Semaine 6 : Série d'exercices sur les signaux

1 [N1 puis N3] Bandes passantes

a) [N1] Soit $X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t + \delta_i)$ un signal de bande passante B. Quelle est la bande passante des signaux suivants ?

1. $2X(t)$
2. $X(t - \frac{\pi}{2})$
3. $X(3t)$
4. $X(t) + \sin(2\pi f t)$, avec $f \neq f_1, f_2, \ldots, f_n$
5. $X'(t)$, la dérivée de la fonction $X(t)$

b) [N3, ne restez pas bloqués mais revenez y plus tard si nécessaire] Soient maintenant $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux de la forme ci-dessus, avec bandes passantes B_X et B_Y, respectivement. Que pouvez-vous dire de la bande passante des signaux suivants ?

1. $X(t) + Y(t)$
2. $X(t) \cdot Y(t)$

2 [N2] Signaux périodiques et apériodiques

Un signal $X(t)$ est dit *périodique de période* T s'il existe un nombre $T > 0$ tel que $X(t) = X(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (exemple : une sinusoïde pure de fréquence $f = 1/T$ est périodique de période T). Remarquer qu'on a alors également $X(t + kT) = X(t)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$.

a) Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même période T. Est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique ? Si oui, avec quelles périodes ?

b) Soient encore $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes T_1 et T_2, respectivement. La somme $X_1(t) + X_2(t)$ est-elle périodique ? (aucune justification formelle ne vous est demandée ici).

Indication : Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse de manière numérique en représentant différents signaux sur votre calculatrice, votre ordinateur (ou sur `www.wolframalpha.com` ; ça se fait « tout seul » : entrez simplement la formule comme par exemple « sin(2 pi t) + cos(4 pi t) »). Essayez par exemple avec :

$$\sin(2\,\pi\,t) + \cos(4\,\pi\,t) \qquad \text{et} \qquad \sin(2\,\pi\,t) + \cos(4\,t)$$

NB : Cette indication est également valable pour les deux questions suivantes !

c) Un cas particulier : si T_1 et T_2 sont des nombres entiers, est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique ? Si oui, avec quelles périodes ?

d) Un autre cas particulier : une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale f_0 et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de f_0. La note est donc un signal de la forme (a_1 non nul) :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t),$$

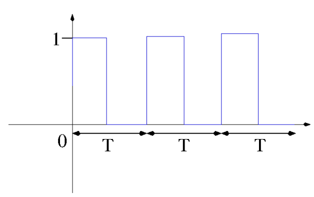
où le coefficient $a_n > 0$ est l'amplitude de la n^e harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique ? Si oui, avec quelle plus petite période ?

3 [N1] Interlude musical

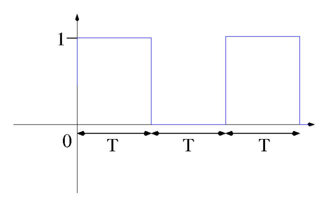
Durant une heure, on enregistre un concert de musique à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute forme de compression) ?

4 [N3] Filtre à moyenne mobile

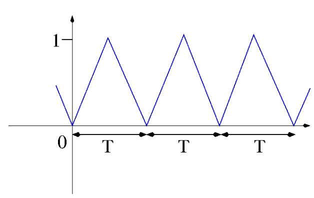
a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de durée d'intégration $T_c = T$? On considère que les signaux sont périodiques et définis pour tout $t \in \mathbb{R}$.



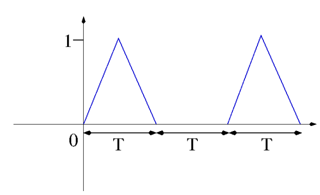
$X_1(t)$



$X_2(t)$



$X_3(t)$



$X_4(t)$

Pas besoin ici de formules mathématiques pour répondre : des dessins suffiront !

b) Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période T (cf. exercice 1) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même durée d'intégration $T_c = T$?

c) Soit $X(t) = \sin(2\pi f\, t)$, une sinusoïde pure de fréquence f. Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de durée d'intégration T_c, l'amplitude du signal sortant $\widehat{X}(t)$ satisfait l'inégalité

$$|\widehat{X}(t)| \leq |\mathrm{sinc}(f\, T_c)| \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où on rappelle que $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ par définition.

Pour aller plus loin

5 [N3] Accordage d'une guitare et phénomène dit de « battement »

Cet exercice illustre une famille spéciale de signaux obtenus en faisant la somme de deux sinusoïdes pures. Pour accorder une guitare, on joue en même temps sur deux cordes voisines deux notes qui sont censées être identiques en théorie. Si la guitare est mal accordée, on entend une vibration caractéristique (un « battement »), qui disparaît lorsque la guitare est bien accordée. Dans cet exercice, on se propose de comprendre ce phénomène du point de vue mathématique. Supposons pour simplifier que les notes qui sortent d'une guitare soient des sinusoïdes pures. L'onde émise par la première corde est donc $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, tandis que celle émise par la deuxième est $X_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$, avec f_1 et f_2 proches l'une de l'autre [1]. Quelle est la forme de l'onde résultante $X_1(t) + X_2(t)$.

a) lorsque f_1 et f_2 sont très proches ?
- — Approche à suivre : remplacer f_2 par $f_1 + \varepsilon$ et transformer la somme des deux sinusoïdes en un produit de deux termes à l'aides des formules de trigonométrie. Quelles sont les fréquences apparaissant dans ces deux termes ?

b) lorsque $f_1 = f_2$?

Indication. Là aussi, vous pouvez vous aider de votre calculatrice, ordinateur ou `www.wolframalpha.com` pour visualiser le résultat pour, par exemple, f_1 et f_2 valant respectivement 16 Hz et 17 Hz.

Cours ICC : liens théorie $\longleftrightarrow$ Programmation

En cours (de prog.), nous avons vu comment calculer la moyenne mobile « discrète » (c.-à-d. approximation par somme de Riemann) d'un signal échantillonné :

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(t) &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(s)\,ds \\
&\simeq \frac{1}{T}\cdot\frac{t-(t-T)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X\left((t-T) + k\cdot\frac{t-(t-T)}{n}\right) \\
&\simeq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X\left(t - T + k\cdot\frac{T}{n}\right)}_{\text{moyenne usuelle de } n \text{ échantillons}}
\end{aligned}$$

Retrouvez tous les exercices de programmation liés à la partie théorie du cours ICC sur cette page :
`https://progmaph.epfl.ch/lien-icc.html`

1. En pratique, il se peut bien sûr qu'il y ait un déphasage entre les deux ondes, et aussi que les amplitudes ne soient pas rigoureusement les mêmes, mais là aussi, on simplifie.