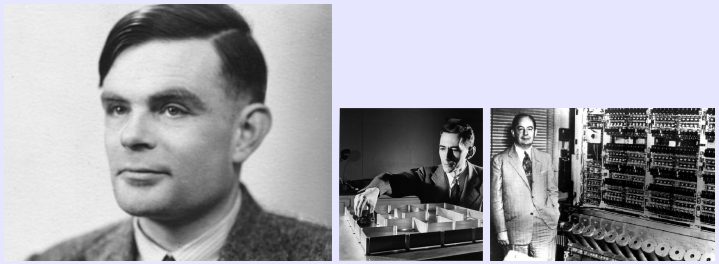


Information, Calcul et Communication
Module 1 : Calcul

EPFL

Leçon I.2 : Calcul et Algorithmes II

J.-C. Chappelier & J. Sam

EPFL

Objectifs de la leçon

La leçon précédente a présenté ce qu'est un algorithme et par quels moyens l'exprimer.

Mais reste la principale question :

comment concevoir un algorithme

permettant de résoudre un problème donné ?

L'objectif de cette leçon est de vous présenter des *méthodes de résolution de problèmes* :

- « Diviser pour régner » (« *Divide and Conquer* »)
- Récursion
- Programmation dynamique

Conception d'algorithmes

Comment **concevoir** un algorithme permettant de résoudre un problème donné ?

Il n'y a malheureusement pas de méthode miracle ni de recette toute faite pour construire des solutions algorithmiques à un problème donné.

Une première démarche consiste à rechercher une ressemblance avec des problèmes déjà connus :

recherche *tri* *plus court chemin*

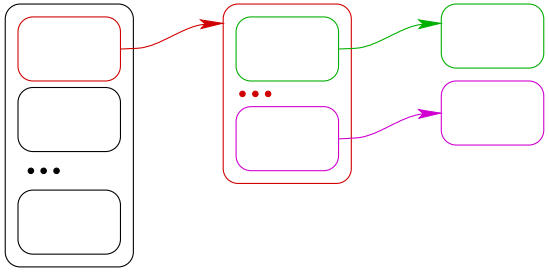
Sinon, il existe plusieurs **méthodes de résolution**, c'est-à-dire des *schémas d'élaboration de solutions*.

Plusieurs de ces méthodes suivent ce que l'on appelle **une approche descendante** (« *top-down* », procède par *analyse*), par opposition à ascendante (« *bottom-up* », procède par *synthèse*).

Approche descendante

Résoudre un problème par une **approche descendante** consiste à décomposer le problème général en sous-problèmes plus spécifiques, lesquels seront chacun décomposés en problèmes encore plus spécifiques, etc. (raffinements successifs)

Une telle analyse du problème se fait à l'aide de blocs imbriqués correspondant chacun à des résolutions de plus en plus spécifiques, décrites par des algorithmes de plus en plus spécialisés.



Exemple

Par exemple avec l'algorithme de tri par insertion vu à la leçon précédente :

On découpe le problème en sous-problèmes :

tri insertion

entrée : *un tableau (d'objets que l'on peut comparer)*
sortie : *le tableau trié*

Tant que *il y a un élément* *mal placé*

> *on cherche sa* *bonne place*
> *on* *déplace* *l'élément à sa bonne place*

Chaque *sous-problème* étant ensuite spécifié plus clairement puis résolu.

Tri par insertion : résolution détaillée

Le sous-problème *rechercher un élément mal placé*

entrée : un tableau `tab`

sortie : position du 1er élément strictement plus petit que son prédécesseur

La solution est ici assez simple :

On effectue une **itération** sur les éléments de `tab` en s'arrêtant au premier élément strictement plus petit que son prédécesseur.

Comme le 1er élément de `tab` ne peut être mal placé (car sans prédécesseur), l'itération de recherche d'un élément mal placé commencera à partir du 2e élément

De même, s'il n'y a pas d'élément mal placé on retournera, par convention, la position 1.

Tri par insertion : résolution détaillée (2)

Le sous-problème *trouver la bonne place*

entrée : un tableau `tab` et l'entier `pos`, position d'un élément mal placé

sortie : la bonne position `pos_ok` de l'élément mal placé.

La « bonne position » correspond à la plus grande position `pos_ok` (<`pos`) dans le tableau `tab` telle que le (`pos_ok-1`)-ième élément de `tab` soit inférieur ou égal au `pos`-ième.

L'algorithme pour *trouver la bonne place* doit donc parcourir les éléments de `tab`, un à un, entre le premier et celui à la position `pos`, à la recherche de la bonne position.

Cet algorithme effectue donc aussi une **itération** sur les éléments du tableau, du premier élément à celui de position `pos`.

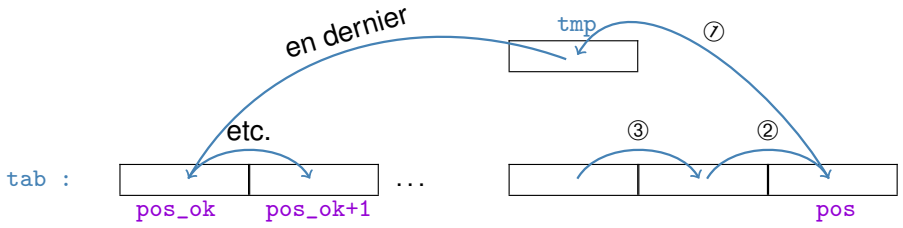
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème *déplacer un élément*

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



Synthèse

tri insertion

entrée : *un tableau T*
sortie : *le tableau trié*

```
pos ⟵ mal_placé(T)
Tant que pos > 1
    pos_ok ⟵ bonne_place(T, pos)
    déplace(T, pos, pos_ok)
    pos ⟵ mal_placé(T)
```

avec :

mal_placé

entrée : *un tableau T*
sortie : *position du premier élément mal placé*

...à vous de l'écrire...

etc.

Améliorations

1. Pour *rechercher le prochain élément mal placé*, ce n'est pas la peine de recommencer du début (position 2) à chaque fois. On peut partir de *la dernière position mal placée*.
2. On pourrait *trouver la bonne place* et *déplacer l'élément* à cette place *en même temps* (c.-à-d. en *une seule* itération)

Si l'on regroupe tout ceci, on arrive à l'algorithme suivant :

```
Pour i de 2 à N (= taille du tableau)
    tmp ⟵ tableau[i]
    j ⟵ i
    Tant que j ≥ 2 et tableau[j-1]>tmp
        tableau[j] ⟵ tableau[j-1]
        j ⟵ j-1
    tableau[j] ⟵ tmp
```


Divide and Conquer

Parmi les méthodes descendantes, une qui est souvent mise en œuvre s'appelle « **diviser pour régner** » (divide and conquer).

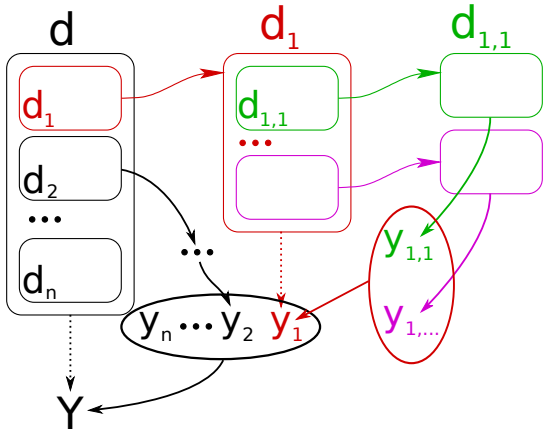
Elle consiste à diviser/regrouper les données pour résoudre des (sous-)problèmes plus simples.

Cette idée n'est pas nouvelle :

> « *Diviser chacune des difficultés que j'examinerois, en autant de parcelles qu'il se pourroit, et qu'il soit requis pour les mieux résoudre* »
>
> (Descartes, *Discours de la méthode*, 17e siècle)

Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :

- si d est « assez simple », appliquer un algorithme « *ad hoc* » permettant de résoudre le problème (traitement des cas triviaux)
- sinon,
  - décomposer d en instances plus petites d_1, ..., d_n
  - puis pour chacun des d_i : résoudre $P_i(d_i)$.
    On obtient alors une solution y_i
  - recombiner les y_i pour former la solution Y au problème de départ.

☞ conduit souvent à des algorithmes récursifs

Récursion

Une catégorie particulière de méthodes de résolution de problèmes sont les solutions **récursives**.

Le principe de l'approche récursive est de

> *ramener le problème à résoudre à un sous-problème*, version simplifiée *du problème d'origine*.

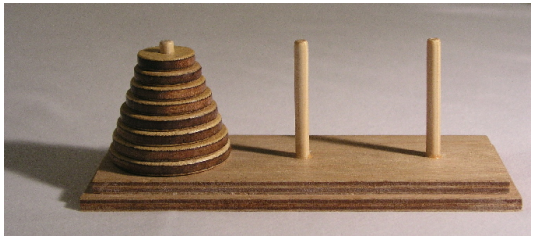
Exemples :

- recherche par dichotomie (cf leçon précédente)
- exemple en mathématiques : le raisonnement par récurrence
- les algorithmes dits récursifs (à suivre)

Exemple : Les tours de Hanoï

Jeu des tours de Hanoï :
déplacer d'un pilier à un autre une colonne de disques de taille croissante

- en utilisant un seul pilier de transition (c'est-à-dire 3 piliers en tout)
- en ne déplaçant qu'un seul disque à chaque fois
- en ne posant un disque que sur le sol ou sur un disque plus grand.



©User:Evanherk (Wikimedia Commons)

Les tours de Hanoï (2)

Idée : si je peux le faire pour une pile de n disques,
je peux le faire pour une pile de $n+1$ disques
(et je sais le faire pour une pile de 1 disque)

Démonstration :

- je déplace les n disques du haut sur le pilier de transition (en utilisant la méthode que je connais par hypothèse)
- je mets le dernier disque sur le pilier destination
- je redéplace la tour de n disques du pilier de transition au pilier destination (en utilisant à nouveau la méthode que je connais par hypothèse, et le pilier initial comme transition).

Les tours de Hanoï : algorithme

Tours de Hanoï
entrée : *jeu avec pile de n disques (correctement ordonnés) sur le pilier numéro i, i, j ($\neq i$), nombre n de disques à déplacer*
sortie : *jeu avec pile de n disques (correctement ordonnés) sur le pilier numéro j*

Si $n > 0$
Choisir k différent de i et j (par exemple $k \longleftarrow 6 - i - j$)

> ***Tours de Hanoï***
> *entrée : jeu, i, k, $n-1$*

Déplace disque du pilier i au pilier j

> ***Tours de Hanoï***
> *entrée : jeu, k, j, $n-1$*

démo : http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Tower_of_Hanoi_4.gif

Autre(s) exemple(s)

Calculer la somme des n premiers entiers.

Si je peux le faire pour n, je peux le faire pour $n+1$:

$$S(n+1) = (n+1) + S(n)$$

Note : se généralise trivialement au calcul de toute grandeur définie par une équation de récurrence.

Algorithme récursif

Le schéma général d'un algorithme récursif est le suivant :

monalgo_rec
entrée : *entrée du problème*
sortie : *solution du problème*

...

> ***monalgo_rec***
> *entrée : entrée du sous-problème*
> *sortie : sol. du sous-problème*
>
> ...

...

Exemple (incomplet) :

somme
entrée : n
sortie : $S(n)$

> ***somme***
> *entrée : $n-1$*
> *sortie : m*

$S(n) \longleftarrow n + m$

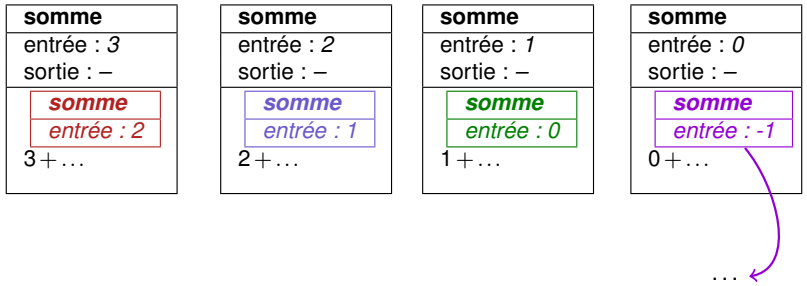
Condition de terminaison

Attention ! Pour que la résolution récursive soit correcte, il faut une

condition de terminaison

sinon, on risque une boucle infinie.

Exemple :



Algorithme récursif (correct)

Le schéma général **correct** d'un algorithme récursif est donc le suivant :

monalgo_rec
entrée : X
sortie : Y

si *terminaison(X)*
alors $Y \leftarrow \ldots$
sinon
. . .

monalgo_rec
entrée : entrée de l'instance réduite
sortie : . . .
. . .

. . .

1er exemple

Reprenons la somme des n premiers entiers positifs :

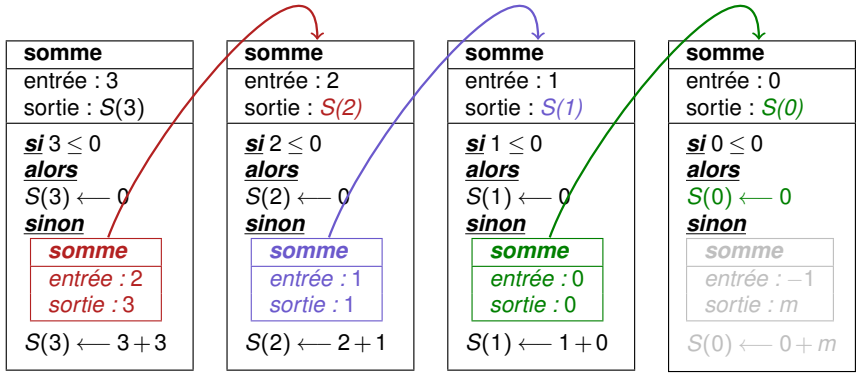
somme
entrée : n
sortie : $S(n)$

si $n \leq 0$
alors $S(n) \longleftarrow 0$
sinon

somme
entrée : $n-1$
sortie : m

$S(n) \longleftarrow n+m$

1er exemple : déroulement



$S(3) = 6$

1er exemple : remarques

Notez qu'il est parfois préférable d'écrire la fonction sous une autre forme que la forme récursive.
Si l'on reprend l'exemple de la somme des n premiers entiers :

$$S(n+1) = (n+1) + S(n)$$

mais on a aussi (!) :

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

(c'est-à-dire une itération) qui est plus direct que la forme récursive.

On peut parfois même utiliser une expression analytique (lorsqu'on en a une !) ; par exemple :

$$S(n) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

1er exemple : complexités ?

- version récursive ?

somme
entrée : n
sortie : $S(n)$

si $n \leq 0$
alors $S(n) \longleftarrow 0$
sinon
  somme
  entrée : $n-1$
  sortie : m
  $S(n) \longleftarrow n + m$

- version itérative ($S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$) ?

Exemple 2 : version récursive du tri par insertion

On peut aussi concevoir le tri par insertion de façon récursive :

tri
entrée : *tableau de n éléments*
sortie : *tableau trié*

condition arrêt : moins de 2 éléments

  tri (instance réduite du problème)
  entrée : tableau de $n-1$ éléments
  sortie : tableau trié
  ...

insertion *du $n^{ème}$ élément dans le tableau trié de $n-1$ éléments*

Tri récursif : exemple

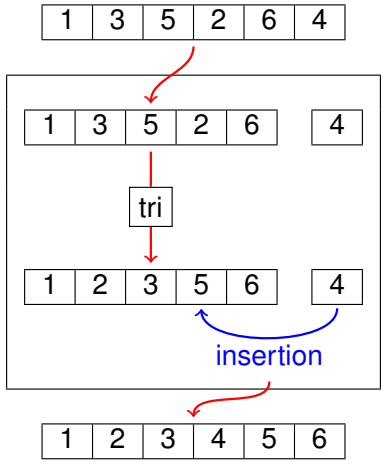
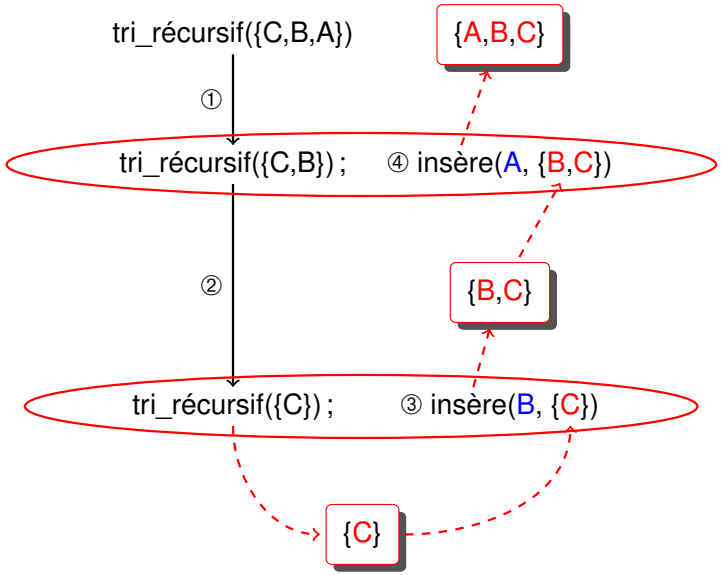


Schéma des appels récursifs (exemple)



Pour conclure sur la récursion

La solution récursive n'est pas toujours la seule solution et rarement la plus efficace...

...mais elle est parfois beaucoup **plus** simple/**pratique à mettre en œuvre** !

Exemples : tris, traitement de structures de données récursives (e.g. arbres, graphes, ...), ...

Programmation dynamique

La **programmation dynamique** est une méthode de résolution permettant de traiter des problèmes ayant une structure séquentielle répétitive.

« problèmes séquentiels » : pour lesquels on doit faire un ensemble de choix *successifs*/prendre des décisions *successives* pour arriver à une solution ;
au fur et à mesure que de nouvelles options sont choisies, des sous-problèmes apparaissent (aspect « séquentiel »).

☞ La programmation dynamique s'applique lorsqu'un *même sous-problème* apparait (avec les même données) dans *plusieurs* sous-solutions différentes.

Le principe est alors de stocker la solution à chaque sous-problème au cas où il réapparaitrait plus tard dans la résolution du problème global :

On évite de calculer plusieurs fois la même chose.

Note : cette idée (programmation dynamique) peut s'appliquer aussi bien à des approches descendantes qu'ascendantes.

Programmation dynamique (2)

La programmation dynamique est souvent utilisée lorsque une solution récursive se révèle inefficace.

Elle permet souvent de changer un algorithme « naïf » coûteux en un algorithme, peut être plus complexe à concevoir, mais plus efficace.

Exemple

Prenons l'exemple du calcul des coefficients du binôme $\binom{n}{k}$ (noté aussi C_n^k)

Problème $C(n,k)$:

Entrée : n, entier positif (ou nul) et k entier positif (ou nul), $k \leq n$.

Sortie : $\binom{n}{k}$

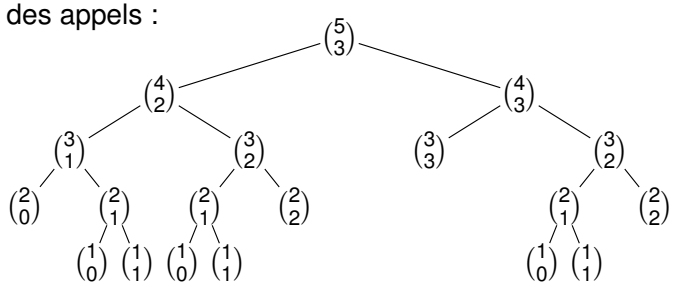
Approche récursive :

- si $k = 0$ ou $k = n$, renvoyer 1
- sinon retourner $C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$

Rappel : $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Coefficients du binôme approche récursive

Schéma des appels :



Quelle est la complexité $T(k,n)$ de cette approche ?

Du fait de la récursion, on a :
(Supposons que les comparaisons et les additions soient des instructions élémentaires.)

$$T(k,n) = T(k-1,n-1) + T(k,n-1) + 3$$

et d'autre part $T(0,0) = 1$ et $T(n,n) = 2$

Coefficients du binôme approche récursive (2)

d'où : $$T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n) \in \Theta\left(2^n\right)$$

☞ temps exponentiel en fonction de n

Y'a-t-il une meilleure solution ?

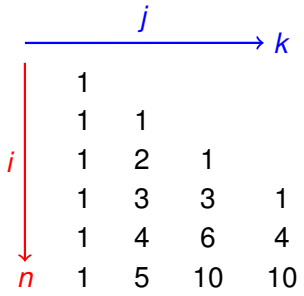
Idée : **ne pas recalculer plusieurs fois la même chose**

(Regardez par exemple combien de fois nous avons calculé $\binom{1}{1}$!)

☞ stocker dans un **tableau** les valeurs déjà calculées et utiles pour la suite.
(on parle de *mémoïsation*/*memoization*)

Coefficients du binône par programmation dynamique

« tabuler les valeurs déjà calculées »
☞ Concrètement ici : le triangle de Pascal :



Calcul par programmation dynamique du coefficient $\binom{n}{k}$:

- On remplit le début (k éléments) de chaque ligne du triangle de Pascal, une après l'autre, de haut en bas.
- On arrête à la ligne n.

Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Coefficients du binôme programmation dynamique (2)

Le nombre d'opération le plus grand est requis lorsque $k = n-1$
(on aurait pu utiliser la symétrie, mais cela ne change pas fondamentalement le propos)

Dans ce cas, le nombre d'opérations effectuées est :

$$1+(1+1)+(1+1+1)+(1+1+1+1)$$

$$+\ldots+(1+\underbrace{1+\ldots+1}_{n-1}) = n+1+n-1+\sum_{i=1}^{n-1} i\cdot 1$$

$$= 2n+\frac{n(n-1)}{2}1$$

$$= \frac{1}{2}n^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)n$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de mémoriser tout le tableau, $k-1$ cases suffisent (pourriez-vous trouver l'algorithme ?)

Programmation Dynamique – Autre exemple

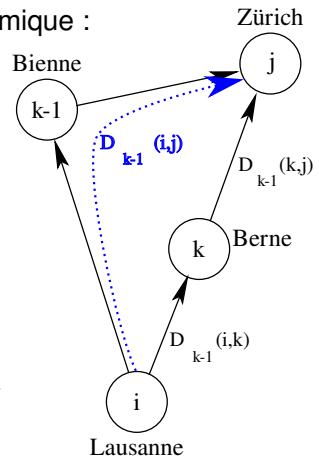
Calcul du **plus court chemin**, par exemple entre toutes les gares du réseau CFF

Voyons une solution par programmation dynamique : l'Algorithme de Floyd

Illustration de l'idée de base :
le plus court chemin pour aller de Lausanne à Zürich est le minimum entre :

1. le plus court chemin connu pour aller de Lausanne à Zürich,
2. le chemin allant de Lausanne à Zürich en passant par une ville intermédiaire non encore considérée.

$$D_k(i,j) = \min\left\{ D_{k-1}(i,j),\ D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j) \right\}$$



Programmation Dynamique Autre exemple (2)

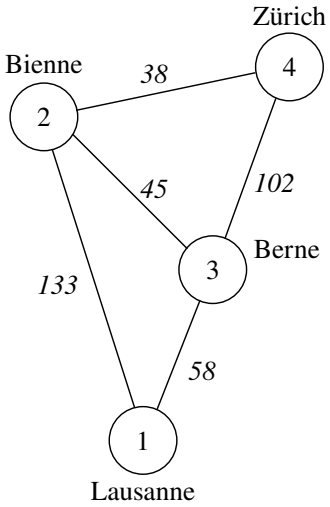
L'algorithme est donc le suivant, pour n gares dans le réseau :

Initialisation :
Pour i de 1 à n
  Pour j de 1 à n
    $D(i,j) \leftarrow$ distance *directe* de i à j, ∞ si i et j ne sont pas directement connectés

Déroulement :
Pour k de 1 à n
  Pour i de 1 à n
    Pour j de 1 à n
      $D(i,j) \leftarrow \min\{D(i,j), D(i,k)+D(k,j)\}$

Complexité ?
☞ $\Theta(n^3)$

Algorithme de Floyd : exemple



(données fictives)

$D_1 = D_0 =$

	Lausanne	Bienne	Berne	Zürich
Lausanne	0	133	58	∞
Bienne	133	0	45	38
Berne	58	45	0	102
Zürich	∞	38	102	0

$D_2 =$

	Lausanne	Bienne	Berne	Zürich
Lausanne	0	133	58	**171**
Bienne	133	0	45	38
Berne	58	45	0	**83**
Zürich	**171**	38	**83**	0

$D_4 = D_3 =$

	Lausanne	Bienne	Berne	Zürich
Lausanne	0	**103**	58	**141**
Bienne	**103**	0	45	38
Berne	58	45	0	83
Zürich	**141**	38	83	0

Note : fonctionne aussi pour des graphes asymétriques (graphes orientés)

Algorithmes de plus court chemin

L'algorithme de Floyd présenté ici résout en $\Theta(n^3)$ étapes le problème du plus court chemin entre toutes les paires de gares

En appliquant le même genre d'idées (programmation dynamique) :

- l'algorithme de Dijkstra résout en $\Theta(n^2)$ le problème du plus court chemin entre une gare donnée et toutes les autres
- l'algorithme A* (« *A star* ») est une généralisation de l'algorithme de Dijkstra qui est plus efficace si l'on possède un moyen d'estimer une borne inférieure de la distance restant à parcourir pour arriver au but (on appelle cela une « heuristique admissible » ; Dijkstra est un A* avec l'heuristique nulle)
- l'algorithme de Viterbi résout en $\Theta(n)$ le problème du plus court chemin entre deux gares données (sans cycle : DAG)
- ...et il existe plein d'autres algorithmes en fonctions des conditions spécifiques (graphe orienté/non orienté, coût positifs ou quelconques, graphe à cycles ou sans cycle)

Conclusion (1)

Formalisation des données : **structures de données abstraites**

Formalisation des traitements : **algorithmes**

☞ trouver des solutions correctes et distinguer formellement les solution efficaces de celles inefficaces

Problèmes typiques : recherche, tris, plus « court » chemin.

La **conception** d'une méthode de résolution automatisée d'un problème consiste à choisir les *bons algorithmes* **et** les *bonnes structures de données*.

Conclusion (2)

La **conception** d'une méthode de résolution automatisée d'un problème consiste à choisir les *bons algorithmes* **et** les *bonnes structures de données*.

☞ Il n'y a pas de recette miracle pour cela, mais il existe des grandes familles de stratégies de résolution :

- **décomposer** (« Divide and Conquer ») : essayer de résoudre le problème en le décomposant en instances plus simples

  Les algorithmes récursifs sont des illlustrations de cette stratégie.

- **regrouper** (« programmation dynamique ») : mémoriser les calculs intermédiaires pour éviter de les effectuer plusieurs fois

La suite

- La prochaine leçon :
  Qu'est-ce qui est calculable et ne l'est pas ?
- Puis :
  Comment représenter l'information (les données sur lesquelles calculer) ?