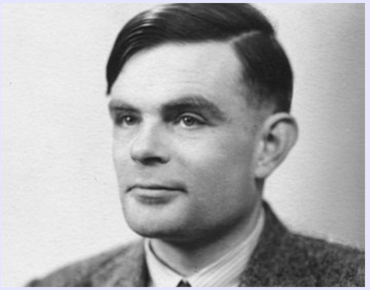
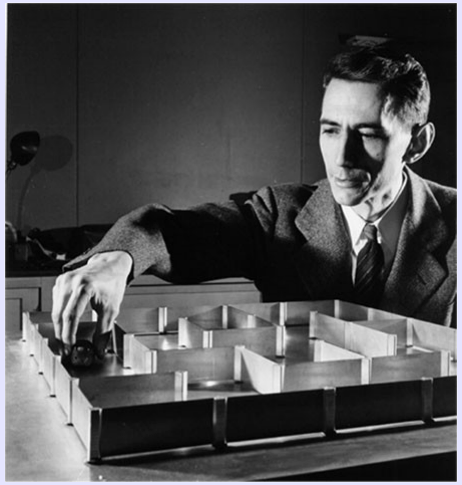
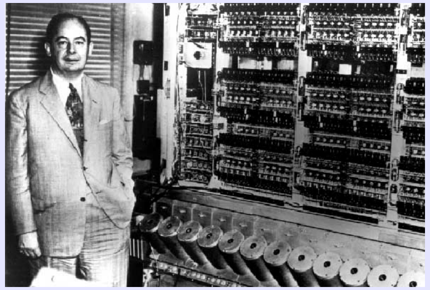






Information, Calcul et Communication

Module 2: Information et Communication

Introduction

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

Introduction

Supposons que votre meilleur(e) ami(e) habite en Nouvelle-Zélande.

Avec un groupe d’amis, vous désirez lui jouer un sketch sur vos

études à l'EPFL pour son anniversaire.

Il est désormais possible d’accomplir cette tâche en quelques minutes seulement.

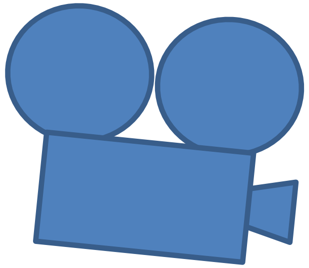
Que se passe-t-il exactement lors d’une telle opération?

Introduction

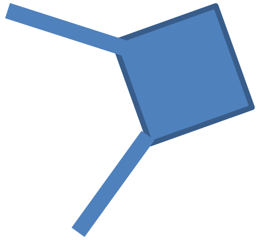
1. A l'aide de votre smartphone, vous enregistrez la vidéo (image +son).

   - Ce faisant, un signal *analogique* est converti en sa représentation *numérique* au moyen d'un algorithme sophistiqué.

   - De plus, un algorithme de *correction d'erreurs* est utilisé pour stocker le fichier dans la mémoire.



[Copyright N. Dinh SMT EPFL]



Introduction

2. Vous téléchargez ensuite cette vidéo sur votre site web préféré, non sans en avoir réduit la taille au préalable, au moyen d'un algorithme de ***compression***, pour que le téléchargement ne dure pas des heures.

- Lors du téléchargement, deux autres algorithmes de correction d'erreurs sont utilisés pour protéger la ***transmission*** des données a) jusqu'à votre borne wifi,   b) sur internet.

- Si vous ne désirez pas que d'autres gens puissent profiter de votre sketch, un algorithme de ***cryptage*** est utilisé par le site web pour empêcher d'autres utilisateurs de visionner la vidéo.

Introduction

3. Puis votre ami(e) découvre cette vidéo sur son compte et la regarde.

- Un algorithme de correction d’erreurs est à nouveau utilisé ici...
- ...ainsi qu’un algorithme de décryptage,
- et le signal est ***reconstruit*** à partir des données numériques.

Réussir son oral à l'EPFL pour les nuls

[Copyright N. Dinh SMT EPFL]

Plan

Plan du module:

- leçons 2.1 et 2.2: échantillonnage de signaux
- leçons 2.3 et 2.4: compression de données

Et ce dont nous ne parlerons pas ou peu:

- transmission de données
- cryptographie
- réseaux de communication

Questions

Voici les questions auxquelles nous allons tenter de répondre dans ce module:

- Comment représenter la réalité physique avec des bits ?
- Comment restituer cette réalité à partir d'une information partielle ?
- Comment mesurer la quantité d'information présente dans des données ?
- Comment stocker des données en utilisant le moins d'espace possible ?

Plan

Plan détaillé des deux leçons à venir:

Aujourd'hui: Echantillonnage de signaux

- signaux, fréquences et bande passante
- filtrage
- échantillonnage

La semaine prochaine:

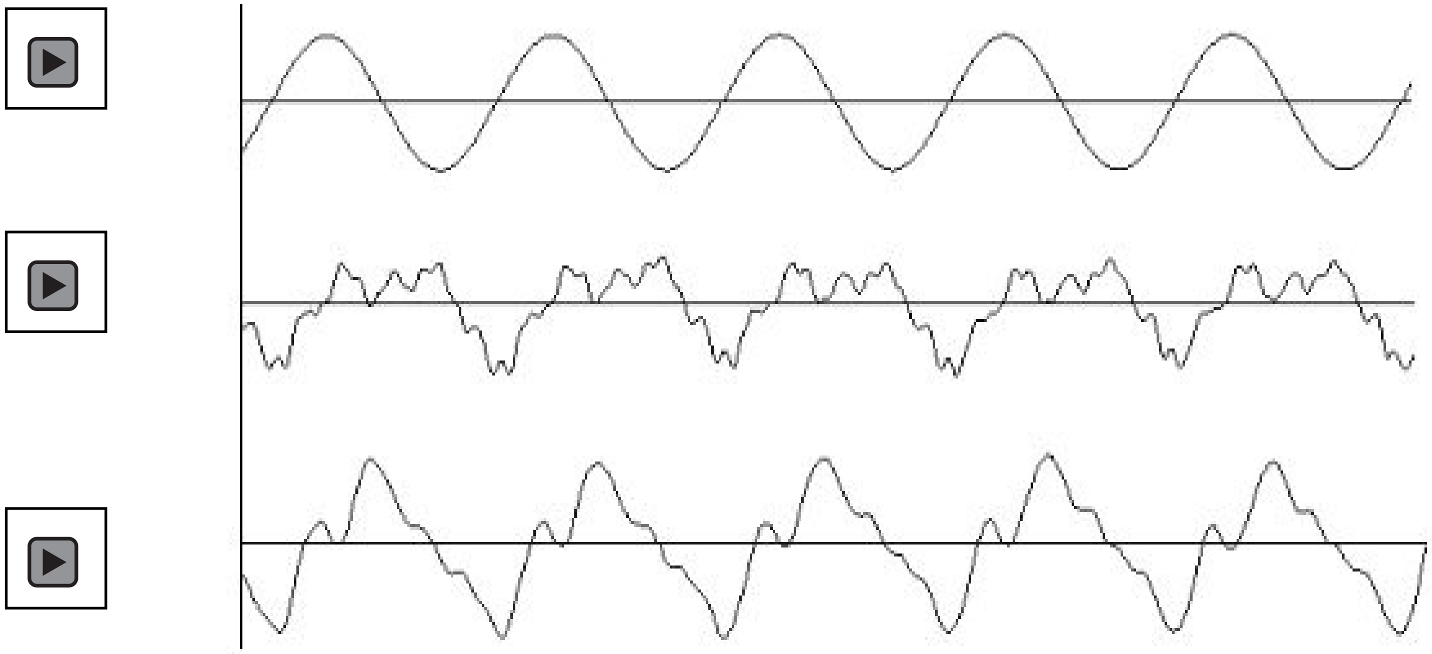
- reconstruction
- théorème d'échantillonnage
- sous-échantillonnage

Signaux, fréquences et bande passante

Qu'est-ce qu'un signal? C'est une fonction!

Exemples:

1) Une onde sonore (X : (temps) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (amplitude onde sonore sur un micro))



Signaux, fréquences et bande passante

Qu'est-ce qu'un signal? C'est une fonction!

Exemples:

3) Une photo noir-blanc (X : (chaque pixel de l'image) $R^2 \rightarrow R$ (amplitude niveau de gris)

image HDTV 1920 x 1080

= 2'073'600 pixel x 1 octet (N&B)

Signaux, fréquences et bande passante

Qu'est-ce qu'un signal? C'est une fonction!

Exemples:

4) Une photo couleur (X : (chaque pixel de l'image) $R^2 \rightarrow R^3$ (amplitude RGB))

3 octets (R-V-B) pour les couleurs HDTV
= 6'080'800 octets

Signaux, fréquences et bande passante

Qu'est-ce qu'un signal? C'est une fonction!

Exemples:

5) Une vidéo (chaque pixel de l'image x temps) $R^3 \rightarrow R^3$ (amplitude RGB)

Video = 24 images/s

= 145'939'200 pour 1s de video HDTV

= 8'756'000'000 pour 1 min = 8,8 GB

= 788 GB pour un film de 90 min

Signaux, fréquences et bande passante

Qu'est-ce qu'un signal? C'est une fonction!

Exemples:

1. Une onde sonore ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
2. Une onde électromagnétique ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)
3. Une photo noir-blanc ($X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)
4. Une photo couleur ($X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$)
5. Une vidéo ($X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

De manière générale, on peut définir un signal comme une fonction
$X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$.

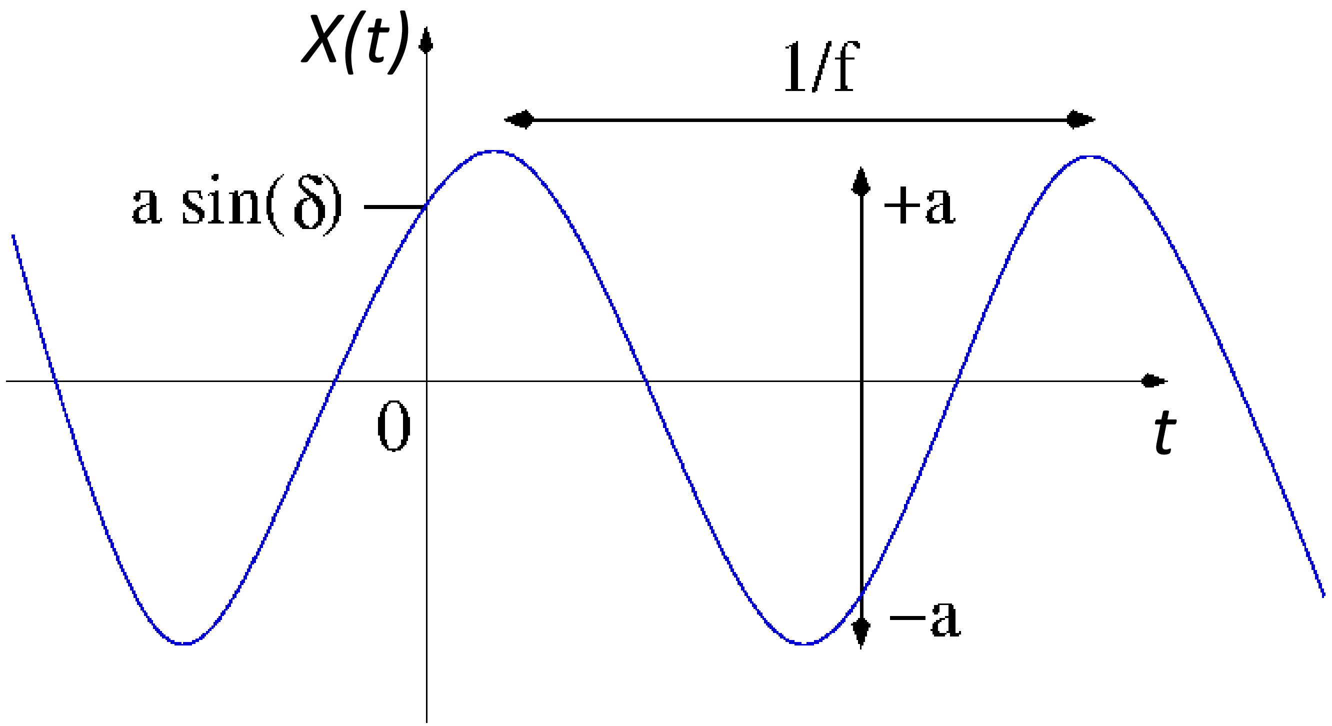
Dans le cadre de ce module, nous considérerons presque exclusivement des signaux unidimensionnels ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), par souci de clarté et de simplification.

Exemples de signaux

Sinusoïde pure:

$$X(t) = a \sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a =$ amplitude, $f =$ fréquence, T = période = 1/f , $\delta =$ déphasage



Exemples de signaux

Sinusoïde pure:

$$X(t) = a \sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in R$$

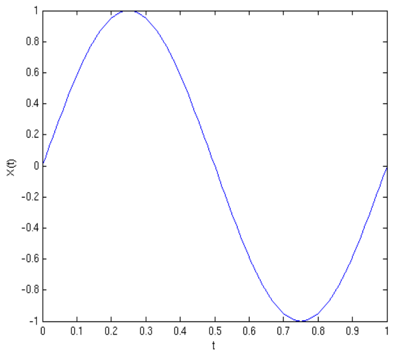
a = amplitude, f = fréquence, T = période = 1/f , δ = déphasage

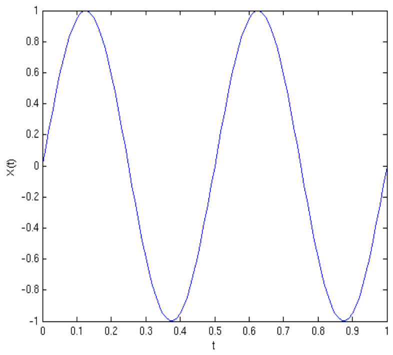
.., $a = 1$, $f = 1$, $\delta = 0$ $X(t) = \sin(2\pi t)$

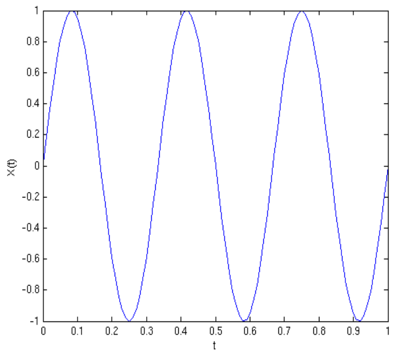
.., $a = 1$, $f = 2$, $\delta = 0$ $X(t) = \sin(4\pi t)$

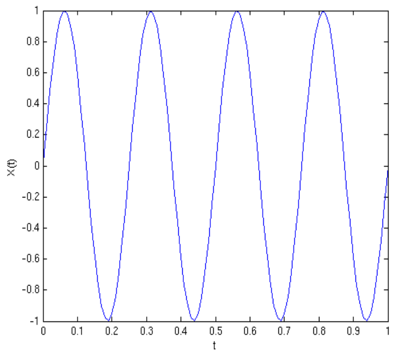
.., $a = 1$, $f = 3$, $\delta = 0$ $X(t) = \sin(6\pi t)$

.., $a = 1$, $f = 4$, $\delta = 0$ $X(t) = \sin(8\pi t)$









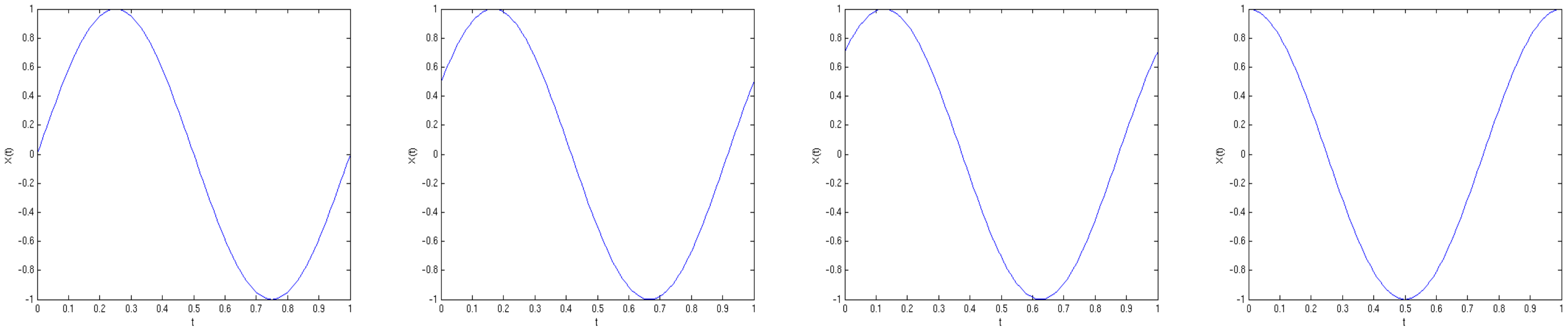
Exemples de signaux

Sinusoïde pure:

$$X(t) = a \sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

a = amplitude, f = fréquence, T = période = 1/f, δ = déphasage

- $a = 1, f = 1, \quad \delta = 0$ $\qquad X(t) = \sin(2\pi t)$
- $a = 1, f = 1, \quad \delta = \pi/6$ $\qquad X(t) = \sin(2\pi t + \pi/6)$
- $a = 1, f = 1, \quad \delta = \pi/4$ $\qquad X(t) = \sin(2\pi t + \pi/4)$
- $a = 1, f = 1, \quad \delta = \pi/2$ $\qquad X(t) = \sin(2\pi t + \pi/2) = \cos(2\pi t)$



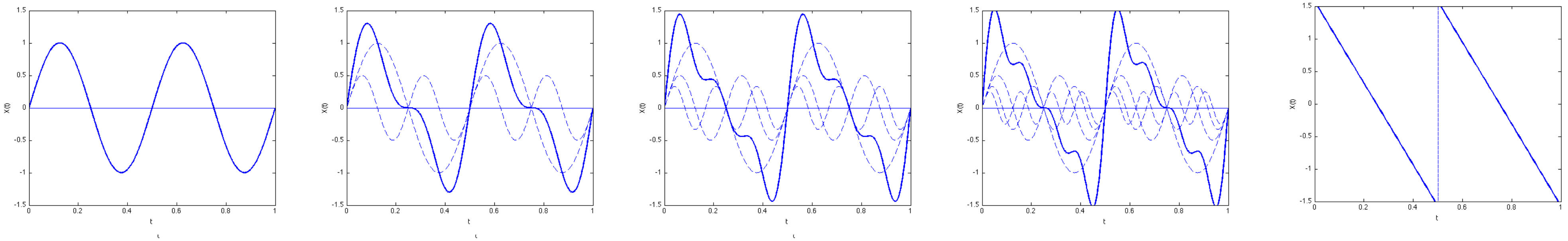
Exemples de signaux

Somme de sinusoïdes:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \ldots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n), \quad t \in \mathbb{R}$$

a_j = amplitudes, f_j = fréquences, δ_j = déphasages

- Exemple: $a_j = 1/j$, $f_j = 2j$, $\delta_j = 0$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
  - $n = 1 : X(t) = \sin(4\pi t)$
  - $n = 2 : X(t) = \sin(4\pi t) + 1/2 \sin(8\pi t)$
  - $n = 3 : X(t) = \sin(4\pi t) + 1/2 \sin(8\pi t) + 1/3 \sin(12\pi t)$
  - $n = 4 : X(t) = \sin(4\pi t) + 1/2 \sin(8\pi t) + 1/3 \sin(12\pi t) + 1/4 \sin(16\pi t)$
  - “$n = \infty$”



Signaux en général

Affirmation: (à mettre en doute...)

"Tout signal est une somme de sinusoïdes!"

Par la suite, nous ne considérerons que des signaux qui sont effectivement des sommes de sinusoïdes.

Fréquences: unité de mesure

La fréquence f contenue dans la sinusoïde pure $X(t) = \boldsymbol{a} \sin(2\pi \boldsymbol{f} t + \boldsymbol{\delta})$ s'exprime en hertz = Hz = $\frac{1}{\text{sec}}$.

Un signal dont la fréquence est de f Hz se répète toutes les $T = 1/f$ sec.

Exemple: La note “La” à 440 Hz est une sinusoïde pure qui se répète toutes les $\frac{1}{440}$ = 2.2727... millisecondes.

Cette unité de mesure a été attribuée en l'honneur d'Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), à qui on doit:

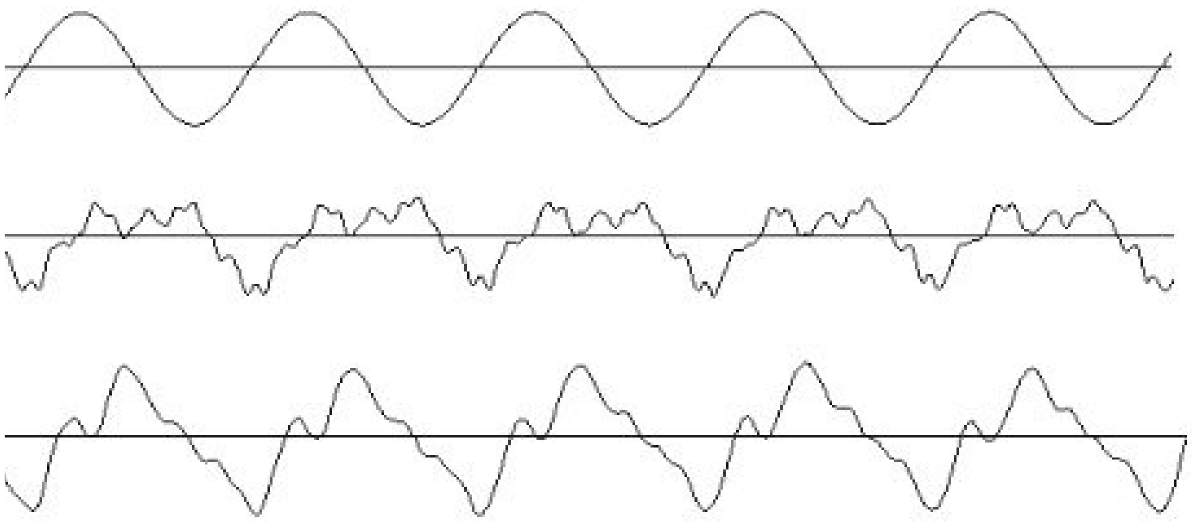
- la vérification expérimentale de la théorie de Maxwell affirmant que la lumière est une onde électromagnétique;
- le premier système permettant la transmission et la réception d'ondes radio.

Fréquences: quelques ordres de grandeur

- **Ondes sonores:**
  - 20 Hz - 20 kHz: sons audibles
  - 20 kHz +: ultrasons
- **Ondes électromagnétiques:**
  - 150 kHz - 3 GHz: ondes radio
  - 3 GHz - 300 GHz: micro-ondes, radar
  - 300 GHz - 4.3×10^{14} Hz: infrarouge
  - 4.3×10^{14} Hz - 7.5×10^{14} Hz: lumière visible
  - 7.5×10^{14} Hz - 3×10^{17} Hz: ultraviolet
  - 3×10^{17} Hz +: rayons X, rayons γ, rayons cosmiques...

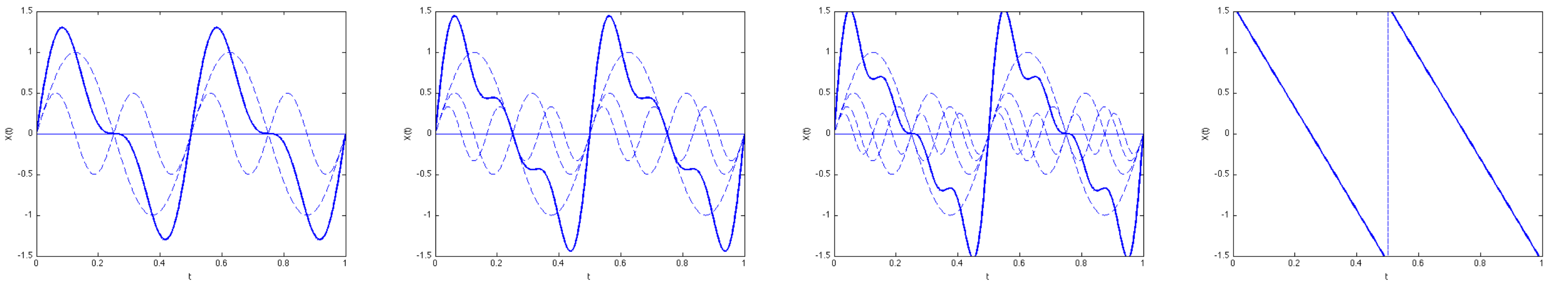
Tous les “La à 440 Hz” ne sont pas les mêmes!

EXEMPLE tiré de: http://www.yuvalnov.org/temperament/



EXEMPLE : addition des harmoniques de 220 Hz

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Additive_220Hz_Sawtooth_Wave.wav



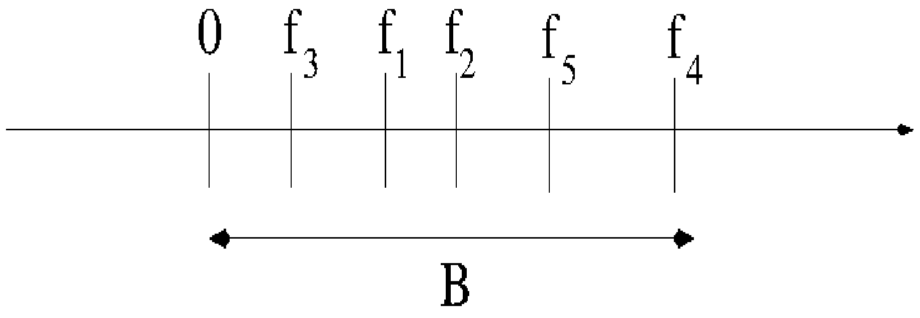
Bande passante

Revenons à notre somme de sinusoïdes:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \ldots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

On définit comme suit la ***bande passante*** de ce signal:

$$B = f_{\max} = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$$



Comme nous allons le voir, la bande passante joue un rôle primordial en traitement du signal.

Filtrage d'un signal

De manière générale, lorsqu'un signal ($X(t)$, $t \in$ R) passe par un *filtre*, il en ressort une version déformée ($\hat{X}(t)$, $t \in$ R):

Pourquoi donc vouloir filtrer un signal? Le plus souvent, pour supprimer (ou du moins, atténuer) le bruit présent dans le signal.

Il existe bien sûr de multiples sortes de filtres.

Dans ce cours, nous allons voir une catégorie particulière de filtres:

les filtres "passe-bas"

Filtre passe-bas idéal

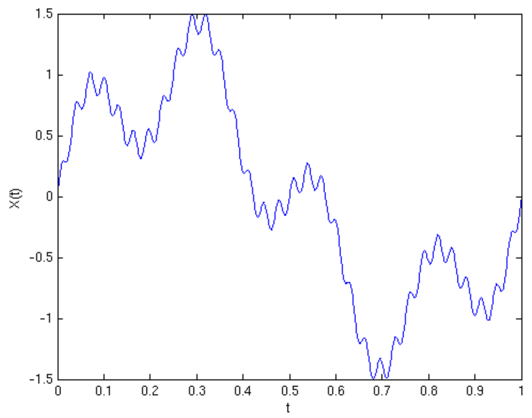
Un filtre passe-bas idéal est un filtre qui supprime les hautes fréquences présentes dans un signal (généralement sources de bruit).

Concrètement, si $X(t)$ est une somme de sinusoïdes, alors après le filtre, toutes les composantes de $X(t)$ dont la fréquence est plus grande qu'une ***fréquence de coupure*** f_c donnée disparaissent.

Exemple:

- Considérons le signal (contenant les fréquences $f = 1$ Hz, 4 Hz et 32 Hz):

$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{10}\sin(64\pi t)$$



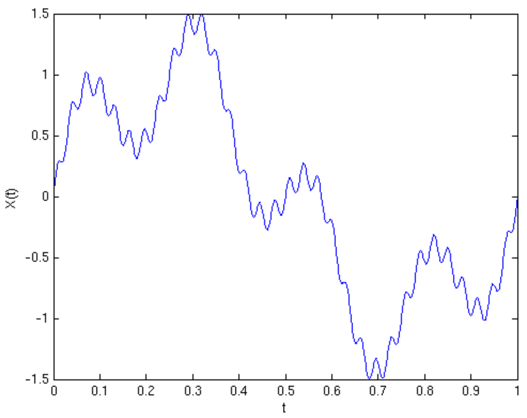
Filtre passe-bas idéal

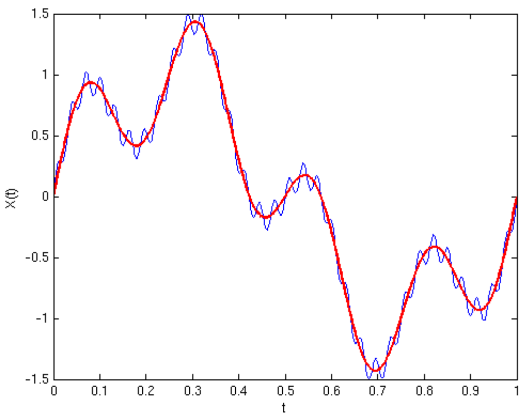
Un filtre passe-bas idéal est un filtre qui supprime les hautes fréquences présentes dans un signal (généralement sources de bruit).

Concrètement, si $X(t)$ est une somme de sinusoïdes, alors après le filtre, toutes les composantes de $X(t)$ dont la fréquence est plus grande qu'une ***fréquence de coupure f_c*** donnée disparaissent.

Exemple:

- Après passage au travers d'un filtre passe-bas avec fréquence de coupure f_c = **30 Hz**, la composante du signal à 32 Hz disparaît, et le signal devient: $\hat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$





Filtre à moyenne mobile

Le signal $\hat{X}(t)$ sortant à l'instant t d'un filtre à moyenne mobile est donné par:

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c}\int_{t-T_c}^{t} X(s)ds$$

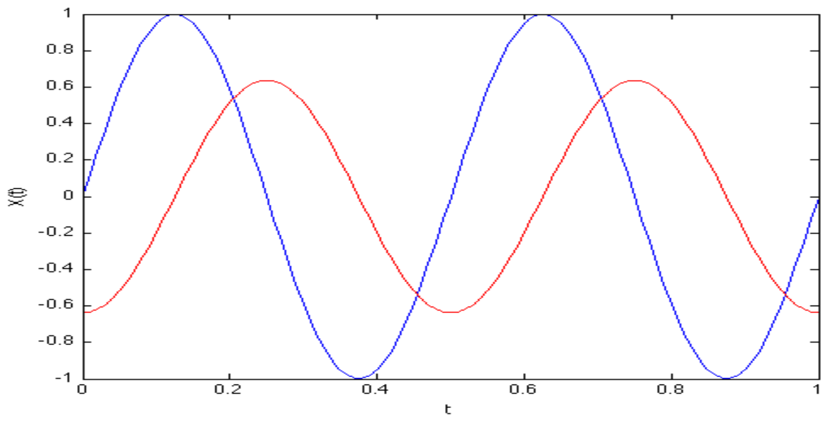
T_c est la durée sur laquelle on calcule la moyenne du signal avant l'instant t.

Exemple: Qu'arrive-t-il à une sinusoïde pure qui passe par un tel filtre?
$X(t) = \sin(2\pi f t)$ devient

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c}\int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi fs)ds$$

Sachant que la primitive de $\sin(\,)$ est $-\cos(\,)$:

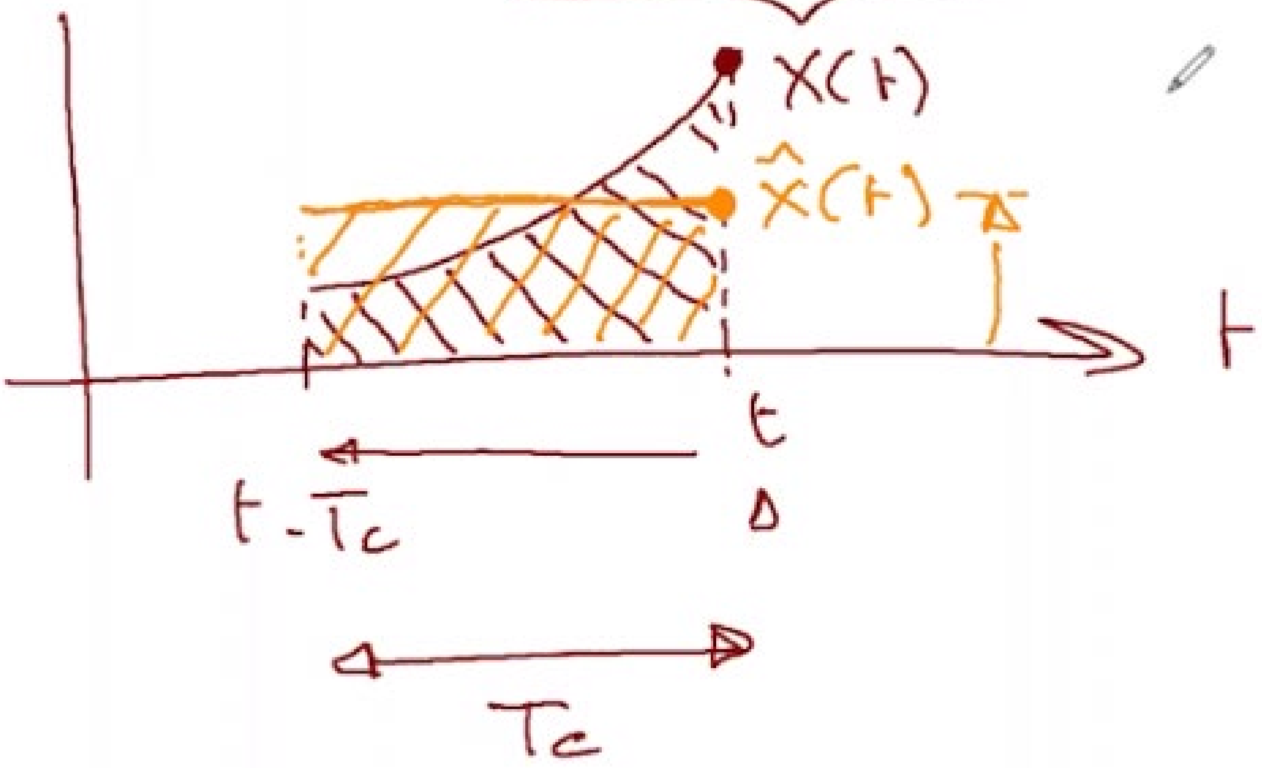
$$= \frac{\cos(2\pi f(t-T_c)) - \cos(2\pi ft)}{2\pi fT_c}$$



(ici, f = 2 Hz, T_c = 0.25 sec)

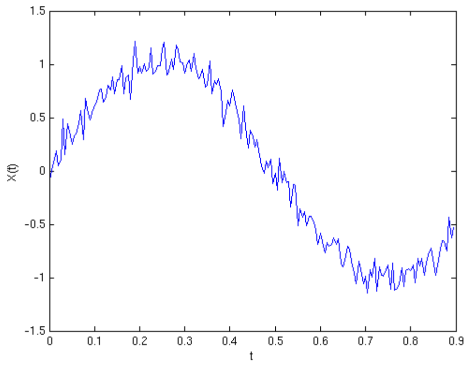
$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c}\int_{t-T_c}^{t} X(s)ds$$

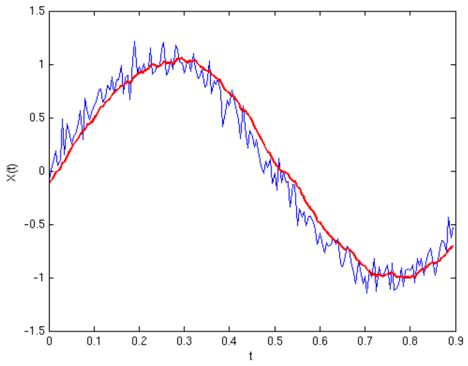
$$\hat{X}(t).T_c = \underbrace{\int_{t-T_c}^{t} X(s)\,ds}$$



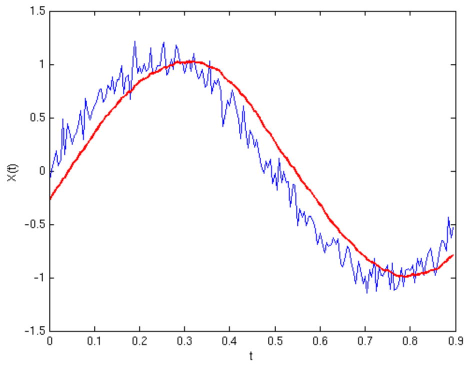
Filtre à moyenne mobile

Autre exemple: $X(t) \rightarrow \hat{X}(t)$





$T_c = 0.05\text{sec}$

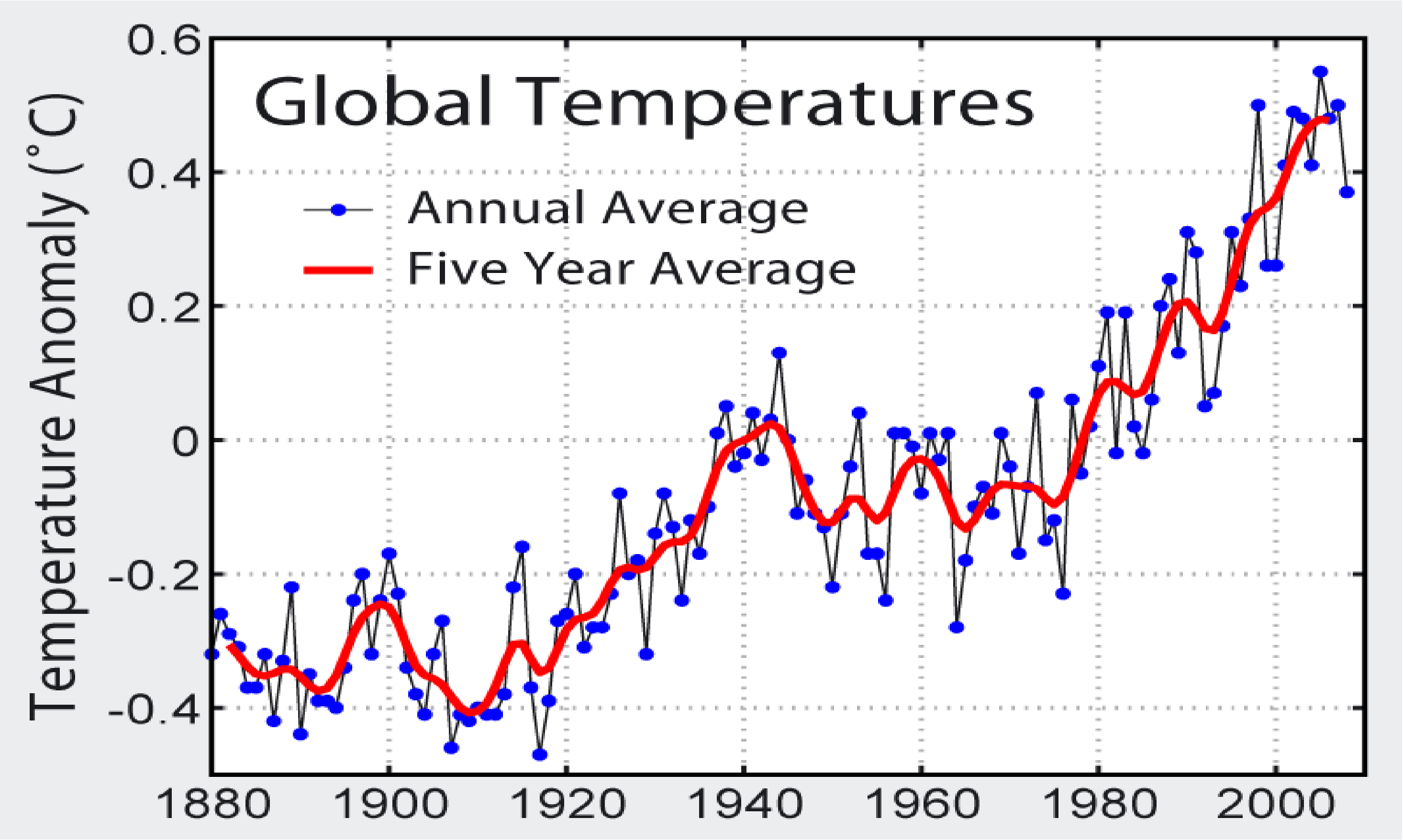


$T_c = 0.1\text{sec}$

Plus T_c augmente, plus le signal sortant est régulier, mais plus le délai est grand également.

Filtre à moyenne mobile

Autre exemple:



Global average surface temperature 1880 to 2009, with zero point set at the average temperature between 1961 and 1990.

source: Global Warming Art

Filtre à moyenne mobile

Revenons à la sinusoïde pure:

$X(t) = \sin(2\pi f t)$

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c}\int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi fs)ds$$

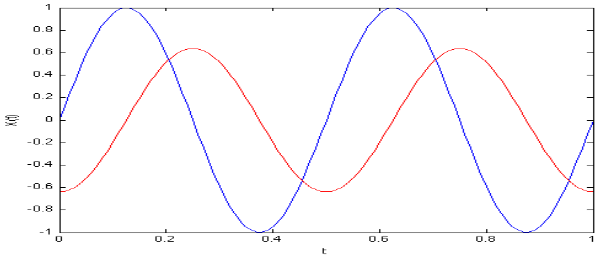
[la primitive de *sin( )* est : – *cos( )*]

$$= \frac{\cos(2\pi f(t-T_c)) - \cos(2\pi ft)}{2\pi fT_c}$$

[*cos(b) – cos(a) = 2 sin((a-b)/2)sin((a+b)/2)*]

$$= \frac{\sin(\pi fT_c)}{\pi fT_c}\sin(2\pi ft - \pi fT_c)$$

On déduit que $\forall t \in \mathbb{R}, \max\left|\hat{X}(t)\right| \leq \frac{1}{\pi fT_c}$

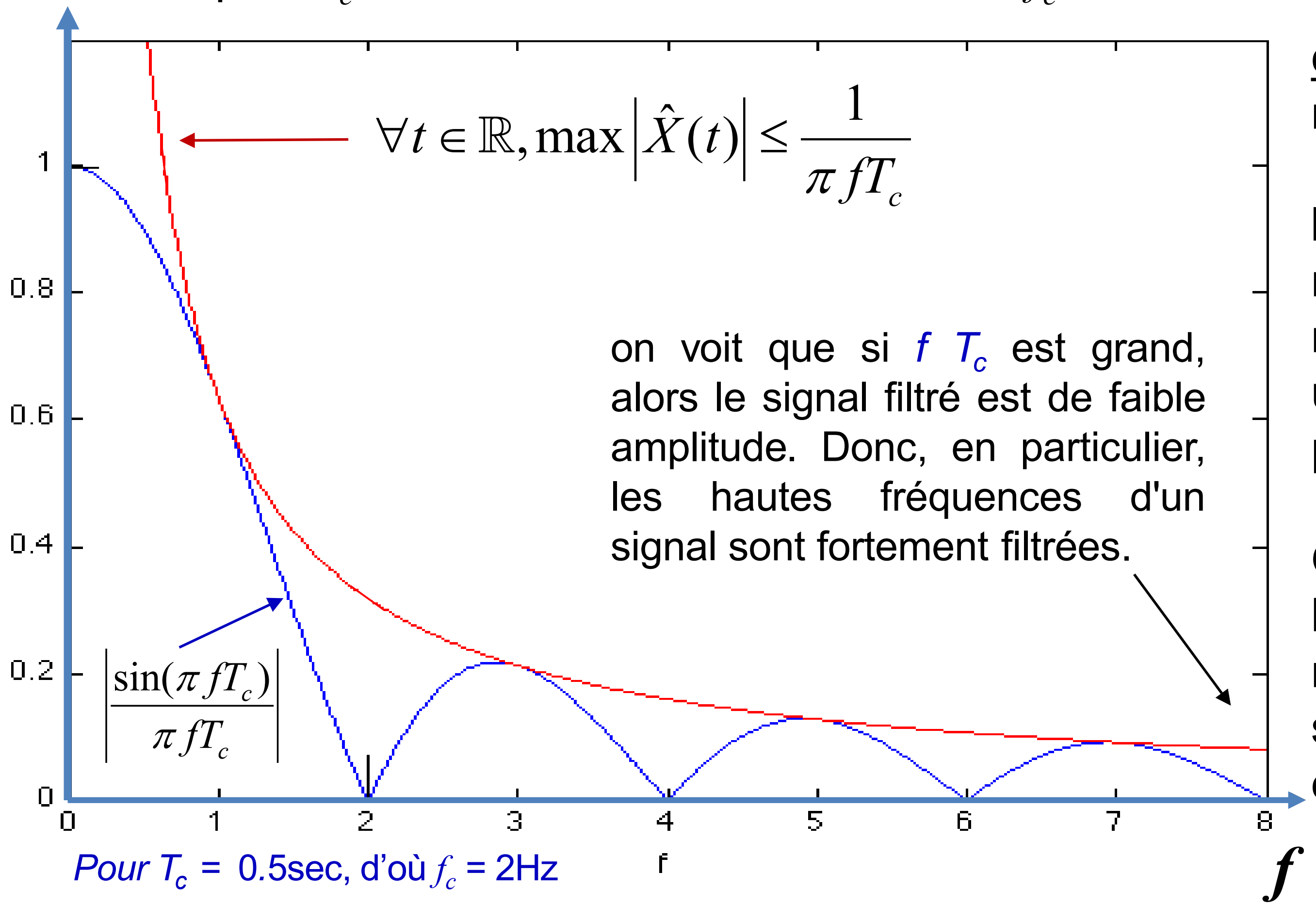


(ici, f = 2 Hz, T_c = 0.25 s donc max= $2/\pi$

on voit que si $f\ T_c$ est grand, alors le signal filtré est de faible amplitude. Donc, en particulier, les hautes fréquences d'un signal sont fortement filtrées.

Filtre à moyenne mobile

On en déduit que l'amplitude maximum du signal filtré est bornée par la fonction majorante $1/(\pi f T_c)$ dessinée en rouge pour T_c constant valant 0,5s, c'est-à-dire f_c=2Hz



on voit que si $f\ T_c$ est grand, alors le signal filtré est de faible amplitude. Donc, en particulier, les hautes fréquences d'un signal sont fortement filtrées.

Pour T_c = 0.5sec, d'où f_c = 2Hz

<u>cas particulier</u>: si T_c est un multiple entier de la période $T = 1/f$, la valeur exacte de l'intégrale est nulle car la moyenne d'un sinus est nulle sur une période (ou un multiple entier de périodes).

On voit aussi sur la courbe bleue que $sin(\pi\ f\ Tc)$ se rapproche de 0 quand $\pi f Tc$ se rapproche de $K\pi$, avec K entier

SpeakUp: On filtre un signal X(t) avec deux filtres à moyenne mobile F1 et F2.

Sachant que la période d'intégration Tc de F2 est le double de celle de F1, quelle différence y a-t-il entre les signaux filtrés X1(t) et X2(t) ?

A. Aucune différence
B. La période de X2(t) est le double de celle de X1(t)
C. La fréquence de X2(t) est le double de celle de X1(t)
D. L'amplitude de X2(t) est le double de celle de X1(t)
E. La période de X2(t) est la moitié de celle de X1(t)
F. La fréquence de X2(t) est la moitié de celle de X1(t)
G. L'amplitude de X2(t) est la moitié de celle de X1(t)
H. Ça dépend de la fréquence de X(t)

Élément de réponse: A_2 et A_1 étant les amplitudes respectives de X2(t) et de X1(t), on a :

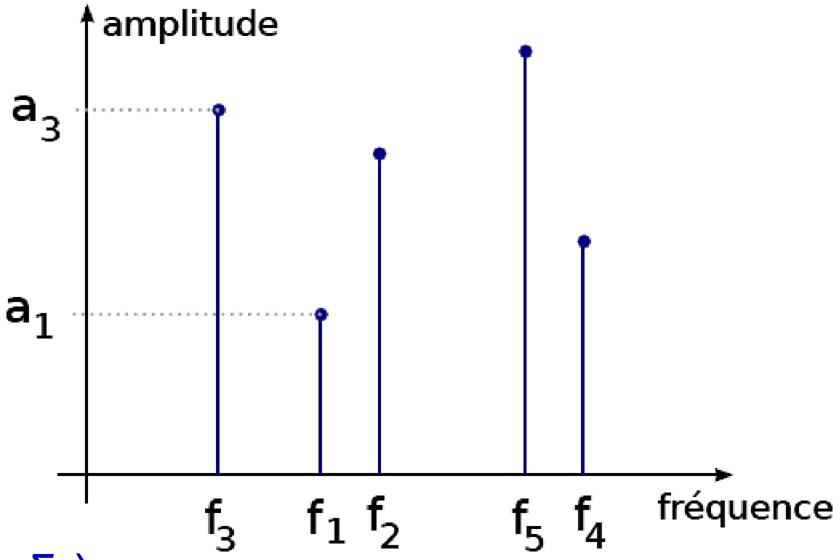
$$A_2 = \frac{\sin(\pi f 2T_c)}{\pi f 2T_c} = 2\frac{\sin(\pi f T_c)\cos(\pi f T_c)}{\pi f 2T_c} = A_1 \cos(\pi f T_c)$$

Spectre

Comment représenter graphiquement l'effet d'un filtre?

dans "l'espace des fréquences" :

. axe horizontal = fréquences présentes
. axe vertical = amplitude correspondante



Exemple avec une somme de sinusoïdes:

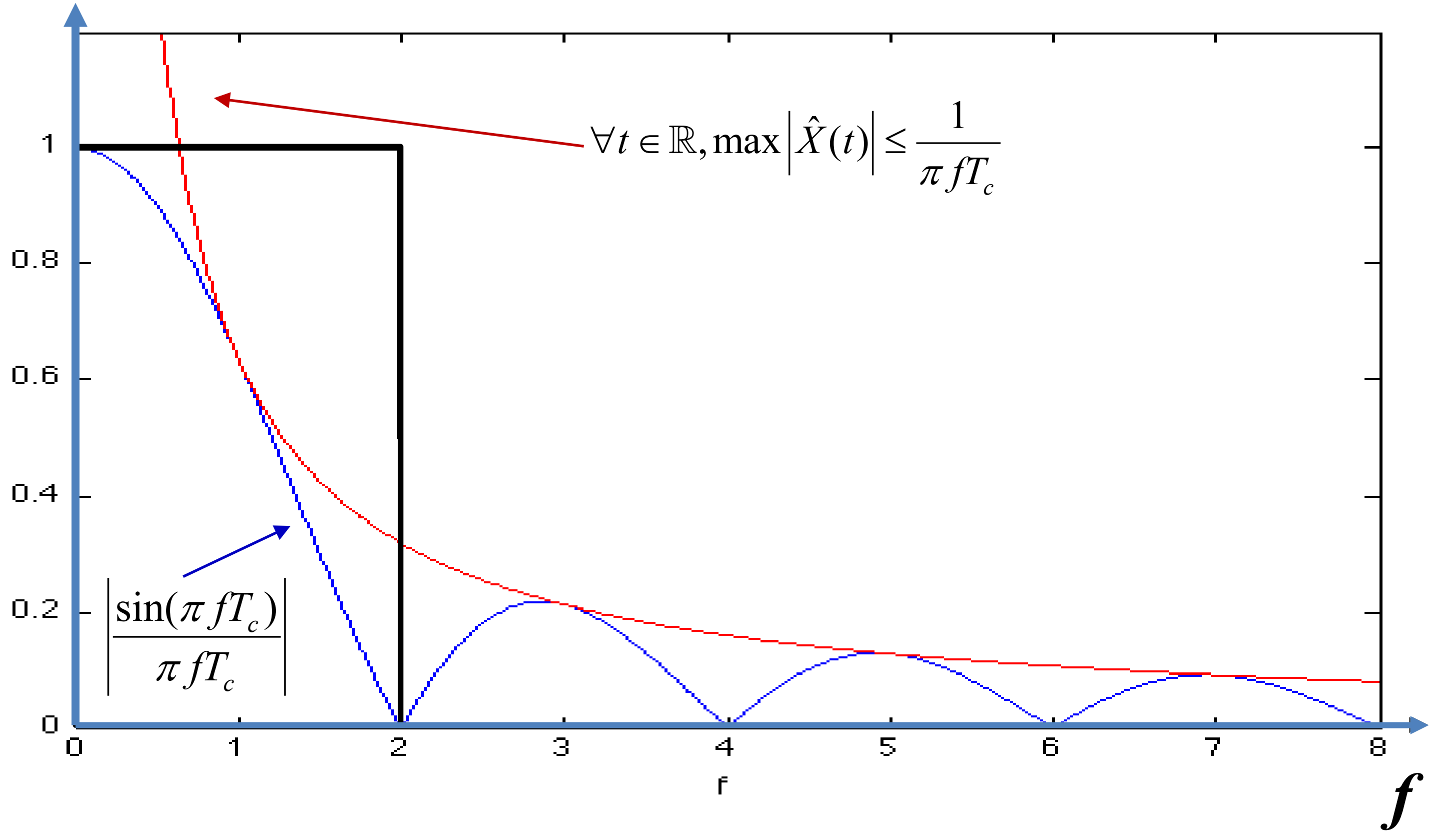
$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \ldots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

cette représentation s'appelle le **spectre** du signal.

Comparaison

Comparons l'atténuation des fréquences entre:

- un filtre passe-bas idéal avec fréquence de coupure f_c **= 2 Hz** et
- un filtre à moyenne mobile de durée d'intégration $T_c = 1/f_c = 0.5$ **sec**.



Filtres: conclusion

- Un filtre **passe-bas** sert donc à supprimer ou atténuer les hautes fréquences dans un signal.
- La semaine prochaine, nous verrons une application importante des filtres passe-bas.

Echantillonnage d'un signal

Revenons maintenant à notre première question:

Comment représenter / capter la réalité physique avec des bits?

Les signaux qui nous entourent sont de nature analogique (ondes sonores, électromagnétiques).

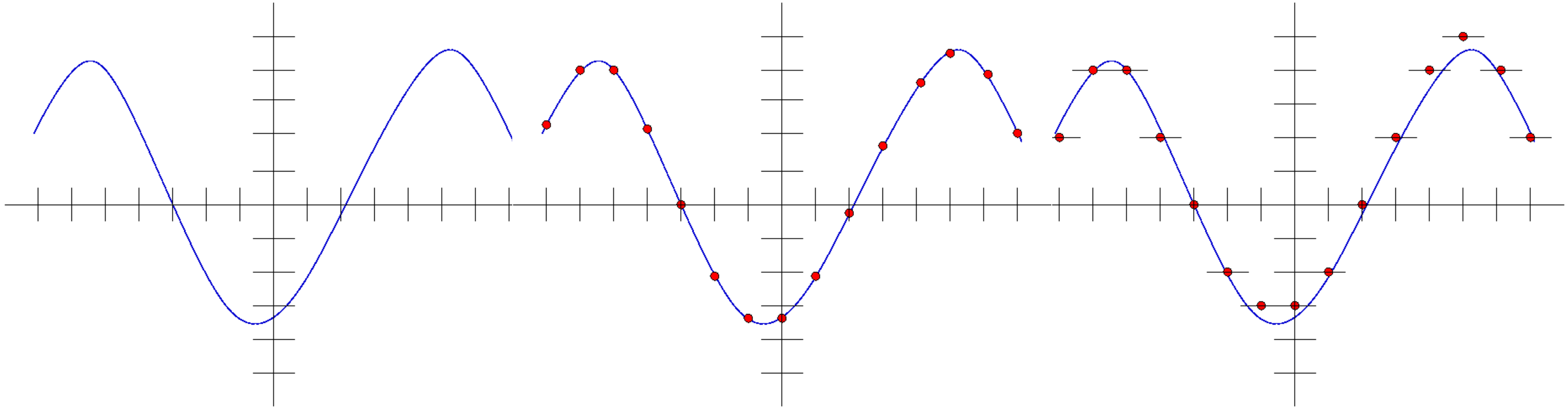
Or un ordinateur ne peut traiter que des données numériques.

Pour pouvoir traiter l'information contenue dans un signal $(X(t), t \in \mathrm{R})$, il faut donc:

1. **échantillonner** le signal à des instants **discrets**;
2. **quantifier** les valeurs du signal à ces instants.

Une question se pose naturellement: que perd-on du signal d'origine à travers ces deux opérations successives?

Echantillonnage d’un signal

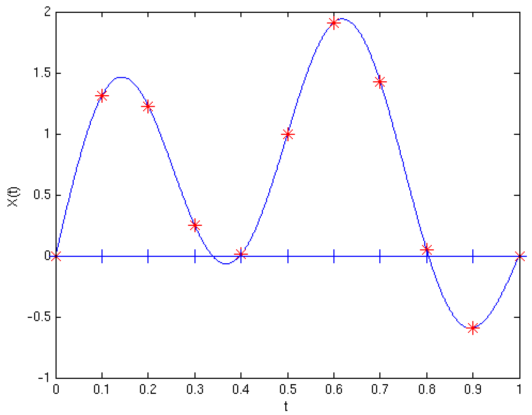


- signal d’origine
- signal **échantillonné**
- signal **échantillonné** et **quantifié**

Echantillonnage d’un signal

Nous nous concentrons ici sur la partie “échantilonnage”:

signal entrant $(X(t), t \in \mathbb{R})$ → signal échantillonné $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$:



T_e = période d’échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T_e}$ = fréquence d’échantillonnage

Période d'échantillonnage T_e

Quelle période d'échantillonnage T_e est la "bonne"?

- T_e trop petite: trop d'information à traiter...
- T_e trop grande: de l'information est perdue...

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

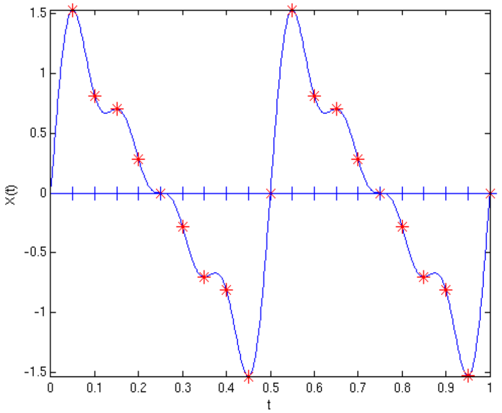
- **Exemple:** reprenons le signal vu précédemment:

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

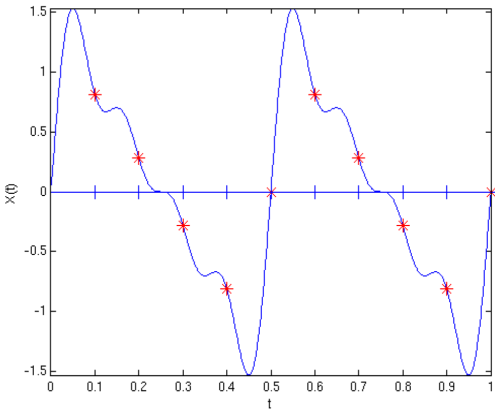
T_e ne peut pas être aussi grande qu’on veut

- **Exemple:** reprenons le signal vu précédemment:

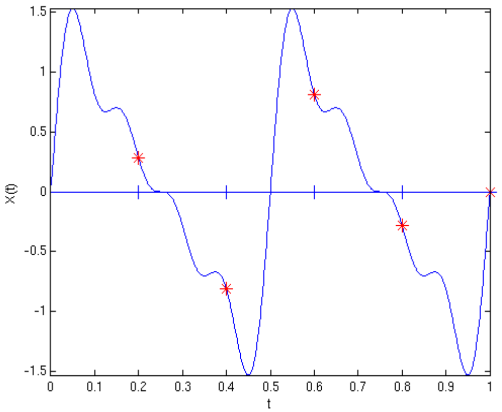
$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$



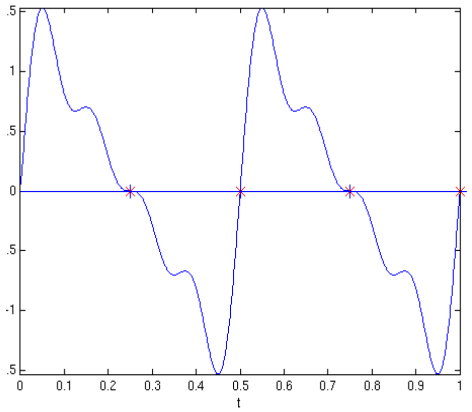
$T_e = 0.05$ sec.



$T_e = 0.1$ sec.



$T_e = 0.2$ sec.

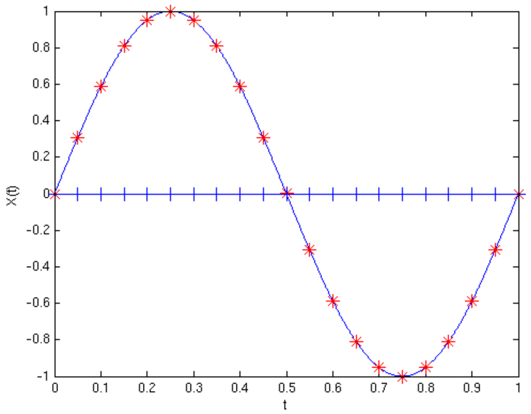


$T_e = 0.25$ sec.

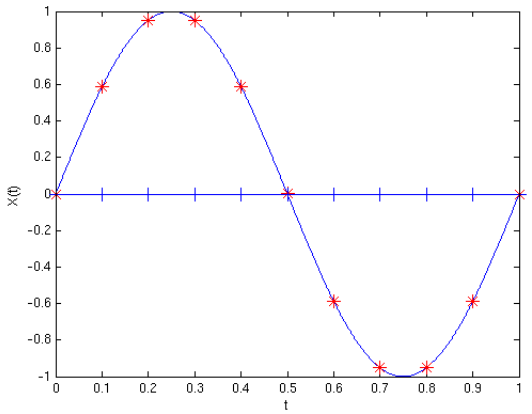
Période d'échantillonnage Te

Echantillonnage d'une sinusoïde pure

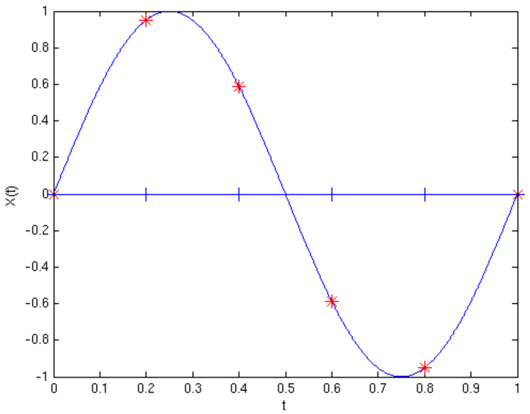
- **Autre exemple:** sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ $(f = 1\,\mathrm{Hz})$



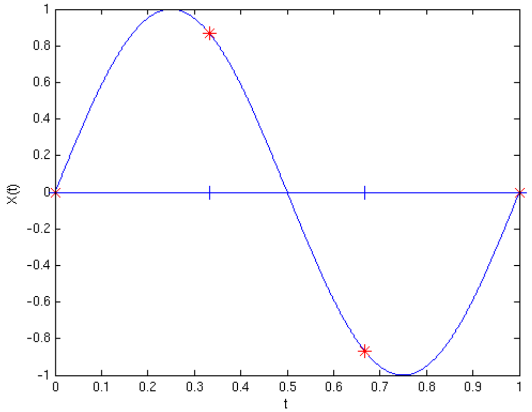
$T_e = 0.05$ sec.



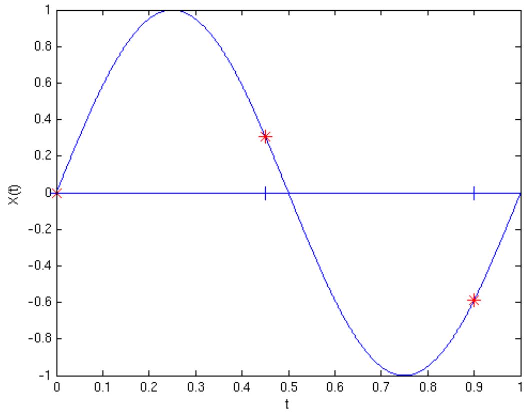
$T_e = 0.1$ sec.



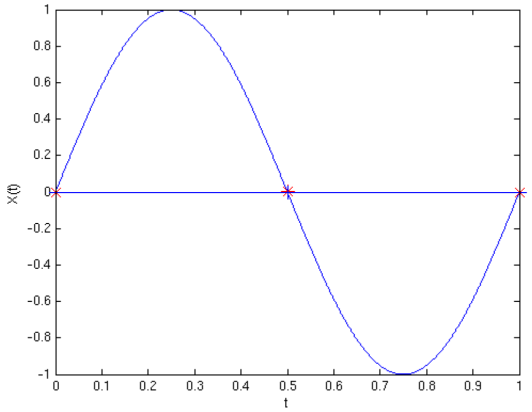
$T_e = 0.2$ sec.



$T_e = 0.33$ sec.



$T_e = 0.45$ sec.

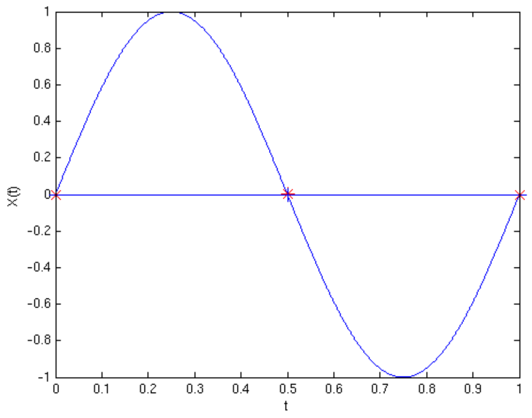


$T_e = 0.5$ sec.

Echantillonnage d'une sinusoïde pure

- **Autre exemple:** sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1\,\mathrm{Hz})$$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.5$ sec.

Pour pouvoir reconstruire la sinusoïde à partir de l'échantillon,
il est nécessaire que $T_e < 0.5$ sec, autrement dit, que $f_e = \frac{1}{T_e} > 2$ Hz.

Echantillonnage d'une sinusoïde pure

De manière plus générale, on peut dire la chose suivante:

- Soit $X(t)$ une sinusoïde pure de fréquence égale à f.
- Pour pouvoir reconstruire cette sinusoïde à partir de sa version échantillonnée à la fréquence f_e, il est nécessaire que

$$f_e > 2f$$

- Le ***théorème d'échantillonnage*** que nous verrons la semaine prochaine dit pour l'essentiel que cette condition est non seulement ***nécessaire*** mais aussi ***suffisante***.
- Nous verrons également que ce théorème s'applique à tous les signaux, et pas seulement aux sinusoïdes.

Application

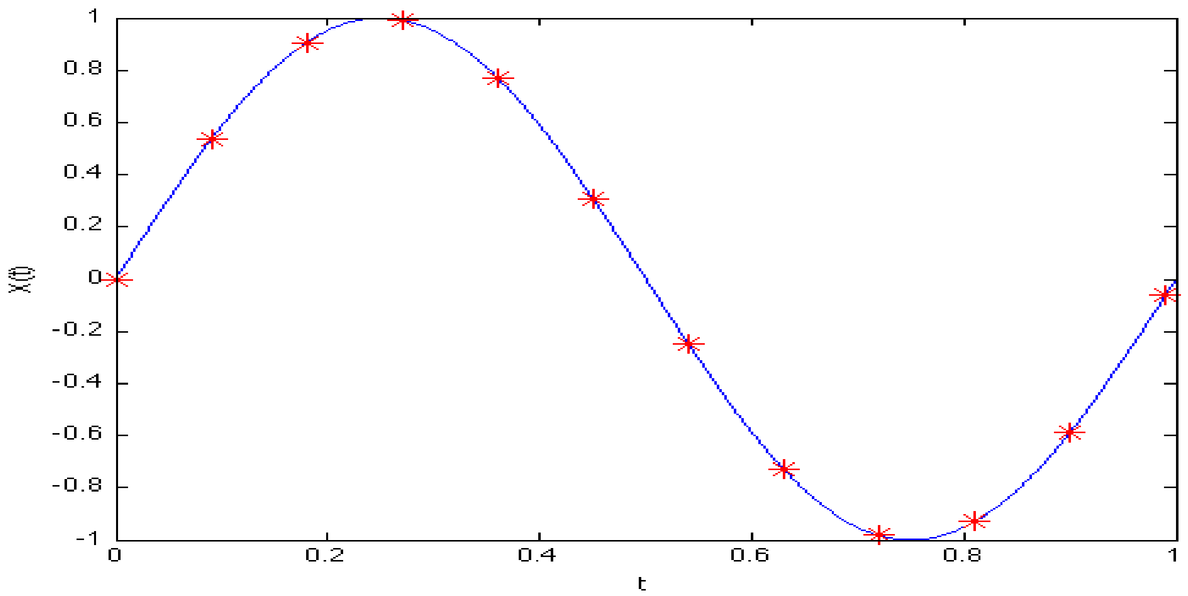
Sur un CD, le son est échantillonné à une fréquence de 44.1 kHz, car les sons au-dessus d'une fréquence de 20 kHz ne sont (en général) pas perçus par l'oreille humaine.

Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il?

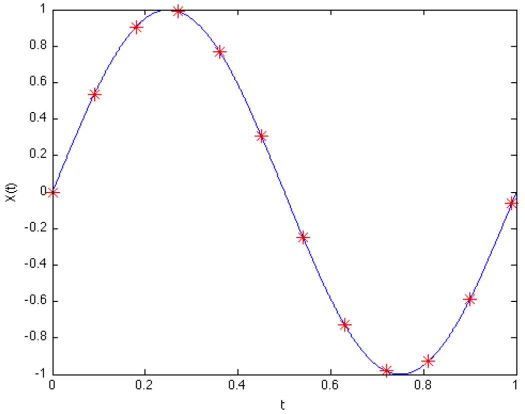
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est *sous-échantillonné* ?

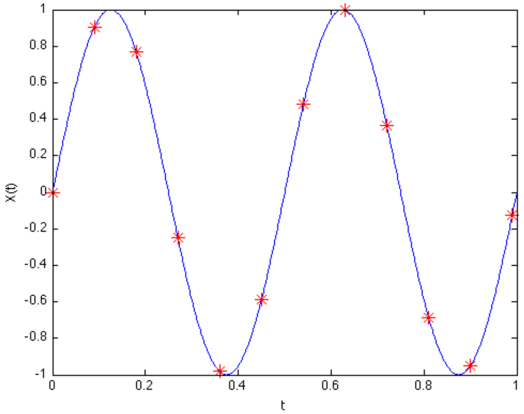
Nous poursuivons ici avec l'exemple d'une sinusoïde pure:
$X(t) = \sin(2\pi f\, t)$, échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.11...$ Hz.

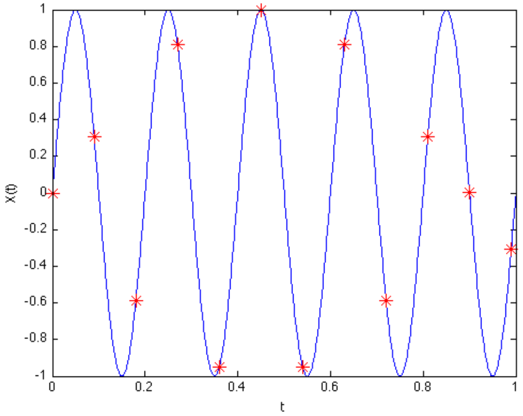
.., $f = 1$ Hz



Et si f_e < $2f$, que se passe-t-il?

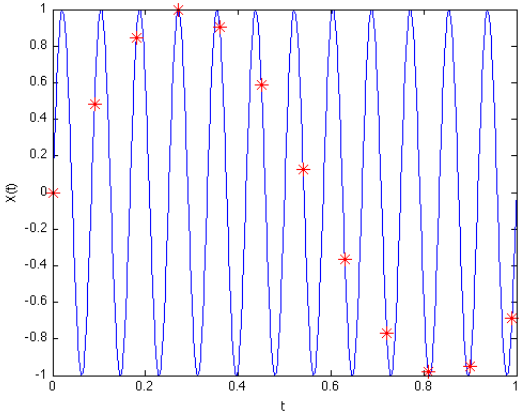


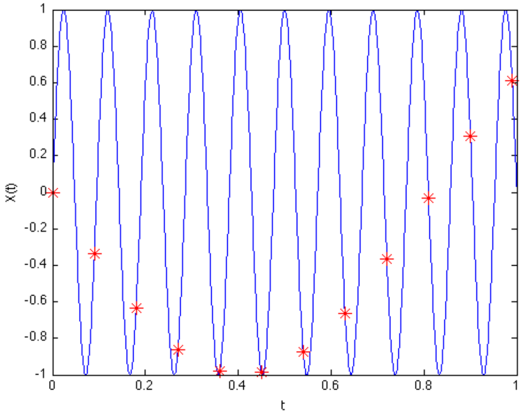


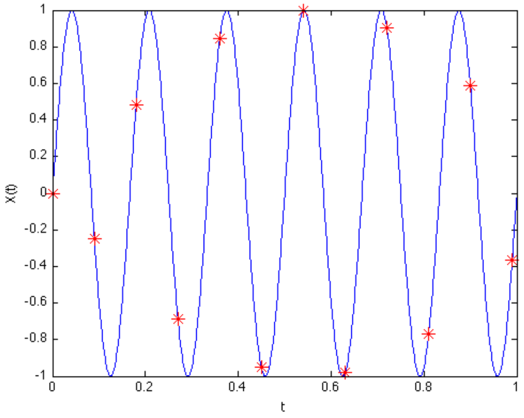


f = 1 Hz f = 2 Hz f = 5 Hz

f = 12 Hz f = 10.5 Hz f = 6 Hz





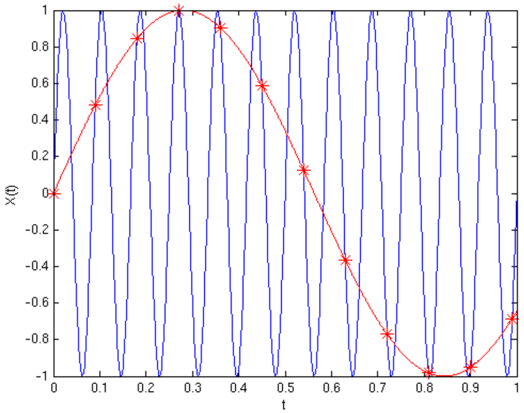


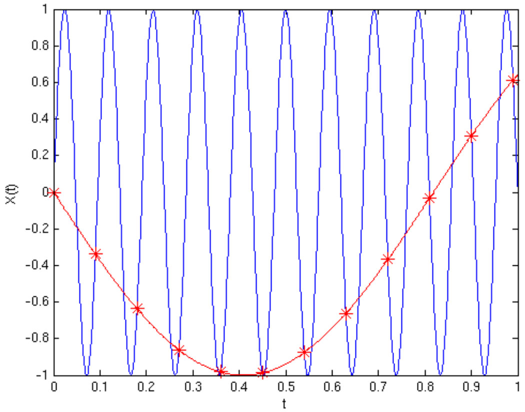
Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il?

Dans les deux derniers cas, nous avons vu apparaître:

- une sinusoïde avec une fréquence plus lente;
- une autre sinusoïde, également avec une fréquence plus lente, qui part d'abord vers le bas.

https://www.youtube.com/watch?v=2IghwseolSc





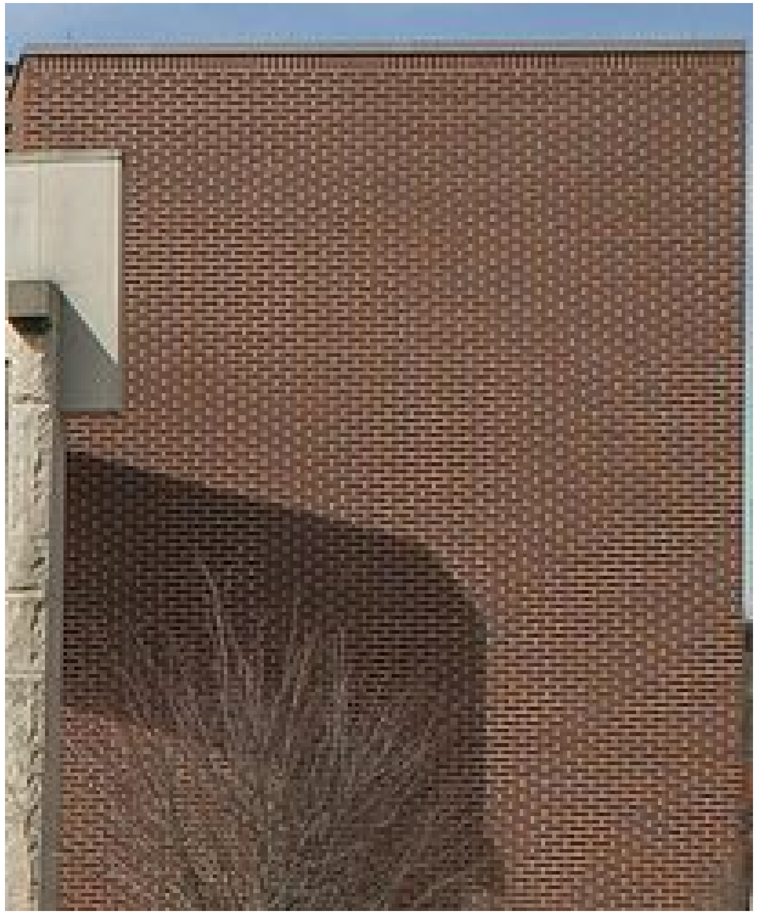
autre exemple video (roue voiture):

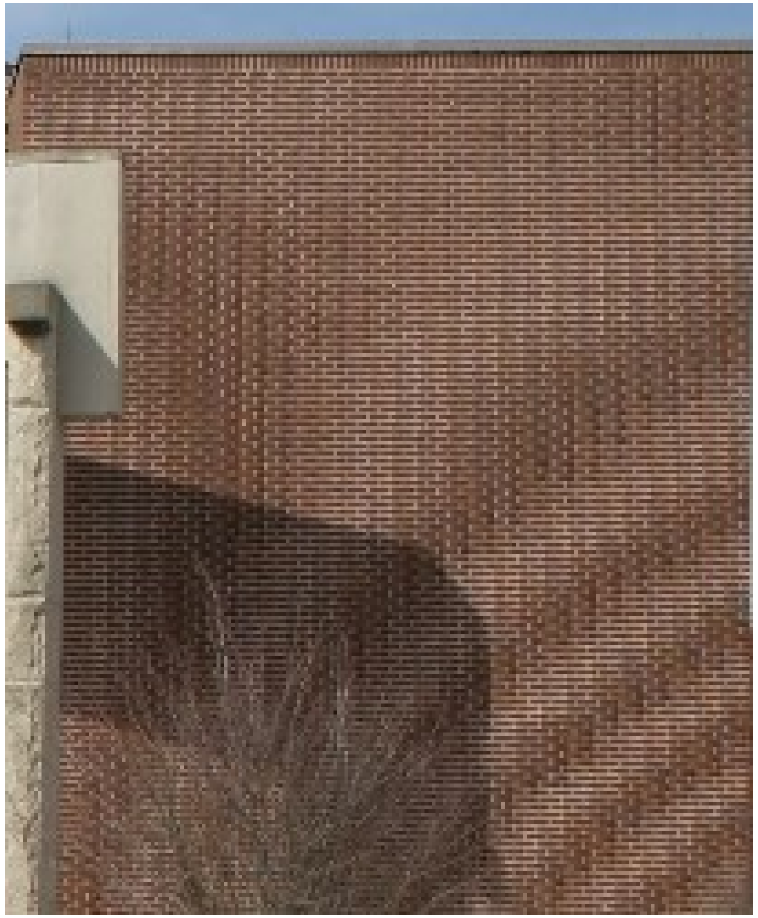
Ce phénomène s'appelle l'*effet stroboscopique* et survient donc lorsqu'on *sous-échantillonne* un signal. Nous y reviendrons en détail la semaine prochaine.

http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA

Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il?

Exemple sur une texture de mur de brique:





Autre exemple sur du tissu: http://www.youtube.com/watch?v=jXEgnRWRJfg

Conclusion temporaire

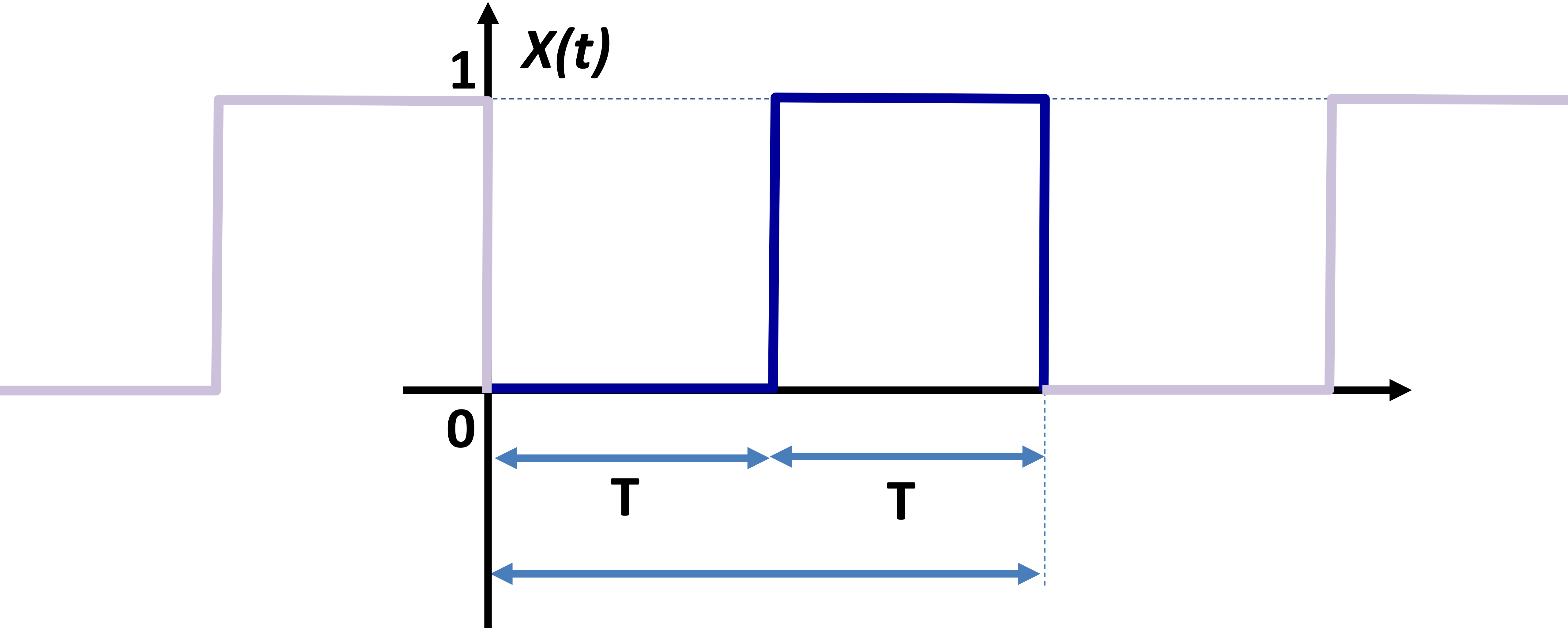
- signaux / sinusoïdes
- “tout signal est une somme de sinusoïdes!”
- fréquence(s) présente(s) dans un signal, bande passante
- filtrage et échantillonnage
- condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal: $f_e > 2f$

La semaine prochaine:

- comment reconstruire un signal à partir d’un échantillon donné?
- théorème d’échantillonnage
- sous-échantillonnage

Exercice

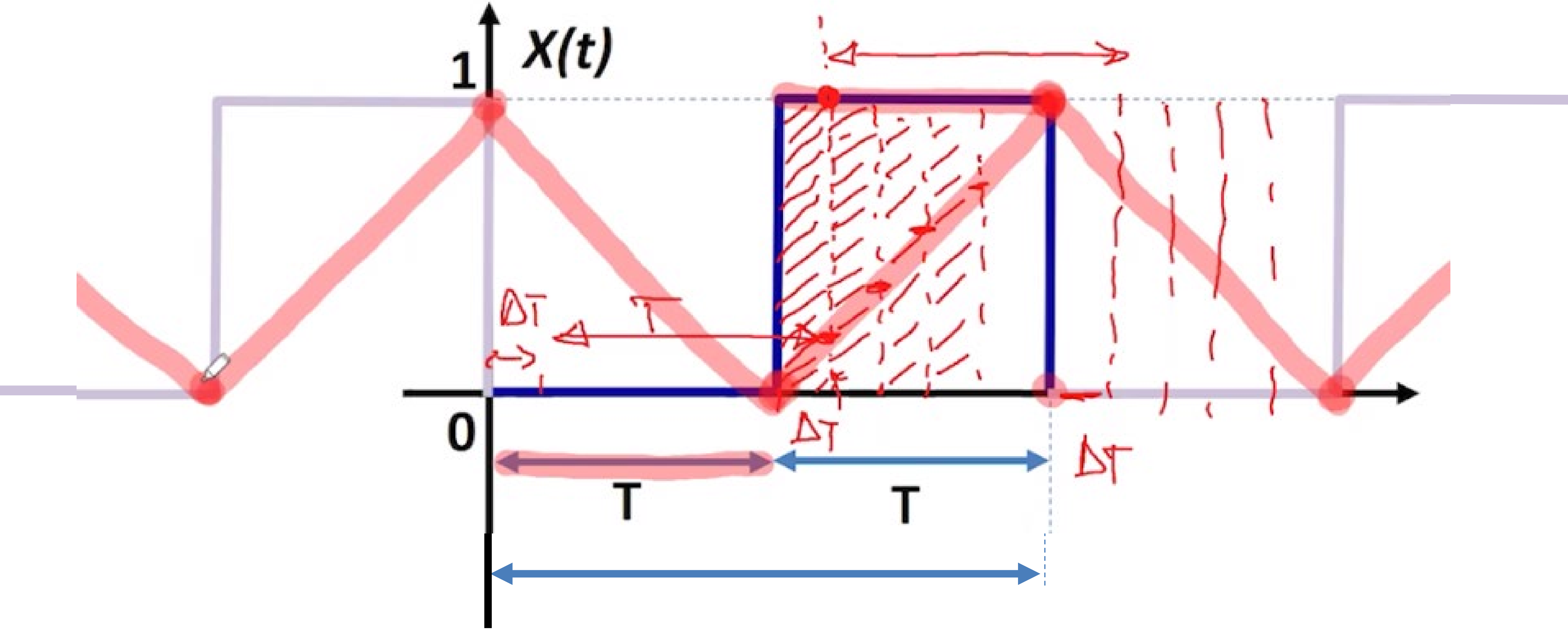
1. A quoi ressemble le signal périodique $X(t)$ de période 2*T suivant:



après passage à travers un filtre à moyenne mobile de durée T_c = T ?

Exercice

1. A quoi ressemble le signal périodique $X(t)$ de période 2*T suivant:



après passage à travers un filtre à moyenne mobile de durée T_c = T ?