueur minimale dans la classe d'homotopie. Elle est une géodésique fermée. Soit $p = \gamma(0)$, soit

$$T_pM^{\perp} = \{v \in T_pM : \langle v, \gamma'(0)\rangle = 0\},$$

et soit $A : T_pM^{\perp} \to T_pM^{\perp}$ l'application de transport parallèle. Elle est une isométrie linéaire et qu'elle préśerve l'orientation, donc on peut utiliser le lemme suivant d'algèbre linéaire :
Lemme : Soit $A : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ une isométrie linéaire tel que $\det(A) = (-1)^n$. Alors A fixe un vecteur non nul. (On omet la démostration de ce lemme.)
Soit V_0 un vecteur non-nul fixée par A, et soit $V(t)$ le champs parallèle le long de γ tel que $V(0) = V_0$.
On considère la variation de γ suivante : $\gamma_s(t) = \exp_{\gamma(t)}(s\,V(t))$. La formule de variation seconde montre que $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=0} \ell(\gamma_s) < 0$, et cela contradit la minimalité de γ.
Dans le cas où n est impair la solution est similaire. On suppose qu'il y a une courbe qu'inverse l'orientation, on prends une courbe minimale γ dans la classe d'homotopie, on trouve un champs parallèle orthogonal et on fait une variation. □