9.1. Arnaud et Bernard jouent le jeu suivant. Arnaud definit une metrique $g = g_{ab}(y)$ dans un entourage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Ensuite Bernard doit faire un changement de coordonnées $y = f(x)$ (sans déplacer l'origine) de façon que la métrique resultante, $h = h_{ij}(x) = f^*g$, soit aussi similaire que possible à la métrique Euclidienne en ce qui concerne à la valeur des coefficients h_{ij} et leurs dérivées partielles dans l'origine.

(a) Écrire les coefficients h_{ij} et leurs dérivées partielles jusqu'a l'ordre k ($k = 0, 1, 2$) dans l'origine en termes de la valeur de f et ses dérivées jusqu'a l'ordre $k + 1$.

Solution.

$$\begin{aligned}
h_{kl}(x) =& g_{cd}(y)\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} \\
\partial_j h_{kl} =& \partial_b g_{cd}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} + g_{cd}\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} + g_{cd}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j\partial x^l} \\
\partial_{ij} h_{kl} =& \partial_{ab} g_{cd}\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} + \partial_b g_{cd}\frac{\partial^2 y^b}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} + \partial_b g_{cd}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} + \partial_b g_{cd}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial^2 y^d}{\partial x^i\partial x^l} \\
&+ \partial_b g_{cd}\frac{\partial y^b}{\partial x^i}\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} + g_{cd}\frac{\partial^3 y^c}{\partial x^i\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial y^d}{\partial x^l} + g_{cd}\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial^2 y^d}{\partial x^i\partial x^l} \\
&+ \partial_b g_{cd}\frac{\partial y^b}{\partial x^i}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j\partial x^l} + g_{cd}\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j\partial x^l} + g_{cd}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial^3 y^d}{\partial x^i\partial x^j\partial x^l}
\end{aligned}$$

Ces équations sont valables partout, en particulier dans l'origine. □

(b) Montrer que, une fois choisis les derivées premières $\partial_i f^a(0)$, il y a exactement une manière de régler les derivées secondes de $\partial_i\partial_j f^a(0)$ de façon que $\partial_j h_{kl}(0) = 0$.

Solution. On a vu ça dans l'exercice 6.1. □

(c) Montrer qu'en général il n'est pas possible de assurer que $\partial_i\partial_j h_{kl}(0) = 0$ par manque de degrées de liberté. Combien de degrées manquent ?

Solution. Bernard peut choisir les dérivés premières $\partial_i f^a(0)$ de n'importe quelle manière. Une fois fait ça, il a une manière de choisir les dérivés secondes $\partial_i\partial_j f^a(0)$ de façon que $\partial_j h_{kl}(0) = 0$. Leur valeur dépend de $g_{cd}(0)$ et de $\partial_b g_{cd}(0) = 0$. Finalement, en ce qui concerne aux dérivées secondes $\partial_a\partial_b g_{cd}(0)$, dont il y a $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ nombres réelles indépendents, Arnaud peut choisir n'importe quelle valeur. Par contre, parmi les dérivées $\partial_i\partial_j\partial_k f^c(0)$ il y a seulement $\frac{(n+2)(n+1)n^2}{6}$ nombres indépendents que Bernard peut controler. Alors Bernard manque

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{(n+2)(n+1)n^2}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

degrées de liberté.

Commentaire : Le nombre $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ est la dimension de l'espace vectoriel des tenseurs R_{ijkl} avec les symétries d'un tenseur de Riemann

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$$

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

□

(d) Dans le cas où M est une surface, dans le système de coordonnées normales (cf. exercice 6.5), montrer que toutes les dérivées $\partial_i \partial_j h_{kl}$ s'écrivent en termes d'un seul nombre. (Ce nombre est la courbure de Gauss.)

Solution. Les 16 nombres $c_{ijkl} = \partial_i \partial_j g_{jk}(0)$ sont de 5 types :
— type PP (pure-pure), par example $\partial_0 \partial_0 g_{00}$,
— type PP'(pure-pure'), par example $\partial_0 \partial_0 g_{11}$,
— type PM (pure-mélangé), par example $\partial_0 \partial_0 g_{01}$,
— type MP (mélangé-pure), par example $\partial_0 \partial_1 g_{00}$,
— type MM (mélangé-mélangé), par example $\partial_0 \partial_1 g_{01}$.
Les termes de type PP et PM sont nuls parce que, par example, dans la ligne $x^1 = 0$ on a $g_{00} = 1$ et $g_{01} = 0$, donc

$$\partial_0 \partial_0 g_{00}(0) = \partial_0 \partial_0 g_{01}(0) = 0.$$

Les termes de type MP sont nuls aussi, parce que de l'équation

$$c_{ijkl} + c_{jkil} + c_{kijl} = 0$$

(prouvé dans l'exercice 6.5) on obtient avec $(ijkl) = (0100)$

$$\partial_0 \partial_1 g_{00} + \partial_1 \partial_0 g_{00} + \partial_0 \partial_0 g_{10} = 0.$$

Ici le troisième terme est nul, et les deux premières sont égales et donc nuls aussi. Cela montre que $\partial_0 \partial_1 g_{00} = 0$. Il reste analyser les termes de type MM et PP'. De la même équation avec $(ijkl) = (0101)$ on obtient

$$\partial_0 \partial_1 g_{01} + \partial_1 \partial_0 g_{01} + \partial_0 \partial_0 g_{11} = 0,$$

et d'ici on voit que

$$\partial_0 \partial_0 g_{11} = -2 \partial_0 \partial_1 g_{01}.$$

donc il suffit de connaître $\partial_0 \partial_1 g_{01}(0)$ pour calculer tous les autres $\partial_i \partial_j g_{kl}(0)$.
Commentaire : Dans l'exercice 11.4 on verra que $\partial_0 \partial_1 g_{01}(0) = -\frac{1}{3} R_{0101}(0) = \frac{1}{3} K(0)$, où K est la courbure sectionnelle ou de Gauss. □

9.2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

(a) Trouver toutes les connexions qui ont les mêmes géodésiques que la connexion de Levi–Civita.

Solution. Soit ∇ une connexion dans un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$. On dénote $\Gamma_x(V, W) := {\Gamma_{ij}}^k|_x V^i W^i \, \partial_k$ pour tout $x \in U$, $V, W \in \mathbb{R}^n$. L'acceleration covariante d'une courbe γ est

$$\nabla^2 \gamma = \gamma'' + \Gamma(\gamma', \gamma')$$

et les géodésiques sont les courbes à acceleration covariante nulle. La connexion ∇ est la connexion de Levi–Civita si et seulement si $\Gamma = 0$, et une connexion a les mêmes géodésiques que la connexion de Levi–Civita
si et seulement si $\Gamma_x(V, V) = 0$ pour tout $V \in \mathbb{R}^n$ et tout $x \in U$,
si et seulement si $\Gamma_x(V, W) = -\Gamma(W, V)$ pour tout paire de vecteurs $V, W \in \mathbb{R}^n$ et tout $x \in U$. si et seulement si ${\Gamma_{ij}}^k|_x = {\Gamma_{ji}}^k|_x$ pour tout $x \in U$. □

(b) Si $n = 3$, parmi cettes connexions, trouver celles qui sont compatibles avec la métrique euclidienne. Réfléchir sur le mot "torsion".

Solution. Soit $n \geq 3$, et soit ∇ une connexion qui a les mêmes géodésiques que la connexion de Levi–Civita. Alors ∇ est compatible avec la métrique euclidienne si et seulement si pour toute courbe γ et tout paire de champs V, W le long de γ

$$\langle V, W\rangle' = \langle \nabla_{\gamma'} V, W\rangle + \langle V, \nabla_{\gamma'} W\rangle$$
$$\langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = \langle V' + \Gamma(\gamma', V), W\rangle + \langle V, W' + \Gamma(\gamma', W)\rangle 0 \quad = \langle \Gamma(\gamma', V), W\rangle + \langle V, \Gamma(\gamma', W)\rangle$$

Donc pour tout $x \in U$ et tout $Z \in \mathbb{R}^n$, la transformation linéaire $V \mapsto \Gamma_x(Z, V)$ doit être antisymétrique. Alors la transformation

$$(Z, V, W) \mapsto \langle \Gamma_x(Z, V), W\rangle$$

doit être antisymétrique dans le paire (Z, V) et dans le paire (V, W), donc elle est un multiple du déterminant. Cela équivaut à que $\Gamma_x(V, W) = a_x V \times W$, où $\cdot \times \cdot$ est le produit vectoriel et $a \in C^\infty(U)$. Par conséquent, le transport parallèle le long d'une géodésique fait tourner les vecteurs autour de la direction de la géodésique. Voici un possible origine du mot "torsion". □

9.3. Rappeler ce qu'est un 2-plan $\Pi \subset TM$ dans une variété Riemannienne (M, g) et la courbure sectionnelle $K(\Pi)$. Puis démontrer que cette notion est bien définie (i.e. indépendante des choix effectués dans la définition).

Solution. Voir Prop. 4.1.5 du polycopié. □

9.4. Montrer que le tenseur de Ricci est symétrique : $\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X)$.

Solution. Si $p \in M$, $X, Y \in T_pM$ et $(E_i)_i$ est une base orthonormée de T_pM, alors

$$\mathrm{Ric}(X, Y) := -\sum_i \overline{R}(V, E_i, W, E_i) = -\sum_i \overline{R}(W, E_i, V, E_i) = \mathrm{Ric}(Y, X).$$

□

9.5. Dans une variétée riemannienne (M, g), éxprimer la courbure sectionnelle de la métrique $g' = a^2 g$ en fonction de la courbure sectionelle de g.

Solution. La métrique g' a la même connexion de Levi–Civita que g, donc le tenseur de courbure de Riemann de type $\binom{3}{1}$ est le même : $R'(X, Y)Z = R(X, Y)Z$. Alors la courbure sectionelle d'un plan Π generée par deux vecteurs X, Y est

$$K'(\Pi) = -\frac{g'(R'(X, Y)X, Y)}{g'(X, X)\, g'(Y, Y) - g'(X, Y)^2} = -\frac{a^2}{a^4} \frac{g(R'(X, Y)X, Y)}{g(X, X)\, g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = \frac{1}{a^2} K(\Pi).$$

□

9.6. On considère une surface riemannienne où la métrique est donnée en "coordonnées polaires" par

$$g = \mathrm{d}r^2 + f(r, \theta)^2\, \mathrm{d}\theta^2.$$

(a) Montrer que la courbure sectionnelle $K(r,\theta)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + Kf = 0.$$

Cette équation s'appelle l'équation de Jacobi dans le cas des surfaces. Elle réapparaîtra dans le cours dans le cas général.

Solution. On cherche à calculer

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \left\langle \nabla_r\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} - \nabla_\theta\nabla_r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle$$

avec le moins de calculs possibles (attention : par convention cette expression est l'opposée de la courbure).

Montrons d'abord que $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}$.

Pour celà on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial r}f(r,\theta)^2 = 2f(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta).$$

Mais d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_r\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle$$

et aussi

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle.$$

On en déduit que $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}$ n'a qu'une composante selon $\frac{\partial}{\partial \theta}$, disons $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} = \alpha(r,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$, et que

$$\alpha = \frac{1}{f^2}\left\langle \alpha\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{1}{f^2}\left\langle \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)}{f(r,\theta)}$$

comme on voulait.

Pour la suite, on sait déjà que

$$\nabla_r\frac{\partial}{\partial r} = 0$$

car les courbes θ =constante sont géodésiques.

Vu l'expression de la courbure que l'on cherche à calculer, il n'y a pas besoin d'expliciter $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}$. (On pourrait le faire, par un raisonnement analogue, on trouverait d'ailleurs $\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)f(r,\theta)\frac{\partial}{\partial r}$.)

On a maintenant tout ce qu'il faut pour calculer la courbure (à partir de maintenant seules les dérivées partielles de f par rapport à r sont utilisées ; on les notes pour simplifier f') :

$$\nabla_r\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} - \nabla_\theta\nabla_r\frac{\partial}{\partial r} = \nabla_r\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial r} = \frac{f''f-(f')^2}{f^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{f'}{f}\nabla_r\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{f''}{f}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Ainsi

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = f''f$$

Pour avoir la courbure sectionnelle, il faut encore diviser par la norme au carré de $\frac{\partial}{\partial\theta}$ (et prendre l'opposé). On trouve alors

$$-K = \frac{f''}{f},$$

ce qu'on voulait. $\square$

(b) Justifier que

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = 1.$$

pour tout θ.

Solution. Par la symétrie du problème on peut supposer que $\theta = 0$. Rappellons comment on construit les coordonnées polaires. On commence avec une métrique h en coordonnées normales et on définit $g = f^*h$, oú $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors $f(r,\theta) = \sqrt{h(\partial_\theta,\partial_\theta)|_{h(r,\theta)}}$, et en particulier

$$f(r,0) = \sqrt{h(r\partial_1, r\partial_1)|_{(r,0)}} = \sqrt{h_{11}|_{(r,0)}}\, r$$

parce que $\partial_\theta|_{(r,0)} = r\partial_1$ dans la ligne $\theta = 0$. Comme le système de coordonnées es normal, on sait que $h_{11}|_{(0,0)} = 1$ et $\partial_0 h_{11}|_{(0,0)} = 0$. D'ici on voit que $\lim_{r\to 0} f(r,0) = 0$, et que

$$\lim_{r\to 0} \partial_r f(r,0) = \lim_{r\to 0} \frac{\partial_0 h_{11}|_{(r,0)}}{2\sqrt{h_{11}|_{(r,0)}}} r + \sqrt{h_{11}|_{(r,0)}} = 1.$$

$\square$

(c) Déduire la valeur de la courbure de la géométrie hyperbolique.

Solution. Avec $f(r,\theta) = \sinh(r)$ (calculè dans l'exercice 6.4) on trouve $K = -1$. $\square$

(d) Donner une expression (en coordonnées polaires) de toutes les métriques à courbure constante sur une surface.

Solution. Avec $K = 0, 1, -1$ on trouve $f(r,\theta) = r, \sin(r), \sinh(r)$. On à déjà trouvé cettes métriques dans l'exercice 6.4. $\square$

(e) Prouver que deux surfaces de mêmes courbures constantes sont localement isométriques. Sont elles globalement isométriques ?

Solution. La courbure constante K determine la métrique proche de l'origine : si $K = a^2 > 0$, alors

$$g = \mathrm{d}r^2 + \sin(ar)^2 \mathrm{d}\theta^2,$$

et si $K = -a^2 < 0$, alors

$$g = \mathrm{d}r^2 + \sinh(ar)^2 \mathrm{d}\theta^2,$$

et finalement si $K = 0$ on a

$$g = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2.$$

Mais dans tous les cas ($K = a^2, -a^2, 0$) on a une surface simplement connexe (sphere de rayon $\frac{1}{a}$, plan euclidien, plan hyperbolique de rayon $\frac{i}{a}$) mais on peux aussi construire des espace quocients (le plan projectif, un torus plat, une surface hyperbolique à genre ≥ 2). $\square$

9.7. Que valent les courbures (sectionnelle, de Ricci et scalaire) de la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$?

Solution. Soit g la métrique euclidienne restrite à la sphère ^{n} et soit $(E_i)_{0\leq i<n+1}$ la base standard de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On commence par calculer la courbure sectionnelle. En vue de la symétrie de rotation de la sphère, tous les 2-plans tangents à $\mathbb{S}^n$ ont la même courbure sectionnelle, donc il suffit de calculer dans le point $p = E_0 \in \mathbb{S}^n$ la courbure sectionnelle du plan

$$\Pi = \mathrm{Span}\{E_0, E_1\} \subseteq \mathrm{Span}\{E_i : 0 \leq i < n\} = T_pM.$$

Cette courbure est égale à la courbure de la 2-sphère S^2. On peut montrer ça en utilisant les symmetries σ_i de réflection par rapport à chaque plan $P_i = \{x : x_i = 0\}$.
En effet, si $X_p, Y_p, Z_p \in \Pi$, pour calculer $R_p(X_p, Y_p)Z_p$ on peut trouver des champs $X, Y, Z \in \Gamma(S^n)$ telles que $X(p) = X_p$, etc., et symétriques par rapport aux plans P_i ovec $2 \leq i < n+1$. Alors toutes les quantites dans le calcul

$$R_p(X_p, Y_p)Z_p = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

sont aussi symétriques, donc le calcul se déroule tout comme si on faisait le même calcul dans la sphère $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^3$. Cela montre que la courbure sectionnelle de $\mathbb{S}^n$ dans tous les plans est 1. Par conséquence, la courbure de Ricci dans toutes les directions est $(n-1)$ et la courbure scalaire est $n(n-1)$. $\square$