Indications pour l'examen du cours "Introduction à la géométrie Riemannienne"

EPFL, 24 juillet 2020

L'examen aura lieu le 12 août 2020 dans la salle MA-10 (MAA110). Il durera 25 minutes. avec un temps de préparation de 30 minutes. Chaque étudiant tire une question au hasard, cette question comprend une partie théorique à développer et un exercice.

Voici ce qu'il faut savoir pour l'examen ;

1 Concepts de base

- Etre à l'aise avec les concepts de variétés différentiable, espaces tangent et cotangent, champs de vecteurs, crochets, etc.
- Notions sur les champs de tenseurs.
- Métriques riemannienne (et pseudo-riemannienne). Définition, exemples, longueur et énergie des courbes, distance, volume.
- Rappel (pullback) d'une métrique par une immersion, isométries (et le groupe d'isométries d'une variété riemannienne), applications conformes.
- Les variétés riemanniennes vues comme espace métrique.
- Savoir prouver que tout variété différentiable admet une métrique riemannienne.
- Équation d'Euler-Lagrange en général et pour le cas de l'énergie d'une courbe. Symboles de Christoffel (de première et de seconde espèces), l'équation des géodésiques.

2 Connexion, géodésiques, transport parallèle

- La notion de connexion affine sur une variété. Propriétés principales, symboles de Christoffel, torsion.
- Lemme fondamental de la géométrie riemannienne (existence et unicité de la connexion de Levi-Civita), savoir l'énoncé et la preuve. La formule de Koszul.
- Dérivée covariante et transport parallèle.
- Géodésique (définition, équation).
- Formule de variation première pour la longueur (les points critiques de la fonctionnelle longueur sont les géodésiques parametrisées à vitesse constante).
- Application exponentielle et coordonnées normales de Riemann.
- Lemme de Gauss, cordonnées polaires.
- Variétés complètes. Théorème de Hopf Rinow (énoncé et grandes lignes de la preuve)

3 Courbure

- Le tenseur de courbure de Riemann, courbures de Ricci et scalaire. Courbure sectionnelle.
- Symétries (propriétés algébriques) du tenseur de courbure.
- Sous-variétés et seconde forme fondamentale. Propriétés de ces objets.
- Courbures principales, moyenne et de Gauss. Direction principales.
- Equations de Gauss et le théorème egregium comme cas particulier.
- Formule de variation seconde pour les géodésiques (énoncé et conséquences).
- Théorème de Bonnet-Myers (énoncé et preuve).
- Champs de Jacobi : définition, lien avec les variations des géodésiques (voir prop. 4.5.2 du polycopié). Application au calcul de la courbure des surfaces.
- Théorème de Cartan-Hadamard.