EPFL - Printemps 2020 — M. Troyanov, M. Cossarini

Géométrie Riemannienne — **Exercices**

Série 7 – avec solutions — 29 mai 2020

7.1. Montrer qu'une variété riemannienne homogène (i.e telle qu'il existe un groupe d'isométries agissant transitivement) est complète.

Solution. Soit M une variété riemannienne homogéne. Soit $p \in M$. L'exponentielle $\exp_p$ est definie dans un voisinage de l'origine de T_pM, donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $\|v\| \leq \varepsilon$, alors $\exp_p(v)$ est défini. Par conséquence, toute géodésique à vitesse unitaire qui arrive dans le point p peut être prolongée pendant un temps $\geq \varepsilon$. Vu que la variété est homogéne, cette propriété du point p est valable aussi pour les autres points. Donc toute géodésique peut être prolongée toujours ε en plus. Cela implique que M est complète. $\square$

7.2. On suppose qu'une variété riemannienne (M, g) est complète et isotrope en chaque point (i.e, pour tout point p le groupe des isométries G_p qui fixent p est transitif sur les vecteurs de mêmes normes de T_pM). Montrer que M est homogène.
Indication : étant donné deux points, considérer le milieu de la géodésique qui les rejoint.

Solution. Soient $a, b \in M$, soit $\gamma : [0, 2] \to M$ une géodésique de a à b, soit $p = \gamma(1)$ et soit $v = \gamma'(1)$. Rémarquer que $b = \exp_p(v)$ et $a = \exp_p(-v)$. Soit $f : M \to M$ une isométrie qui fixe le point p et telle que $f_*(v) = -v$. Alors

$$f(b) = f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(f_* v) = \exp_p(-v) = a.$$

L'équation $f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(f_* v)$ est la naturalité de l'exponentielle. $\square$

7.3. **(Naturalité de l'exponentielle)** Soit $\varphi : M \to N$ une isométrie entre deux variétés Riemanniennes. Montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "d_p\varphi"] \arrow[d, "\exp_p"'] & T_{\varphi(p)}N \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\
M \arrow[r, "\varphi"] & N
\end{tikzcd}$$

Solution. Rappellons la définition de l'exponentielle $\exp_p$: pour chaque vecteur $v \in T_pM$, s'il existe une géodésique $\gamma_v : [0, 1] \to M$ tel que $\gamma_v'(0) = v$, le point $\exp_p(v)$ est defini comme $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$. Alors la courbe $\varphi \circ \gamma_v$ est une géodésique dans N avec vitesse initiale $(\varphi \circ \gamma_v)'(0) = \varphi_* v$, donc

$$\exp_{\varphi(p)}(\varphi_* v) = (\varphi \circ \gamma_v)(1) = \varphi(\gamma_v(1)) = \varphi(\exp_p(v)).$$

$\square$

7.4. Soit (M, g) est une variété riemannienne connexe et soient φ et ψ deux isométries de M telle qu'il existe un point $p \in M$ pour lequel

$$\varphi(p) = \psi(p) \quad \text{et} \quad d_p\varphi = d_p\psi.$$

Montrer que φ et ψ coïncident partout.

Solution. Dans l'exercice 6.6 on à déjà prouvé ça dans le cas où M est complète. Dans le cas général, on définit l'ensemble

$$A = \{q \in M \mid \varphi(q) = \psi(q) \text{ et } \mathrm{d}_p\varphi = \mathrm{d}_p\psi\}.$$

On doit montrer que $A = M$. D'abord on voit que A est fermé et qu'il contient le point p, donc il sufit de montrer que A est ouvert. Soit $q \in A$. Si $x \in M$ est assez proche de q, il existe un vecteur $v \in T_qM$ tel que $\exp_q(v) = x$, et donc

$$\varphi(x) = \varphi(\exp_q(v)) = \exp_{\varphi(q)}(\varphi_* v) = \exp_{\psi(q)}(\psi_* v) = \psi(\exp_q(v)) = \psi(x).$$

Cela montre que les fonctions φ et ψ coincident dans un voisinage de q, et donc leurs dérivées doivent coincider aussi. Cela montre que A contient un voisinage de q, donc A est ouvert. □

7.5. (*) Soit (M, g) une variété riemannienne complète, connexe et non compacte. Montrer qu'il existe une courbe $\gamma : [0, +\infty[$ telle que pour tous $s, t > 0$,

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$$

On dit qu'une telle courbe est un rayon géodésique.

Solution. Le diamètre de M est infini parce que M est complète et non compacte.
Soit $p \in M$. Pour chaque entier $n \geq 0$ soit $x_n \in M$ tel que $a_n := d(p, x_n) \geq n$, et soit $v_n \in T_pM$ vecteur unitaire tel que $\exp_p(a_n v_n) = x_n$. Soit v un point d'accumulation des vecteurs v_n. On affirme que $\gamma_v : [0, +\infty)$ est un rayon géodésique. En effet, supposons que il existe un $t \geq 0$ tel que $d(p, \gamma_v(t)) = t - \varepsilon < t$. Alors pour v_n assez proche de v, on a $d(p, \gamma_{v_n}(t) < t - \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, si $n > t$, alors la géodésique γ_{n_n} est minimisante dans l'intervale $[0, a_n]$, donc $d(p, \gamma_{v_n}(t) = t$. Cette contradiction montre que $d(p, \gamma_v(t)) = t$ pour tout $t \geq 0$. □

7.6. Soit (M, g) une variété Riemannienne et soit $f_p : M \to \mathbb{R}$ définie par $f_p(q) = d_g(p, q)$, où d_g est la distance induite par la métrique g.
Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U} \subseteq M$ de p tel que f_p est différentiable sur $\mathcal{U} \setminus \{p\}$ et que pour tout $q \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$,

$$\operatorname{grad}(f_p)_q = \dot{\gamma}(f_p(q))$$

où γ est la géodésique unitaire de p à q.

Solution. On peut prendre $\mathcal{U} = B(p, r)$ où r est un rayon de normalité dans le point p. Voir exercice 8.3. □