EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2020

Série 11

Exercice 10 (Exo 4 Examen 2019). On considère le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées

$$\frac{1}{2}(1 \pm 1, 1 \pm 1, 1 \pm 1) = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0) \cdots, (1,1,1)\}.$$

1. A partir des sommets du cube, on peut former 2 tetrahèdres réguliers T_1, T_2. Donner pour chacun de ces tétrahèdres l'ensemble des sommets du cube qui le compose. Quel est la longueur des arètes de ces tétrahèdres ?

$$T_1 = \{(0,0,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$$
$$T_2 = \{(1,1,1), (0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$$
$$\ell = \sqrt{2}.$$

2. On considère le tétrahèdre (disons T_1) dont un des sommets est le point $P_1 = (0,0,0)$. On note P_2, P_3, P_4 les trois autres sommets (qu'on numérotera comme on préfère). Montrer que le cosinus de l'angle de la rotation d'axe (P_1P_2) qui envoie la face de T_1 contenant le point P_3 sur la face de T_1 contenant le point P_4 vaut
$$\cos(\theta) = 1/3.$$
R : On note $P_2 = (1,1,0)$, $P_3 = (0,1,1)$, $P_4 = (1,0,1)$. La projection orthogonale commune de P_3 et P_4 sur l'axe (P_1, P_2) est le point $P_0 = (1/2, 1/2, 0)$ (verifier que $\vec{v}_3 := \vec{P_0P_3} = (-1/2, 1/2, 1)$ et $\vec{v}_4 := \vec{P_0P_4} = (1/2, -1/2, 1)$ sont $\perp$ a $\vec{P_1P_2}$). On a
$$\cos(\theta) = \vec{v}_3.\vec{v}_4/\|\vec{v}_3\|.\|\vec{v}_4\| = (1/2)/(3/2) = 1/3.$$

3. On a vu en cours que le groupe des rotations du cube induit une action (par permutation) sur l'ensemble des 4 "grandes diagonales" du cube rendant le groupe isomorphe a $\mathfrak{S}_4$. Ce même groupe agit également sur l'ensemble $\{T_1, T_2\}$. Montrer que ces actions sont compatibles au sens suivant : les rotations du cube qui agissent trivialement sur $\{T_1, T_2\}$ sont exactement les rotations qui sont de signature $+1$ quand on les identifie avec des éléments de $\mathfrak{S}_4$. Pour ce faire, on pourra, par exemple, calculer l'indice du sous-groupe des rotations qui agissent trivialement sur l'ensemble $\{T_1, T_2\}$.

Comme l'ensemble $\{T_1, T_2\}$ n'a que deux elements le nombre d'orbites est 1 ou 2. Si on avait deux orbites cela signifierait que de groupe envoie T_1 sur T_1 et T_2 sur T_2 mais la rotation du cube d'axe vertical et d'angle i envoie $(0,0,0)$ sur $(1,0,0)$ et donc T_1 sur T_2. Il n'y a donc qu'une seule orbite et par le Thm orbite-stabilisateur le stabilisateur de T_1 (et donc de T_2) est d'indice 2. On sait que le seul sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ d'indice 2 est le groupe alterne A_4 des permutations de signature 1.

Un peu de ping-pong pour se detendre...

Exercice 11 (Exo 5 Examen 2019)**.** On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, pour simplifier les notations on écrira les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en *ligne* mais on les écrira en *colonne* pour les multiplier par des matrices : par exemple on ecrira $A.(x, y, z)$ pour le produit

$$A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on rappelle la notation de congruence modulo 3 : pour $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m \equiv n \pmod 3 \iff 3|m - n.$$

1. Quelle est la nature des transformations linéaires associées aux matrices A et B. Montrer que ces matrices sont inversibles et calculer A^{-1} et B^{-1}.
   Ce sont des rotations lineaires d'axe $\mathbb{R}(0,0,1)$ et $\mathbb{R}(1,0,0)$ et d'angle
   $$c + is = 1/3 + i2\frac{\sqrt{2}}{3}.$$
   L'angle de la rotation inverse est
   $$c - is = 1/3 - i2\frac{\sqrt{2}}{3}$$
   et (l'inverse d'une matrice orthogonale est donnee par la transposee)
   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Soit $G = \langle A, B\rangle \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ le groupe engendré par A et B.

On va montrer que le groupe G est un groupe libre : *c'est à dire qu'un mot réduit et non trivial dans l'alphabet* $\mathcal{A} = \{A, B, A^{-1}, B^{-1}\}$ *n'est jamais égal a l'élément neutre. En d'autres termes toute matrice* M *de la forme*

$$M = L_1.\cdots.L_n,\ n \geqslant 1$$

telle que

— *(M est un mot non-trivial de longueur n dans l'alphabet $\mathcal{A}$)* $\forall i = 1, \cdots, n$,

$$L_i = A,\ A^{-1} \text{ ou bien } B \text{ ou encore } B^{-1},$$

— *(M est un mot réduit)* $\forall i = 1, \cdots n-1$, *on a*

$$L_{i+1} \neq L_i^{-1}$$

(autrement dit $L_i.L_{i+1} \neq \mathrm{Id}_3$),

alors

$$M \neq \mathrm{Id}_3.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que comme G est libre, tout élément $g \neq e_G$ de G, s'écrit de manière *unique* sous la forme d'un mot réduit dans l'alphabet $\mathcal{A}$.

– On se donne donc un mot réduit non-trivial M et on veut montrer que

$$M \neq \mathrm{Id}_3.$$

Pour cela on va jouer au *ping-pong*.

Soit $X_3 \subset S^2$ l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de longueur 1 de la forme

$$\vec{v} = 3^{-k}(a, b\sqrt{2}, c)$$

avec $k \geqslant 0$ un entier et $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On écrira toujours un tel vecteur sous forme "réduite" c'est a dire que la puissance de k est minimale (ie. 3 ne divise pas simultanément a, b et c).

Montrer que

$$A^{\pm 1}.X_3 \subset X_3,\ B^{\pm 1}.X_3 \subset X_3 \text{ et que } G.X_3 \subset X_3.$$

On a pour $\vec{v} \in X_3$

$$A.\vec{v} = 3^{-k}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} = 3^{-k-1}\begin{pmatrix} a-4b \\ (2a+b)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \in X_3. \qquad (0.1)$$

et

$$A^{-1}.\vec{v} = 3^{-k}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} = 3^{-k-1}\begin{pmatrix} a+4b \\ (-2a+b)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \in X_3. \quad (0.2)$$

On montre de meme les autres inclusions

$$B^{\pm 1}.X_3 \subset X_3$$

Etant donne $M \in G$ on veut montrer que $M.X_3 \subset X_3$. Si $M = \mathrm{Id}$ c'est evident. Si M est un mot en l'alphabet $\mathcal{A}$ de longueur 1, on vient de le faire. On traite le cas general par recurrence sur la longueur du mot M.

3. On considère les sous-ensembles suivants de X_3 (pour chaque valeur de $\pm$)

$$X_A^{\pm} := \{\vec{v} \in X_3,\ a \pm b \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 3,\ c \equiv 0 \pmod 3\}$$
$$X_B^{\pm} = \{\vec{v} \in X_3,\ b \pm c \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 3,\ a \equiv 0 \pmod 3\}.$$

Montrer que

$$A.X_A^+ \subset X_A^+,\ A^{-1}.X_A^- \subset X_A^-$$
$$B.X_A^{\pm} \subset X_B^-,\ B^{-1}.X_A^{\pm} \subset X_B^+.$$

On admet les inclusions similaires

$$B.X_B^- \subset X_B^-,\ B^{-1}.X_B^+ \subset X_B^+,\ A.X_B^{\pm} \subset X_A^+,\ A^{-1}.X_B^{\pm} \subset X_A^-.$$

R : D'apres (0.1), on voit que si

$$a+b \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 3,\ c \equiv 0 \pmod 3$$

alors

$$(a-4b)+(2a+b) = 3a-3b \equiv 0 \pmod 3,\ 2a+b \equiv -b \not\equiv 0 \pmod 3,\ 3c \equiv 0 \pmod 3$$

et donc $A.\vec{v} \in X_3^+$. On verifie de meme les autres inclusions annoncees.

4. Montrer que si M est un mot réduit qui ne se termine pas par A^{-1} ($L_n \neq A^{-1}$) alors pour tout $\vec{v} = 3^{-k}(a, b\sqrt{2}, c) \in X_A^+$, si on écrit

$$M.\vec{v} = 3^{-k'}(a', b'\sqrt{2}, c')$$

on a $b' \not\equiv 0 \pmod 3$.

R : on voit que l'on doit exclure le cas ou M se termine par A^{-1} car d'apres (0.2) si $a+b \equiv 0 \pmod 3$ alors

$$-2a+b \equiv 3b \equiv 0 \pmod 3.$$

On va montrer par recurrence sur n l'enonce suivant : soit $M = L_1.\cdots.L_n$ un mot reduit de longueur n et $\vec{v} \in X_A^+ \sqcup X_A^- \sqcup X_B^+ \sqcup X_B^-$. On suppose que

— si $\vec{v} \in X_A^+$, $L_n \neq A^{-1}$,
— si $\vec{v} \in X_A^-$, $L_n \neq A$,
— si $\vec{v} \in X_B^+$, $L_n \neq B$,
— si $\vec{v} \in X_B^-$, $L_n \neq B^{-1}$,
alors
$$M.\vec{v} \in X_A^+ \sqcup X_A^- \sqcup X_B^+ \sqcup X_B^-.$$
Si $n = 1$, l'enonce resulte des inclusions de la question precedente. Considerons le cas general : on a 4 cas possibles qui se subdivisent en trois cas supplementaires :
— si $\vec{v} \in X_A^+$, $L_n \neq A^{-1}$; si $L_n = A$ alors $L_{n-1} \neq A^{-1}$ et $A.\vec{v} \in X_A^+$; si $L_n = B$ alors $L_{n-1} \neq B^{-1}$ et $B.\vec{v} \in X_B^-$; si $L_n = B^{-1}$ alors $L_{n-1} \neq B$ et $B^{-1}.\vec{v} \in X_B^+$; dans tous les cas, on conclut par l'hypothese de recurrence.
— si $\vec{v} \in X_A^-$, $L_n \neq A$; si $L_n = A^{-1}$ alors $L_{n-1} \neq A$ et $A^{-1}.\vec{v} \in X_A^-$; si $L_n = B$ alors $L_{n-1} \neq B^{-1}$ et $B.\vec{v} \in X_B^-$; si $L_n = B^{-1}$ alors $L_{n-1} \neq B$ et $B^{-1}.\vec{v} \in X_B^+$; dans tous les cas, on conclut par l'hypothese de recurrence.
— si $\vec{v} \in X_B^+$, $L_n \neq B$; si $L_n = A$ alors $L_{n-1} \neq A^{-1}$ et $A.\vec{v} \in X_A^+$; si $L_n = A^{-1}$ alors $L_{n-1} \neq A$ et $A^{-1}.\vec{v} \in X_A^-$; si $L_n = B^{-1}$ alors $L_{n-1} \neq B$ et $B^{-1}.\vec{v} \in X_B^+$; dans tous les cas, on conclut par l'hypothese de recurrence.
— si $\vec{v} \in X_B^-$, $L_n \neq B^{-1}$; si $L_n = A$ alors $L_{n-1} \neq A^{-1}$ et $A.\vec{v} \in X_A^+$; si $L_n = A^{-1}$ alors $L_{n-1} \neq A$ et $A^{-1}.\vec{v} \in X_A^-$; si $L_n = B$ alors $L_{n-1} \neq B^{-1}$ et $B.\vec{v} \in X_B^-$; dans tous les cas, on conclut par l'hypothese de recurrence.

5. On note $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ le premier vecteur de la base canonique. Soit M un mot réduit se terminant par A. Calculer $A.\mathbf{e}_1$ et en déduire que $M.\mathbf{e}_1$ est de la forme $3^{-k'}(a', b'\sqrt{2}, c')$ avec $b' \not\equiv 0 \pmod 3$. En déduire que $M \neq \mathrm{Id}_3$.
R : on a $A.\mathbf{e}1 = 3^{-1}(1, 2\sqrt{2}, 0) \in X_3^+$. Si $M = A$ alors $M \neq \mathrm{Id}$. Sinon $M = L_1. \cdots .L_{n-1}.A$ avec $L_{n-1} \neq A^{-1}$ et
$$M.\mathbf{e}_1 = L_1. \cdots .L_{n-1}.3^{-1}(1, 2\sqrt{2}, 0) = 3^{-k'}(a', b'\sqrt{2}, c') \neq (1, 0, 0)$$
car $b' \not\equiv 0 \pmod 3$ par la question precedente et $M \neq \mathrm{Id}$.

6. En général, montrer grâce à une conjugaison convenable qu'on peut toujours supposer que M se termine par A.
R : Soit $N \in G$, alors
$$M \neq \mathrm{Id} \Longleftrightarrow N^{-1}.M.N \neq \mathrm{Id}.$$
Supposons que M ne se termine pas par A : si M se termine par B ou B^-1, on peut prendre $N = A$ et remplacer M par $A^{-1}.M.A$: meme si le mot $A^{-1}.M.A$ n'est pas reduit il s'ecrit comme un mot reduit se terminant par $B.A$ ou $B^{-1}.A$. Si M se termine par A^{-1} il suffira de prendre $N = B.A$ et de remplacer M par $A^{-1}.B^{-1}.M.B.A$ qui s'ecrit comme un mot reduit se terminant par $A^{-1}.B.A$.

7. Soit r_1, r_2 deux rotations linéaires de $\mathbb{R}^3$ d'angles $\arccos(1/3)$ et d'axes perpendiculaires. Montrer que le groupe $\langle r_1, r_2 \rangle \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+_{\mathbf{0}}$ est libre.

R : Si on conjugue r_1 et r_2 par une rotation r alors

$$r_1' = r \circ r_1 \circ r^{-1},\ r_2' = r \circ r_2 \circ r^{-1}$$

sont des rotations de meme angle arccos(1/3) et d'axe toujours perpendiculaires (leur axes sont les images des axes de r_1 et r_2 par r et restent perpendiculaires). On peut alors supposer que l'axe de r_1' est $\mathbb{R}(0,0,1)$ et l'axe de r_2' sera perpendiculaire. En conjuguant alors par une autre rotation r'' d'axe $\mathbb{R}(0,0,1)$, on ne change pas r_1' et on ramener l'axe de r_2'' en l'axe $\mathbb{R}(0,0,1)$. On se ramene alors au cas du groupe engendre par A et B qui est libre. Comme le groupe engendre par r_1 et r_2 est libre et conjugue a celui-ci, le groupe $\langle r_1, r_2 \rangle$ est egalement libre.

Application aux chaines tetrahedrales de Steinhaus

Le resultat de l'exercice precedent a ete utilise par Świerczkowski pour repondre a une question de H. Steinhaus :

Une *chaine* tetrahedrale (de Steinhaus) est une suite finie $(T_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ de tetrahedres reguliers $T_n \subset \mathbb{R}^3$ telle que

1. Les aretes de ces tetrahedres sont tous de meme longueur (par exemple de longueur 1).
2. Pour tout $n \geqslant 1$, les tetrahedres T_n et T_{n+1} ont exactement une face en commun.
3. T_{n+2} n'est pas egal a T_n.

La figure **??** donne un exemple d'une telle chaine.

Steinhaus a demande si il existait une telle chaine qui forme une *boucle* : telle que

$$T_N = T_1.$$

Utilisant le fait que le groupe $G = \langle A, B \rangle$ est libre Świerczkowski a demontre qu'une telle chaine n'existe pas (plus precisement il a meme montre qu'il n'existe aucune chaine telle que T_N est un translate de T_1). Pour se convaincre du lien, on notera que A et B sont des rotations d'angle de cosinus 1/3 qui est precisement l'angle entre deux faces d'un tetrahedre (cf. Exo 10).

On conjecture que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une chaine de Steinhaus $(T_n)_{n \leqslant N}$ dont les tetrahedres ne se coupent que si ils sont consecutifs et tels que T_N est a distance ε de T_1.