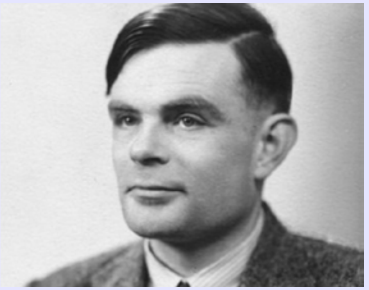
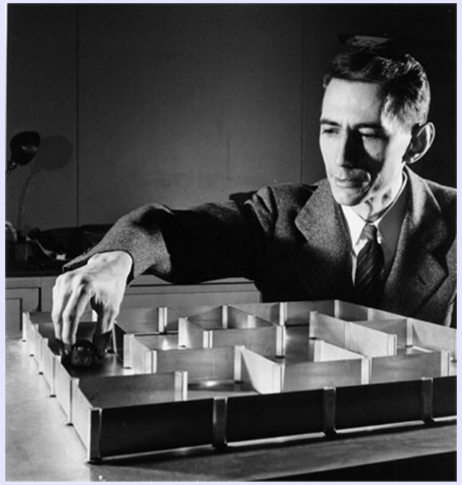
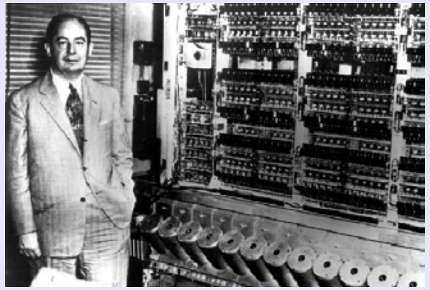




Information, Calcul et Communication

Module 2: Information et Communication

Echantillonnage de signaux (2ème partie)

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

Echantillonnage de signaux: rappel

Plan détaillé de ces deux leçons:

La semaine dernière:

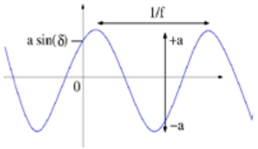
- signaux, fréquences et bande passante
- filtrage
- échantillonnage

Aujourd'hui:

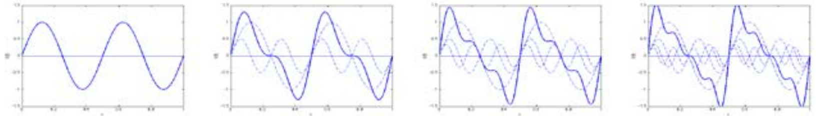
- bref rappel
- reconstruction
- théorème d'échantillonnage
- sous-échantillonnage

Echantillonnage de signaux: rappel

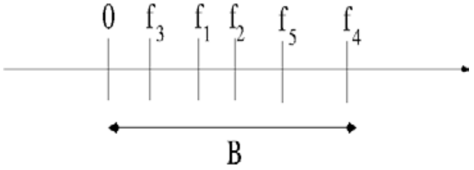
signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$, ex: sinusoïde

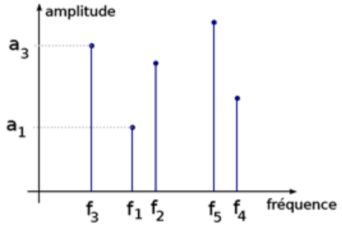


- “tout signal est une somme de sinusoïdes”

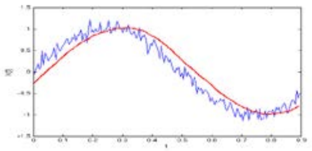


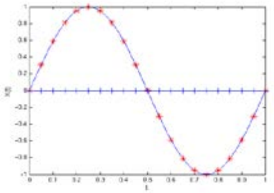
- fréquence(s) présente(s) dans un signal,
  bande passante et spectre



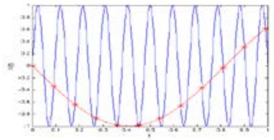


- filtre passe-bas idéal et filtre à moyenne mobile





- signal échantillonné $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$: période T_e et fréquence f_e

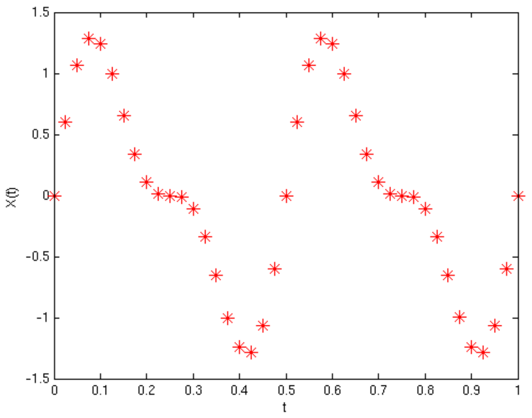


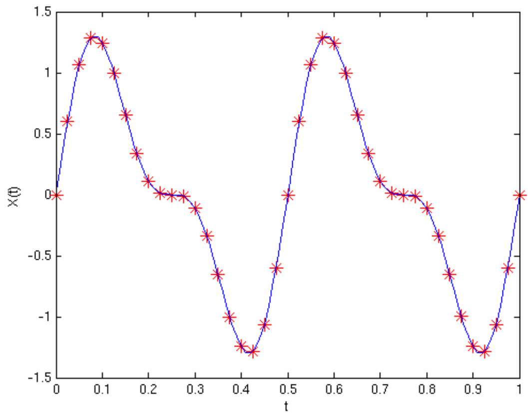
- condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal: $f_e > 2f$

Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$
à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$?

- Dans certains cas, c'est assez clair...

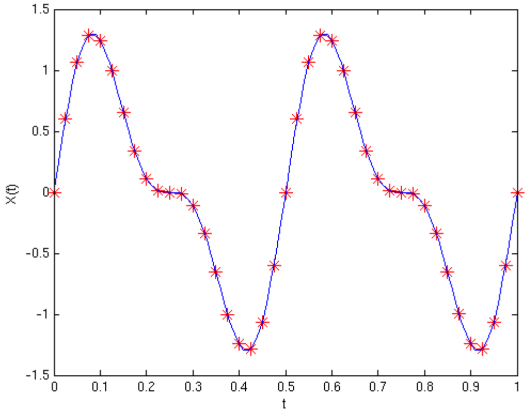


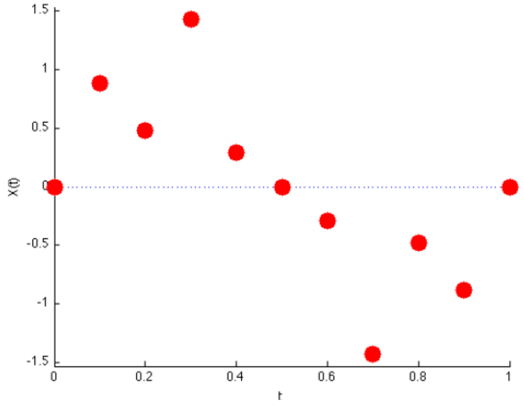


Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$
à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$?

- Dans certains cas, c'est assez clair...
- Dans d'autres, ça l'est un peu moins!



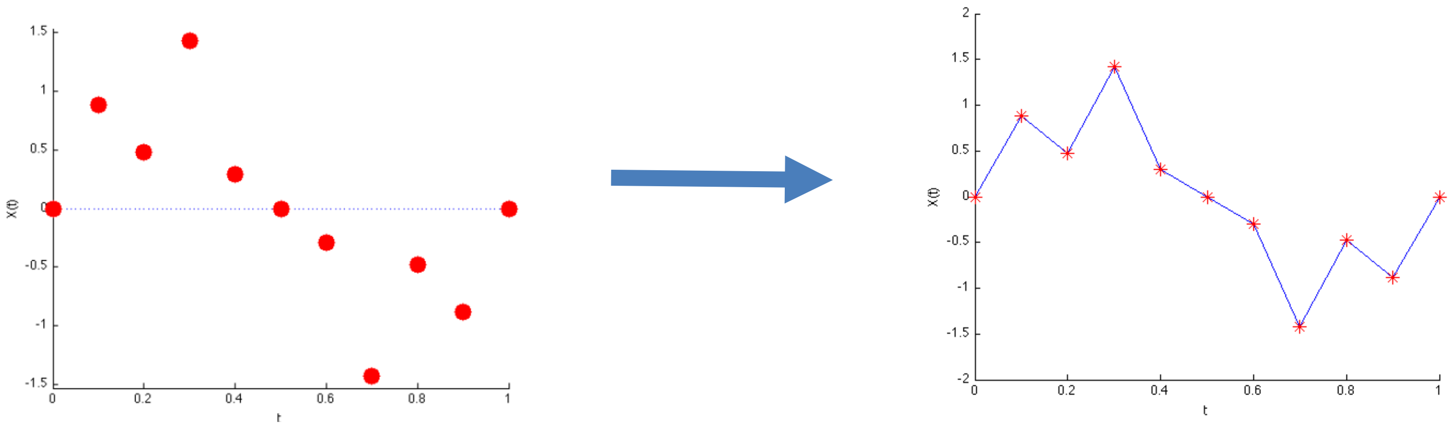


???

Reconstruction d'un signal

On dispose de plusieurs techniques pour interpoler un signal:

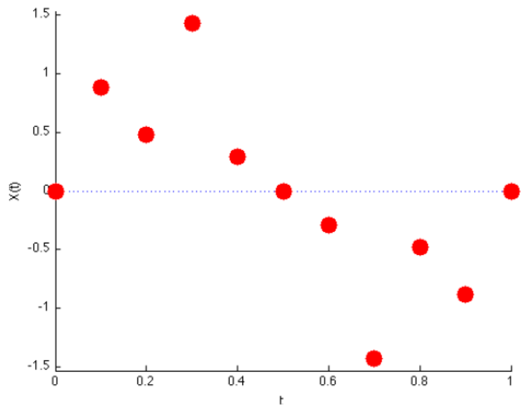
1. "Relier les points": dans l'exemple précédent, ça donne ceci:

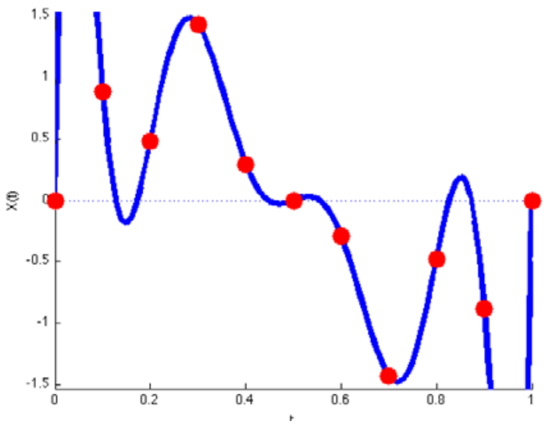


Un défaut principal: la "courbe" obtenue n'est pas régulière.

Reconstruction d'un signal

2. Trouver un polynôme qui passe par tous les points.



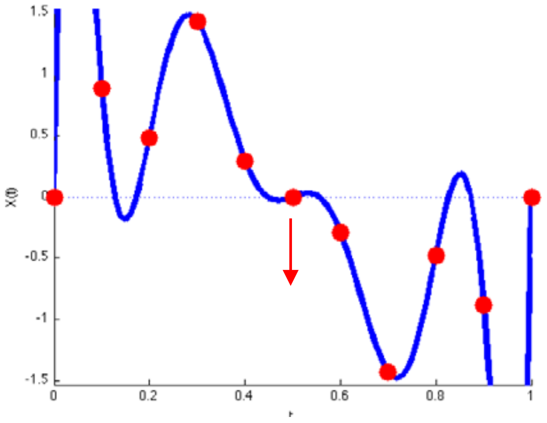


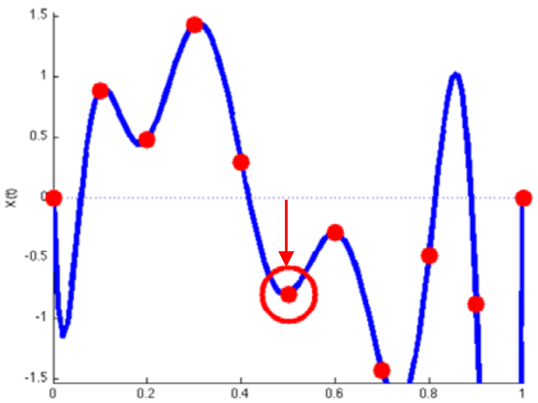
Deux défauts principaux:

- Avec N points, il faut trouver un polynôme de degré $N-1$: la procédure est complexe!

Reconstruction d’un signal

2. Trouver un polynôme qui passe par tous les points.





Deux défauts principaux:

- Avec N points, il faut trouver un polynôme de degré $N-1$: la procédure est complexe!
- Elle est également instable: si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.

Reconstruction d'un signal

3. *De manière générale*, une formule d'interpolation pour $X(t)$ s'écrit:

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) F\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$F(0) = 1$ et $F(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$

Cette condition implique en particulier que

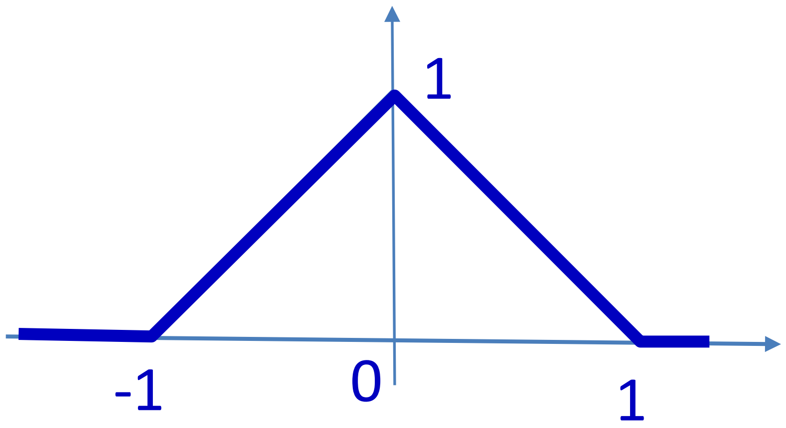
$X_I(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Quelle fonction F choisir?

Reconstruction d'un signal

La fonction F qui permet de "relier les points" est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$



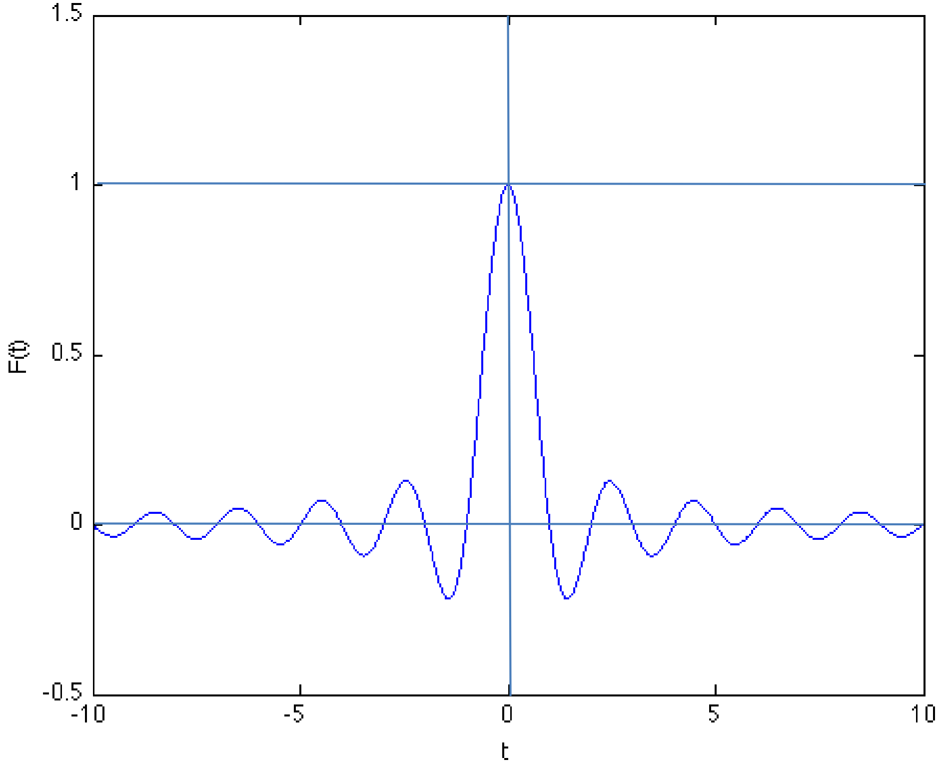
Reconstruction d'un signal: interpolation

On peut faire mieux en choisissant

$$F(t) = (1-t)\,(1+t)\,(1-t/2)\,(1+t/2)\,(1-t/3)\,(1+t/3)\,\ldots$$

Cette fonction est régulière, pour tout $k \in Z$
on vérifie que $F(0) = 1$ et $F(k) = 0$.

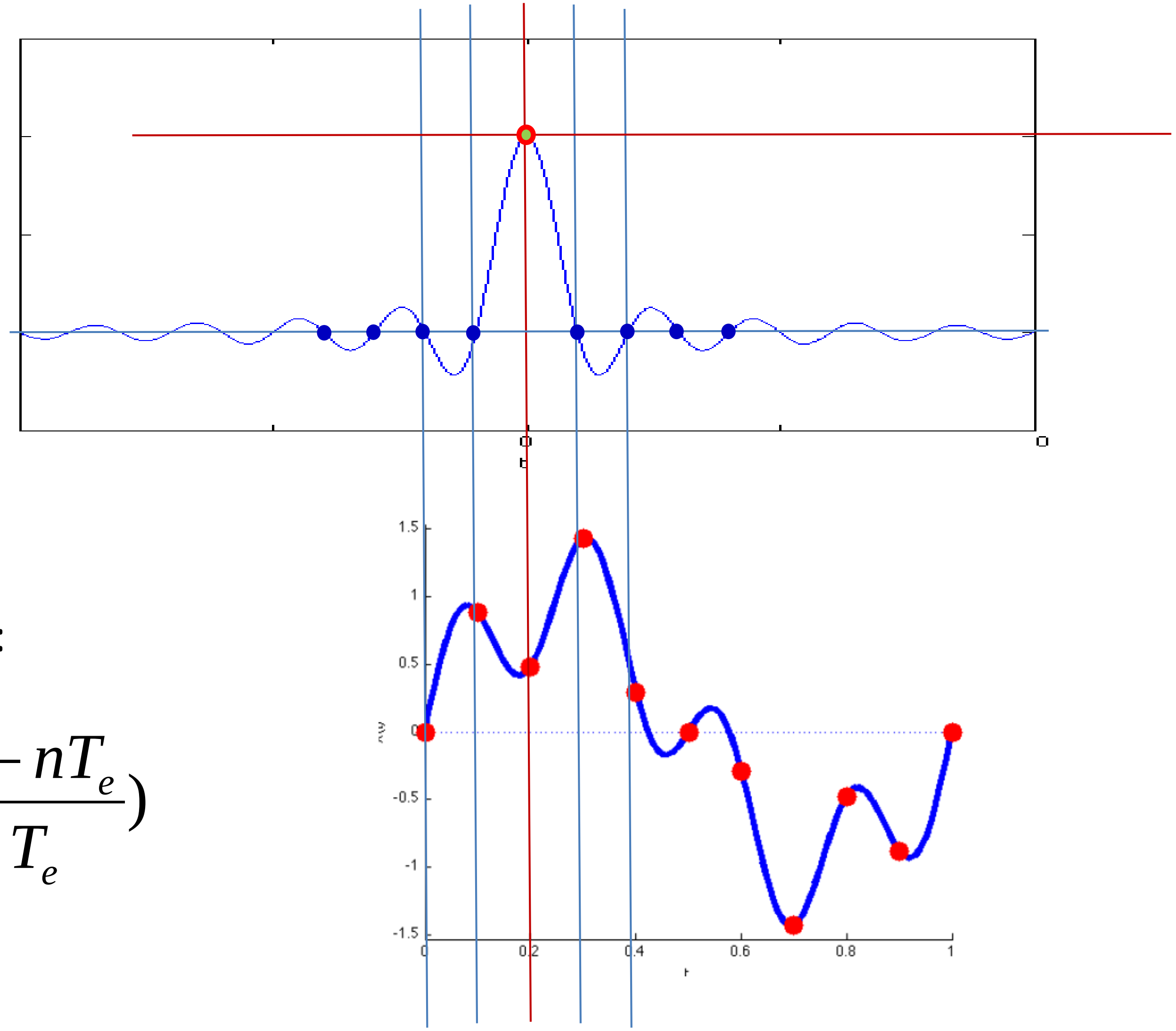
$$F(t) = \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad t \in R$$



Reconstruction d'un signal: interpolation

$$F(t) = \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$t \in$ R

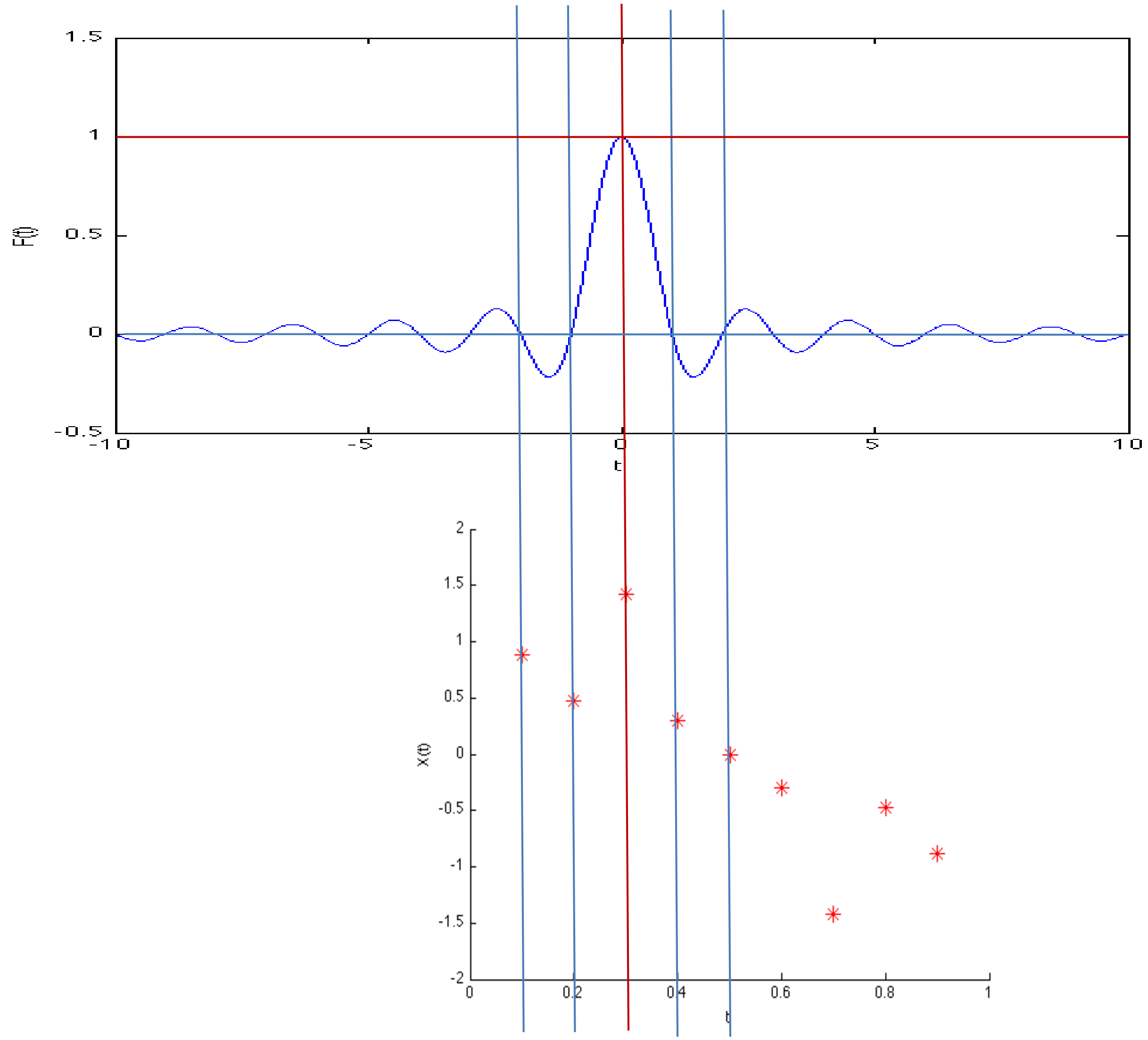


Ce qui donne dans notre exemple:

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Rôle des éléments de sinc( )

$$X_I(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(nT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_e}{T_e}\right)$$



Le terme $-nT_e$ introduit un déphasage temporel qui centre la fonction normalisée **sinc(t/T_e)** sur <u>chaque</u> instant échantillonné nT_e

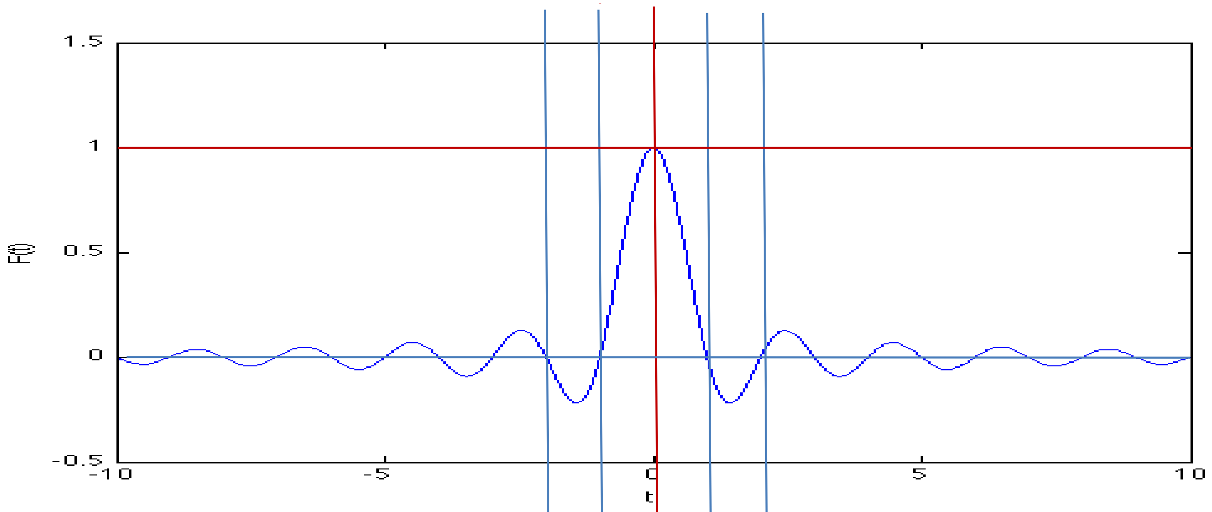
On obtient X(nT_e) quand t = nT_e car **sinc((nT_e-nT_e)/T_e)** vaut 1.

La normalisation du temps t par T_e permet d'annuler l'influence des autres échantillons m ≠ n

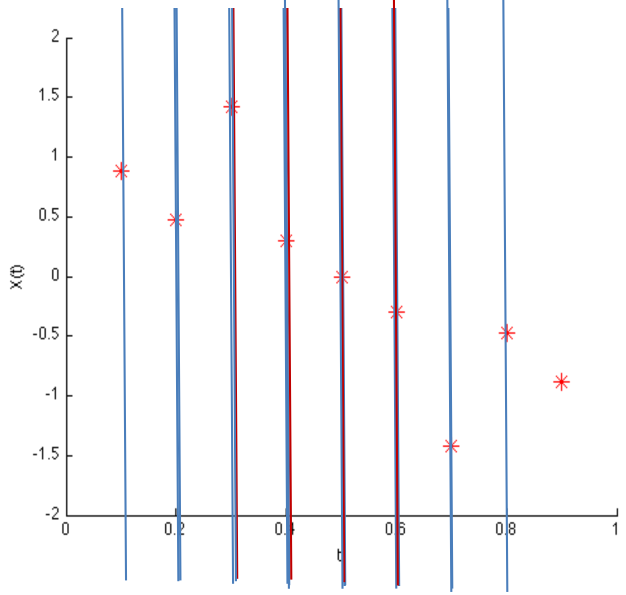
On obtient 0 quand t = mT_e car **sinc(m-n)** vaut 0 pour tout (m-n) entier relatif différent de zéro.

Rôle de la somme des sinc()

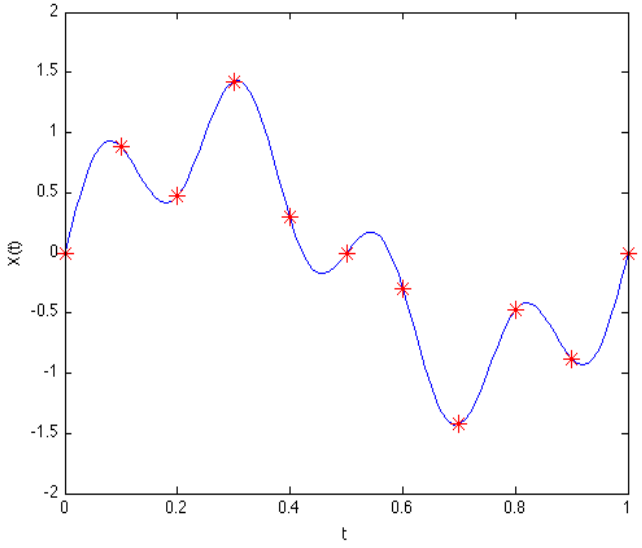
$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$



Exercice d'échantillonnage
et reconstruction dans
les slides 16-27



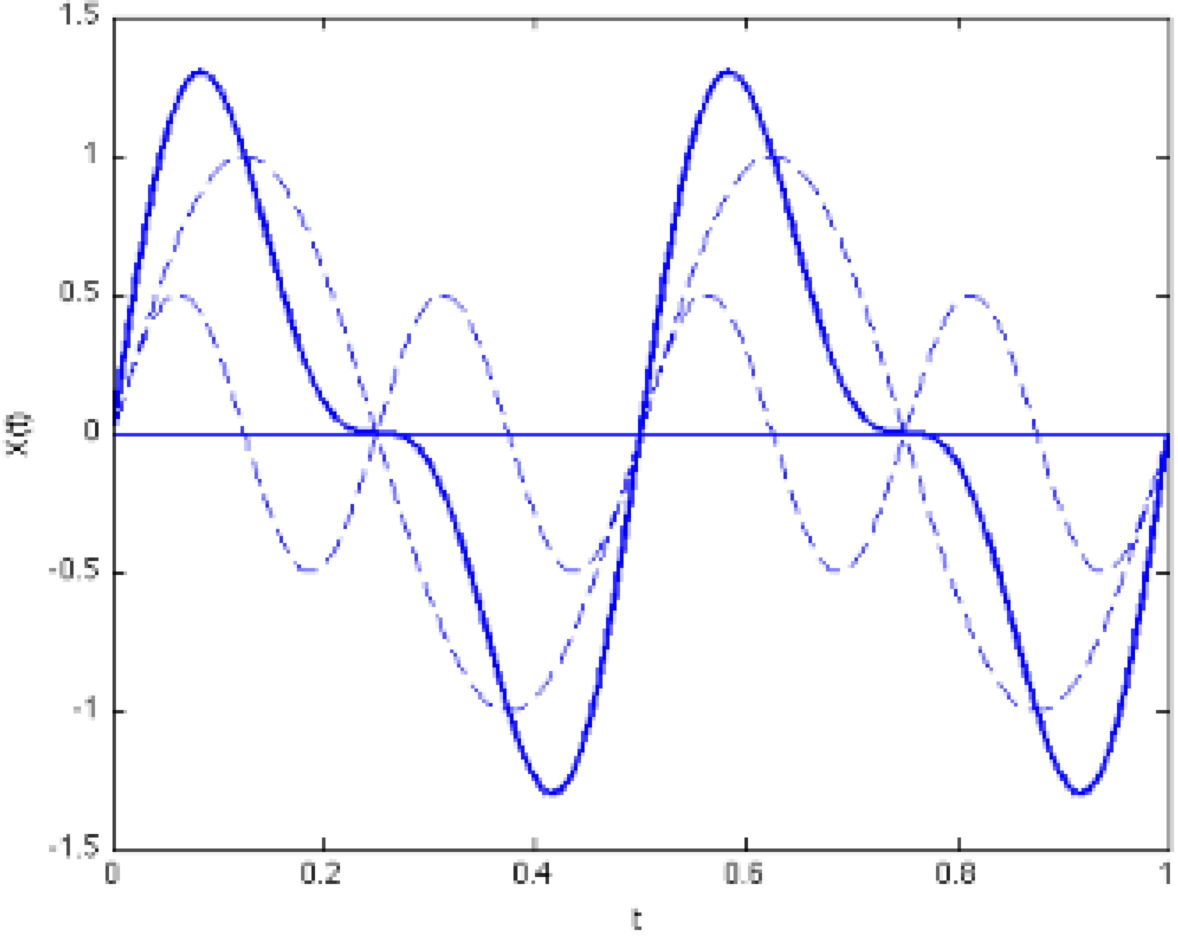
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}}$$



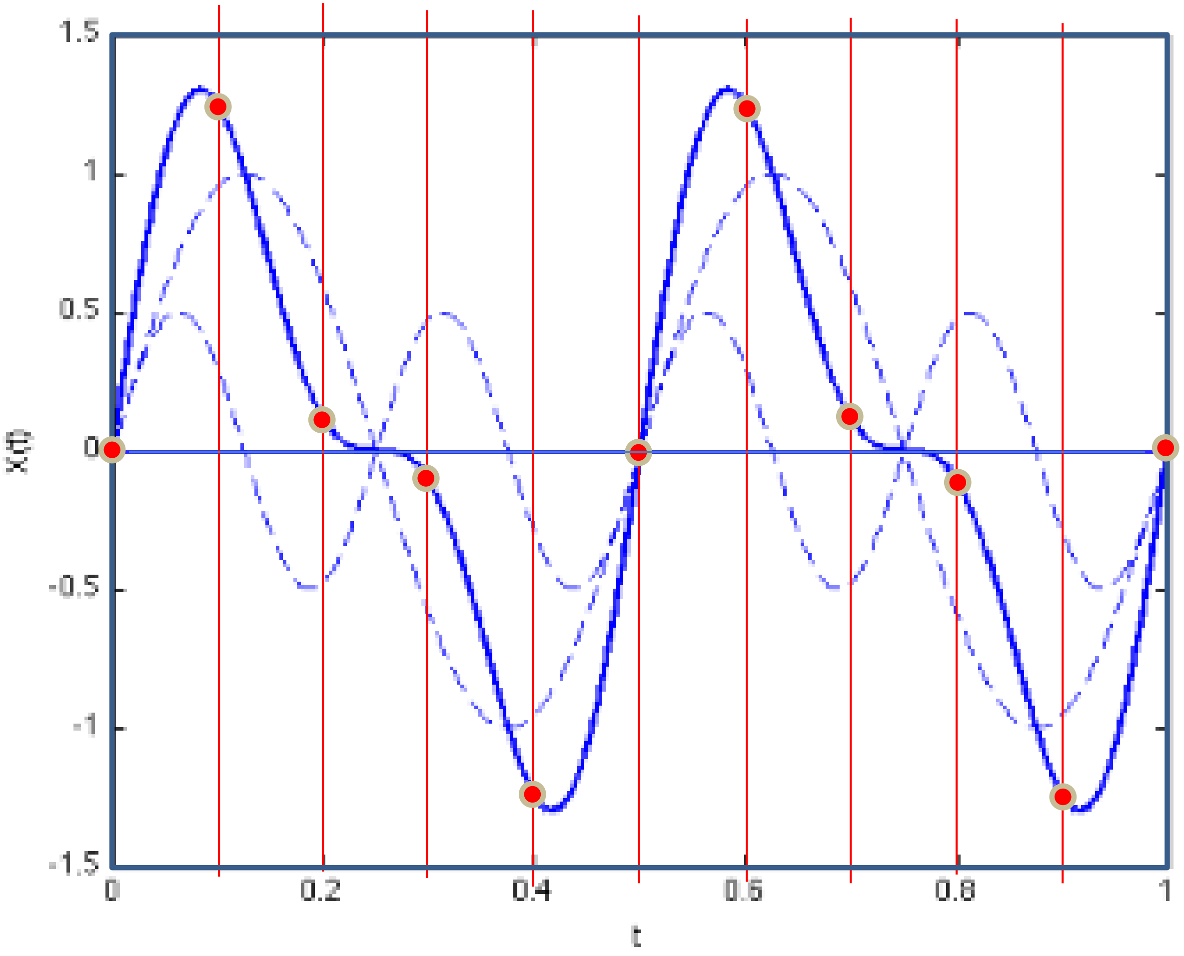
$$X(t) = \sin(4\pi t) + 1/2 \sin(8\pi t)$$

Exercice:

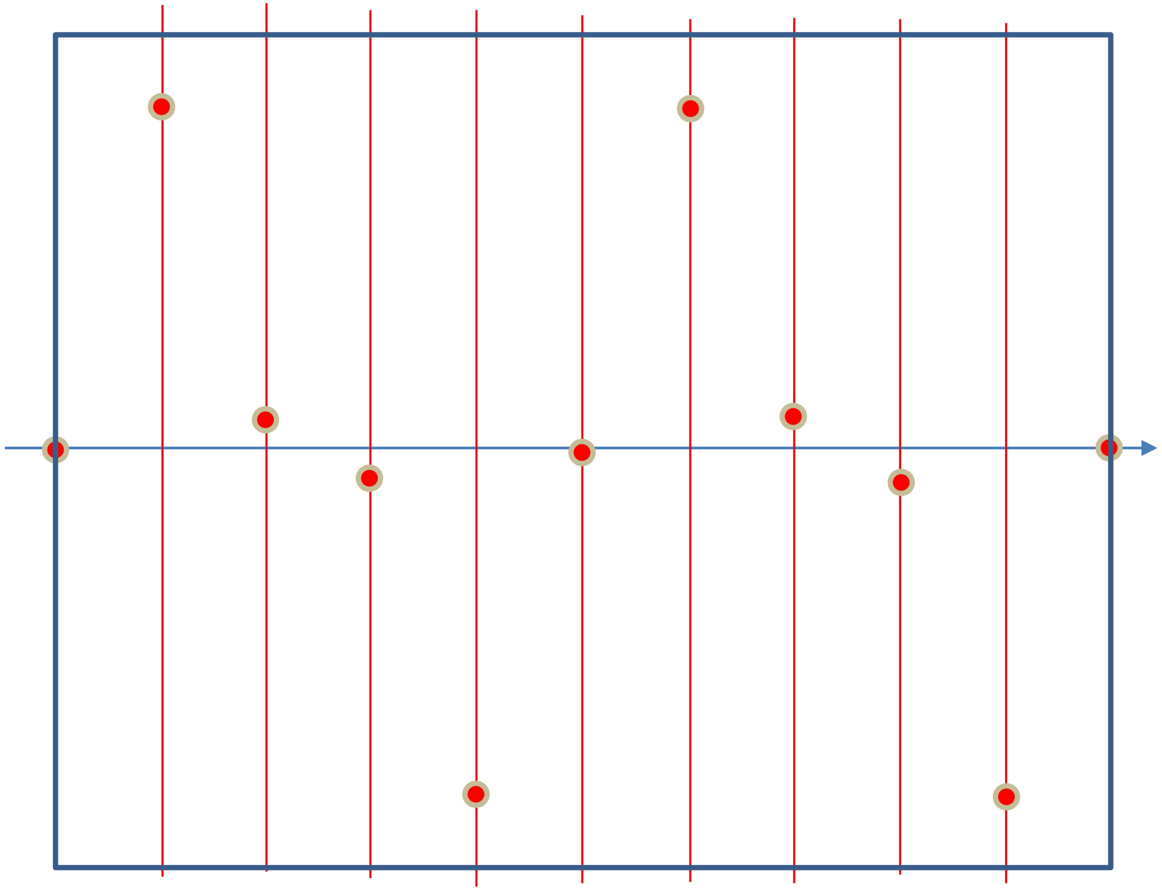
Echantillonnage et reconstruction d'une fonction périodique de fréquence 2 Hz



Echantillonnage
avec fe = 10 Hz

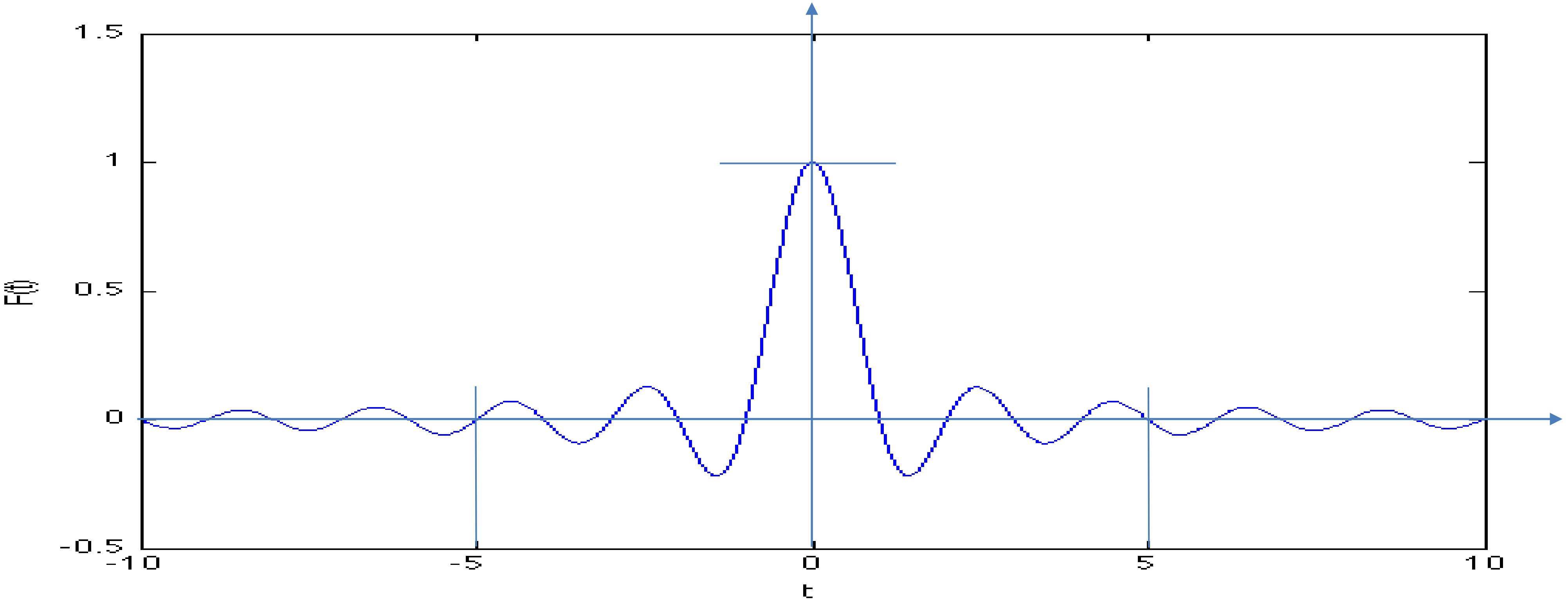


valeurs
échantillonnées
avec fe = 10 Hz



Reconstruction : l'outil

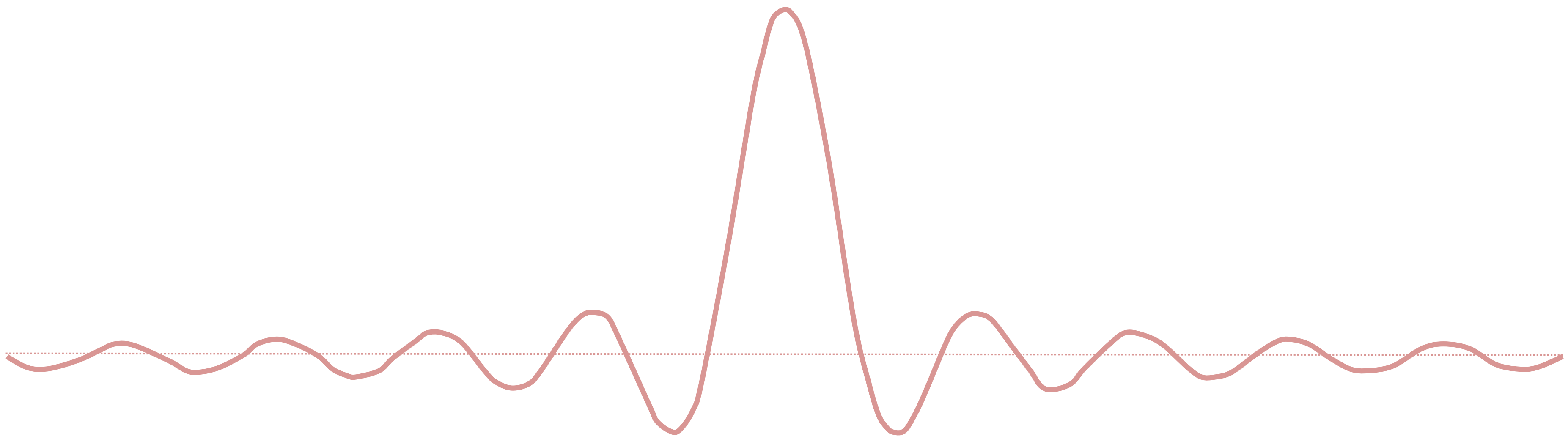
Fonction sinc : sinus cardinale normalisée



Reconstruction

la fonction sinc est

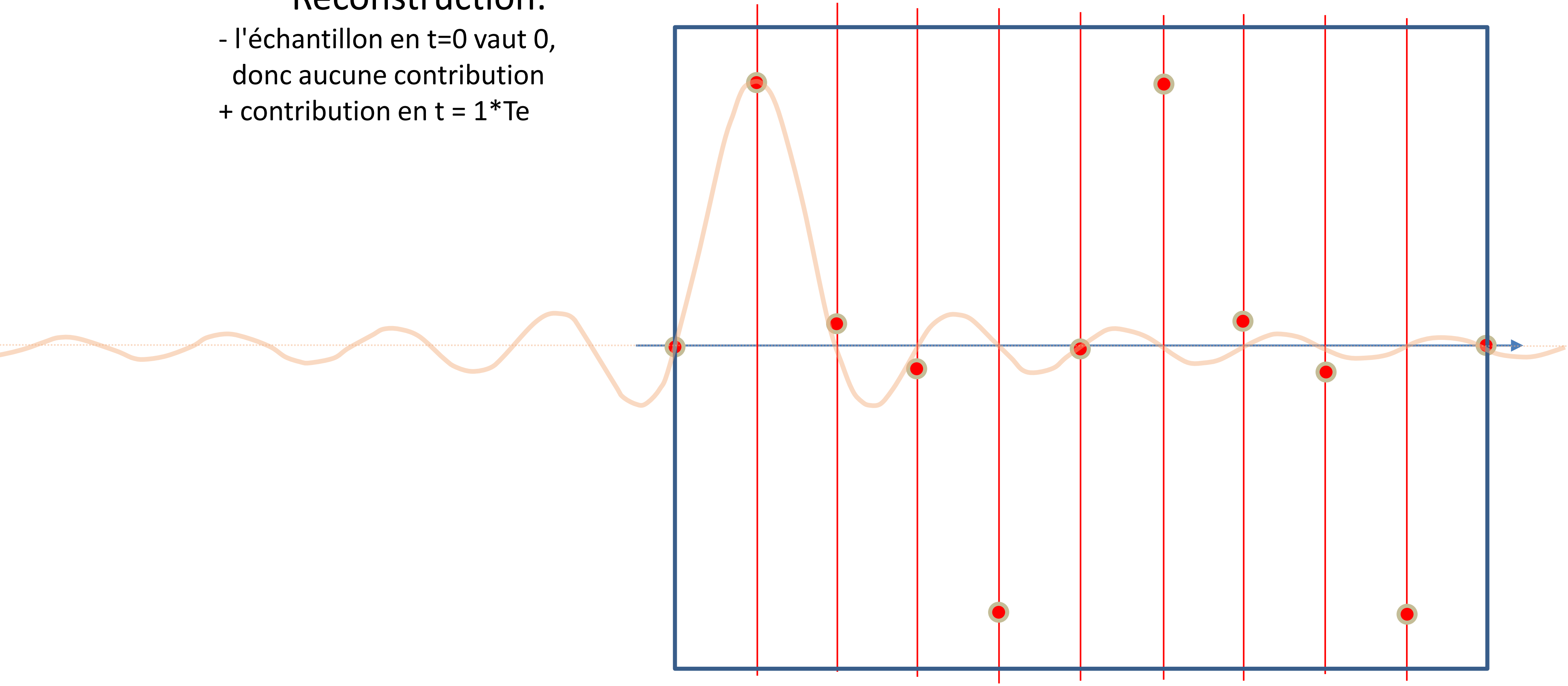
1) décalée sur chaque instant échantillonné,
2) mise à l'échelle temporelle de la période d'échantillonnage
3) mise à l'échelle de la valeur échantillonnée



Reconstruction:

- l'échantillon en t=0 vaut 0,
  donc aucune contribution

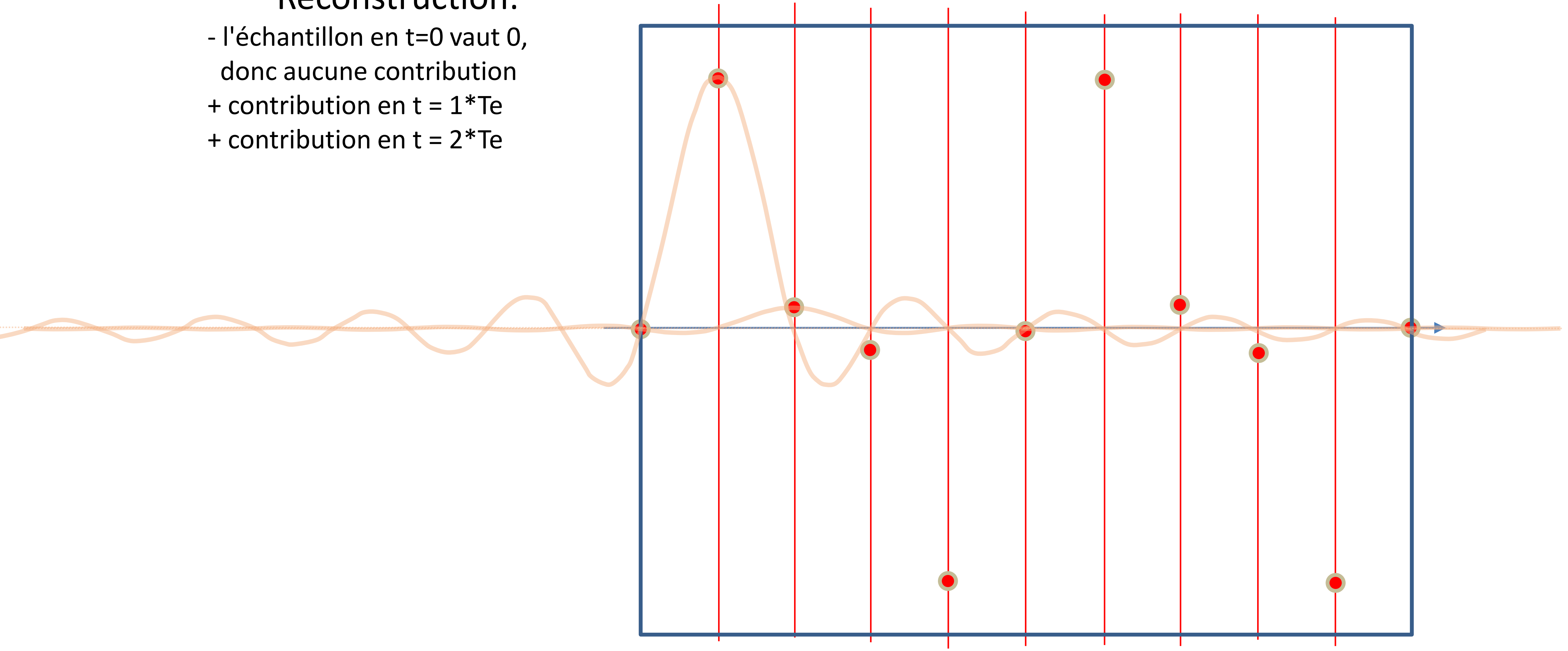
+ contribution en t = 1*Te



Reconstruction:

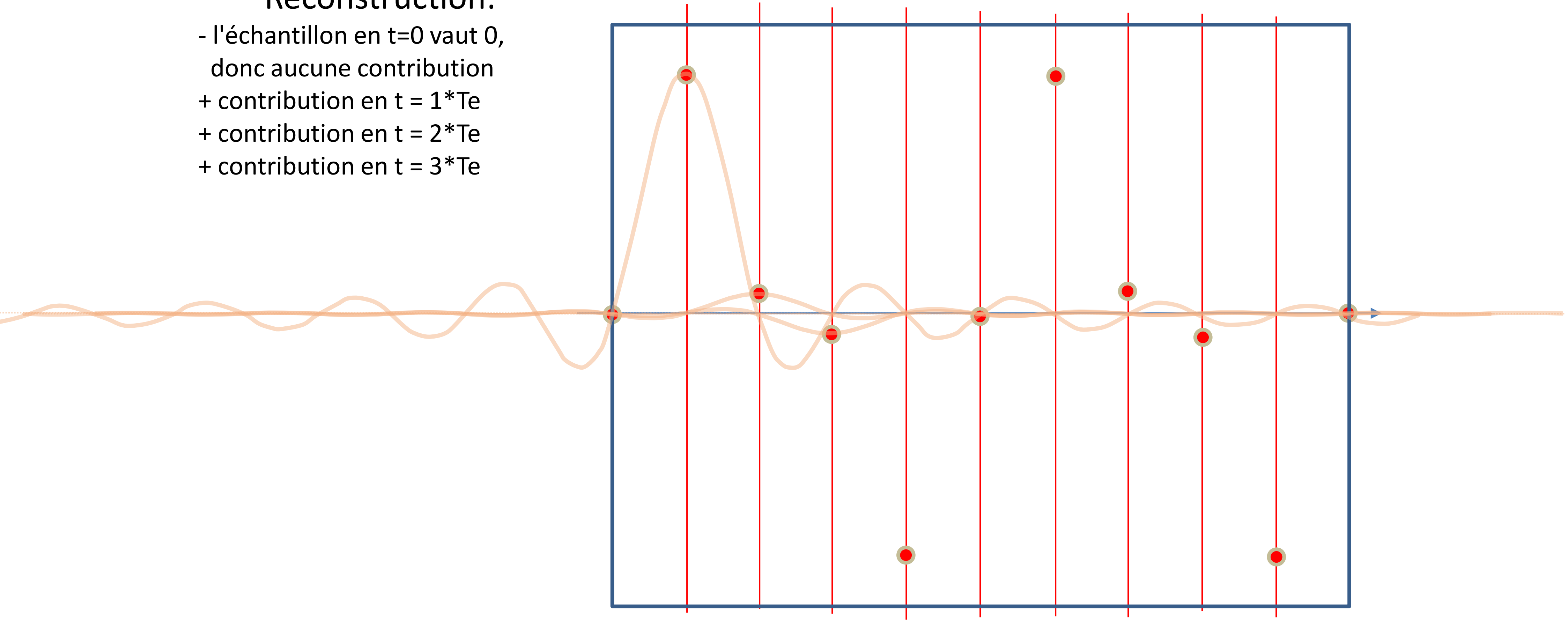
- l'échantillon en t=0 vaut 0,
  donc aucune contribution

+ contribution en t = 1*Te
+ contribution en t = 2*Te



Reconstruction:

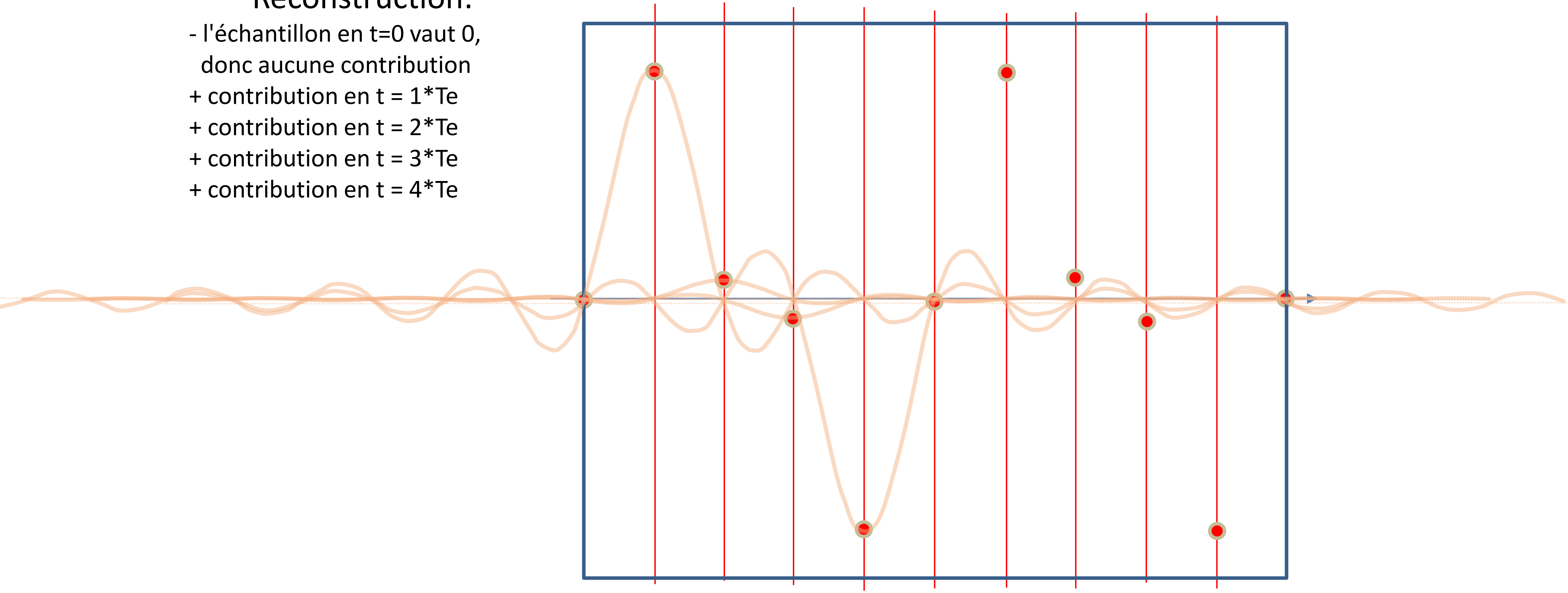
- l'échantillon en t=0 vaut 0, donc aucune contribution
+ contribution en t = 1*Te
+ contribution en t = 2*Te
+ contribution en t = 3*Te



Reconstruction:

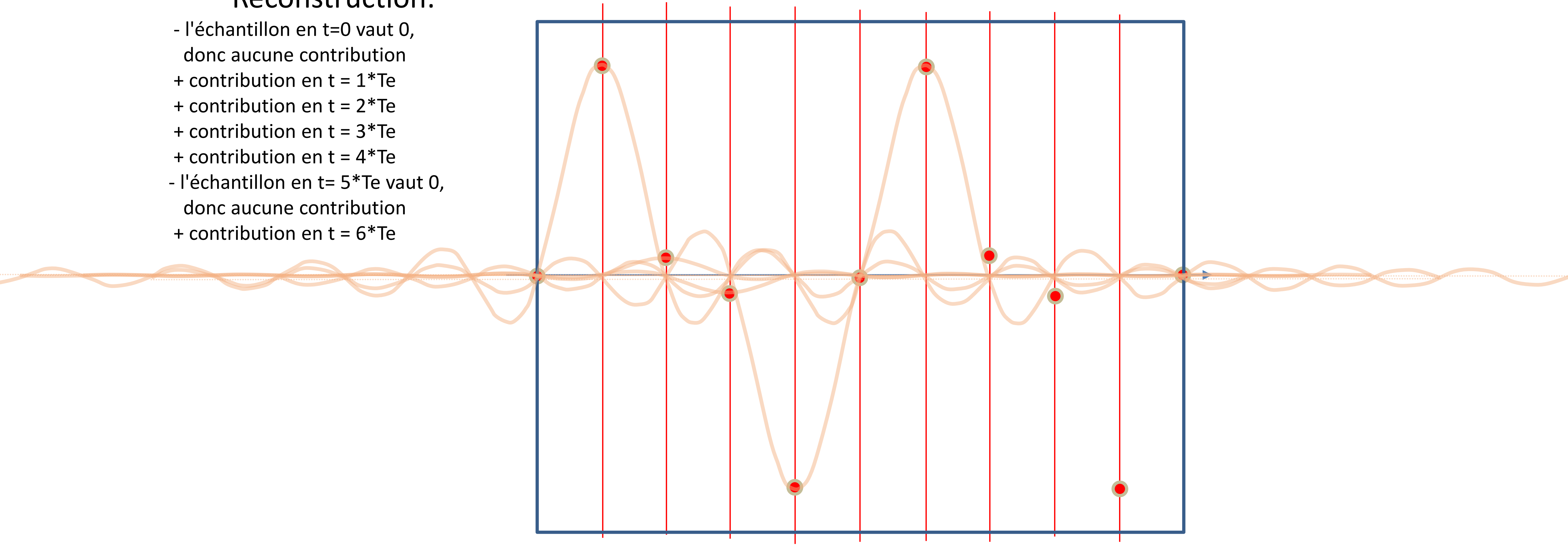
- l'échantillon en t=0 vaut 0, donc aucune contribution

+ contribution en t = 1*Te
+ contribution en t = 2*Te
+ contribution en t = 3*Te
+ contribution en t = 4*Te



Reconstruction:

- l'échantillon en t=0 vaut 0,
  donc aucune contribution
+ contribution en t = 1*Te
+ contribution en t = 2*Te
+ contribution en t = 3*Te
+ contribution en t = 4*Te
- l'échantillon en t= 5*Te vaut 0,
  donc aucune contribution
+ contribution en t = 6*Te



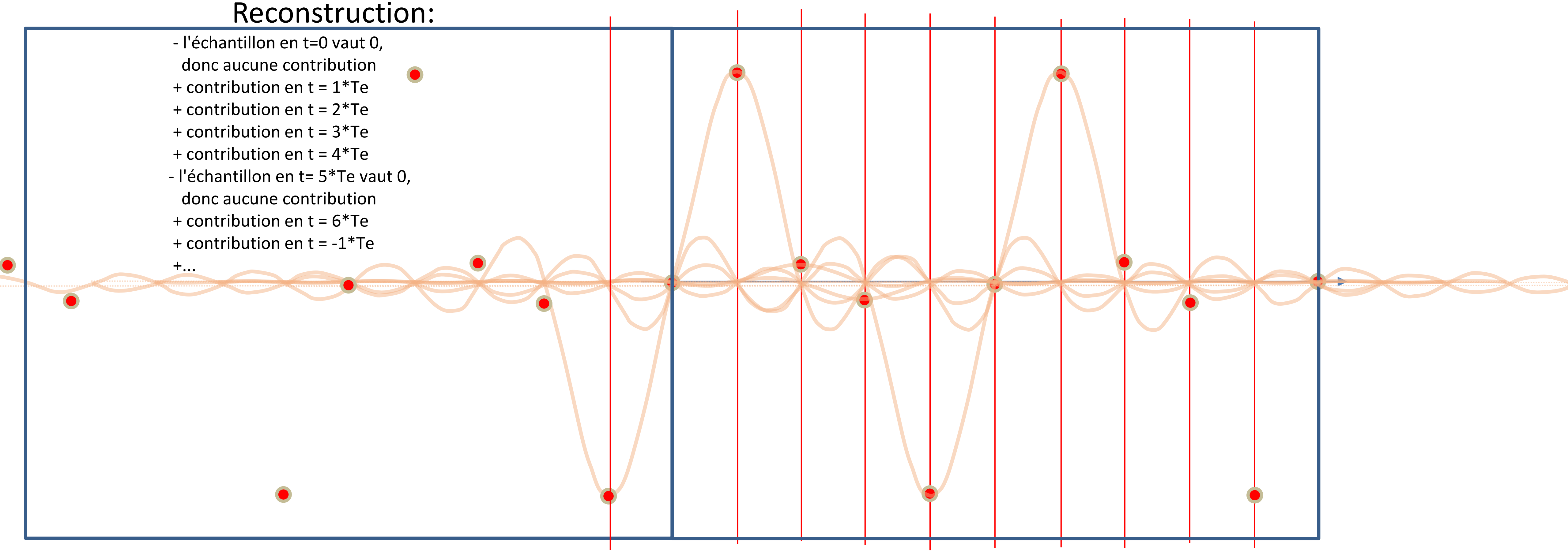
Reconstruction:

- l'échantillon en t=0 vaut 0,
  donc aucune contribution

+ contribution en t = 1*Te
+ contribution en t = 2*Te
+ contribution en t = 3*Te
+ contribution en t = 4*Te

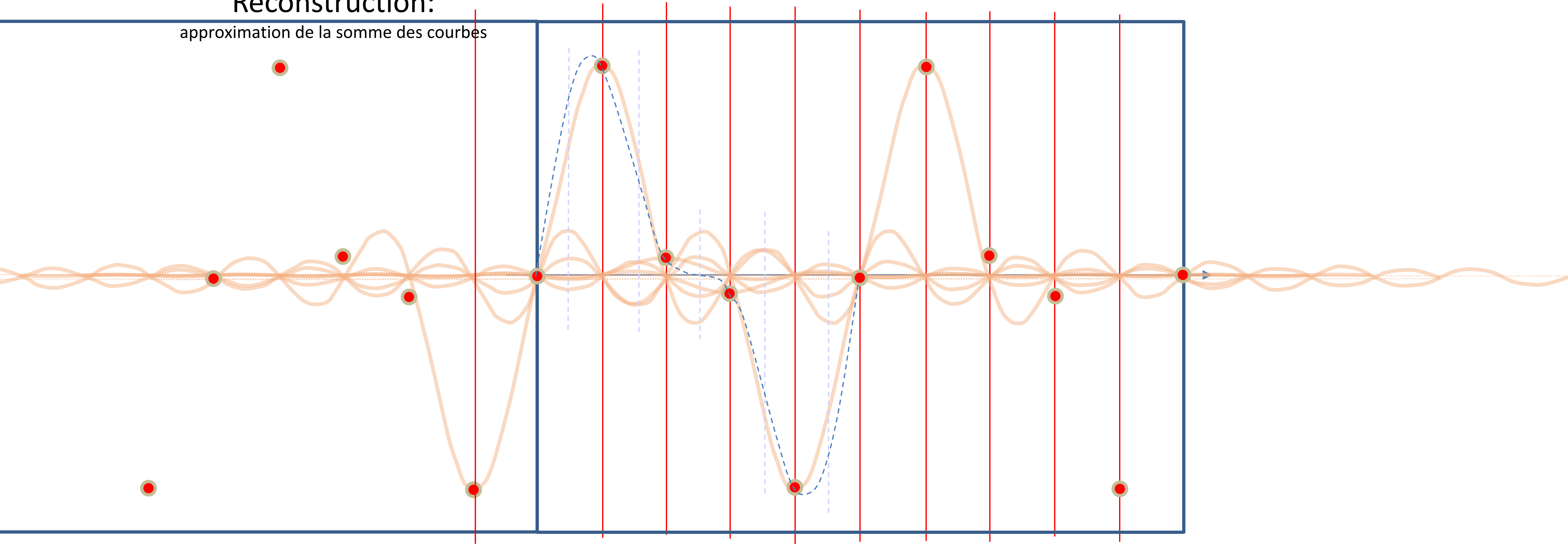
- l'échantillon en t= 5*Te vaut 0,
  donc aucune contribution

+ contribution en t = 6*Te
+ contribution en t = -1*Te
+...



Reconstruction:

approximation de la somme des courbes



Reconstruction d'un signal: interpolation

Pour retrouver un signal à partir de sa version échantillonnée, on a donc maintenant une formule d'interpolation:

$$X_I(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(nT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Il nous reste une question cruciale à résoudre:

quand est-ce que $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathrm{R}$?

Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

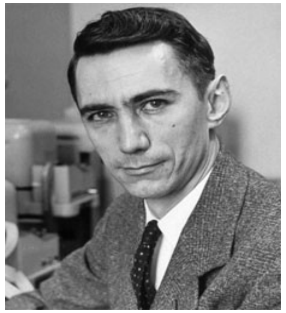
1. Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), mathématicien anglais, qui publie en 1915 la formule d'interpolation qu'on vient de voir.

2. Harry Nyquist (1889-1979), ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1928 un article sur "la théorie de la transmission par le télégraphe".

3. Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov (1908- 2005), pionnier de la radio-astronomie, qui découvre ce résultat indépendamment en 1933 en URSS.

4. Herbert Raabe (1909-2004), qui publie sa thèse sur le sujet en 1939 en Allemagne...

5. Claude Edwood Shannon (1916-2001), également ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1949 un article sur la "communication en présence de bruit", et que nous allons revoir la semaine prochaine...



Le théorème d'échantillonnage

Soit $(X(t), t \in \mathrm{R})$ un signal dont la plus grande fréquence est égale $f_{\max}$.

Soit $(X(nT_e), n \in \mathrm{Z})$ le même signal échantillonné avec une période T_e
et une fréquence correspondante $f_e = 1 / T_e$

Soit $(X_I(t), t \in \mathrm{R})$ tel que

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Alors:

Si $f_e > 2f_{\max}$ alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathrm{R}$

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathrm{R}$ alors $f_e \geq 2f_{\max}$

Le théorème d'échantillonnage: illustration

- Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure:

$$X(t) = \sin(2\pi ft)$$

- La version échantillonnée de ce signal est: $X(nT_e) = \sin(2\pi f\, nT_e)$ et la formule d'interpolation devient:

$$X_I(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sin(2\pi fnT_e)\,\mathrm{sinc}(\frac{t-nT_e}{T_e})$$

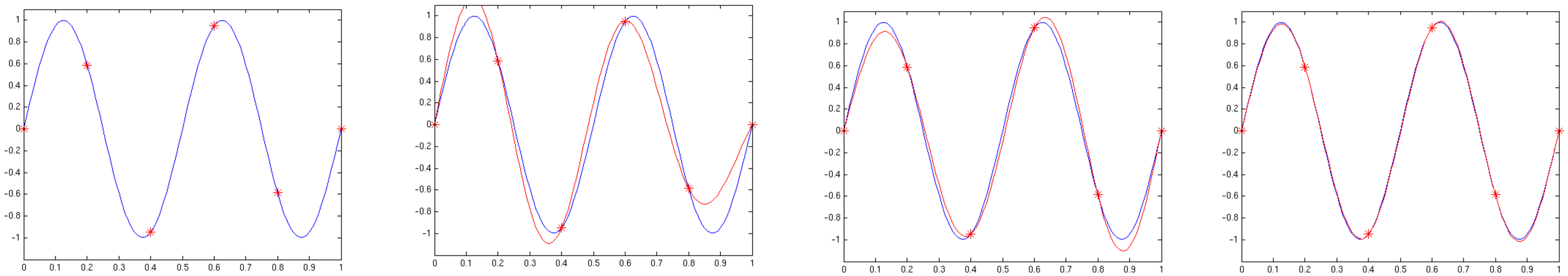
De manière pratique, on se limite pour la reconstruction à quelques termes de la somme:

$$X_I(t) \simeq \sum_{n=-N}^{N} \sin(2\pi fnT_e)\,\mathrm{sinc}(\frac{t-nT_e}{T_e})$$

Le théorème d'échantillonnage: illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{n=-N}^{N} \sin(2\pi f n T_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour f = 2 Hz et f_e = 5 Hz (donc T_e = 0.2 sec):



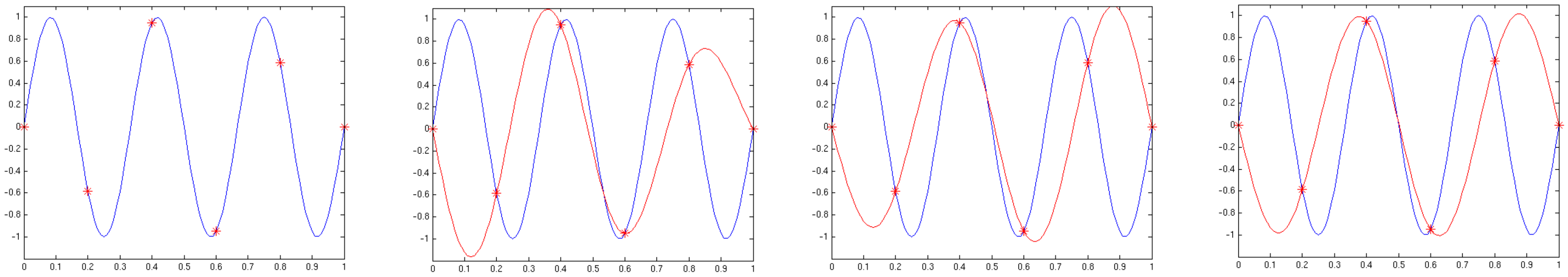
avec N = 5, N = 10, N = 50.

Si $f_e > 2f$, la reconstruction est bonne.

Le théorème d'échantillonnage: illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{n=-N}^{N} \sin(2\pi f n T_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour f = 3 Hz et f_e = 5 Hz (donc T_e = 0.2 sec):



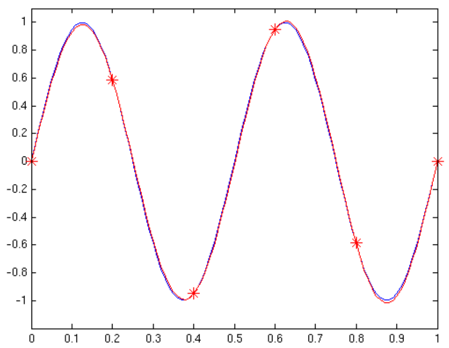
avec N = 5, N = 10, N = 50.

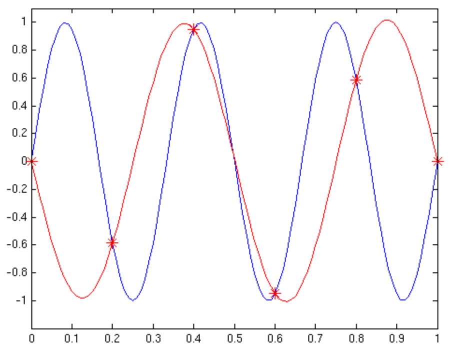
Si $f_e < 2f$, on a un problème...

Essayons de mieux comprendre cet exemple

Rappel: la fréquence d'échantillonnage f_e = 5 Hz.

- Quand f = 2 Hz, la reconstruction est bonne.
- Quand f = 3 Hz, la reconstruction est mauvaise.

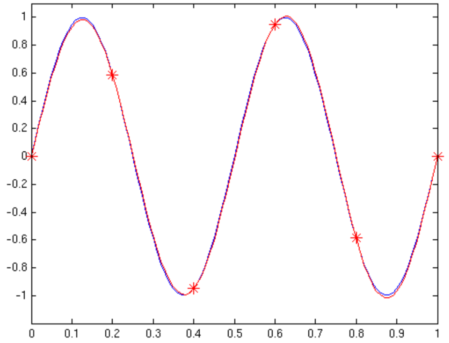
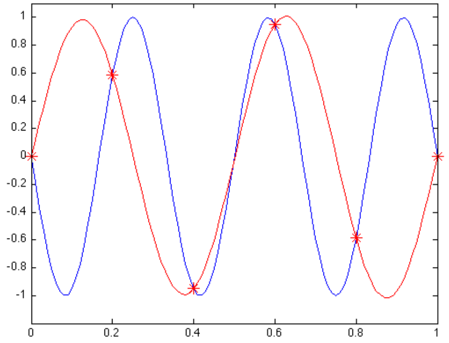




Essayons de mieux comprendre cet exemple

Rappel: la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.
- Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.

Multiplions le graphe de droite par -1

Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite!

La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite! (mais pas le signal d'origine)

La *fréquence apparente* de 2Hz est causée par le *repliement du spectre*. Intuitivement, **ce qui dépasse au-delà de la limite théorique à 2,5 Hz** est replié sous cette limite:

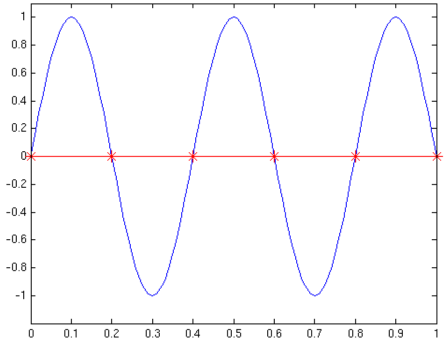
2,5 - **(3 – 2,5)** = 2,5 – **0,5** = 2 Hz

Le théorème d'échantillonnage: cas limite (1)

$$X_I(t) \simeq \sum_{n=-N}^{N} \sin(2\pi f n T_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Et si $f_e = 2f$? Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour

$f = 2.5$ Hz et $f_e = 5$ Hz:

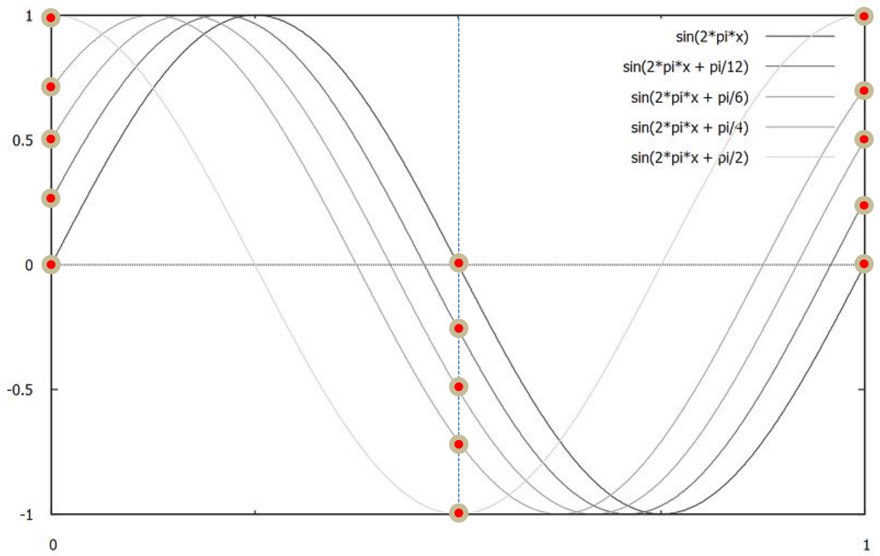


pour toute valeur de *N*... Ici aussi, on a un problème....

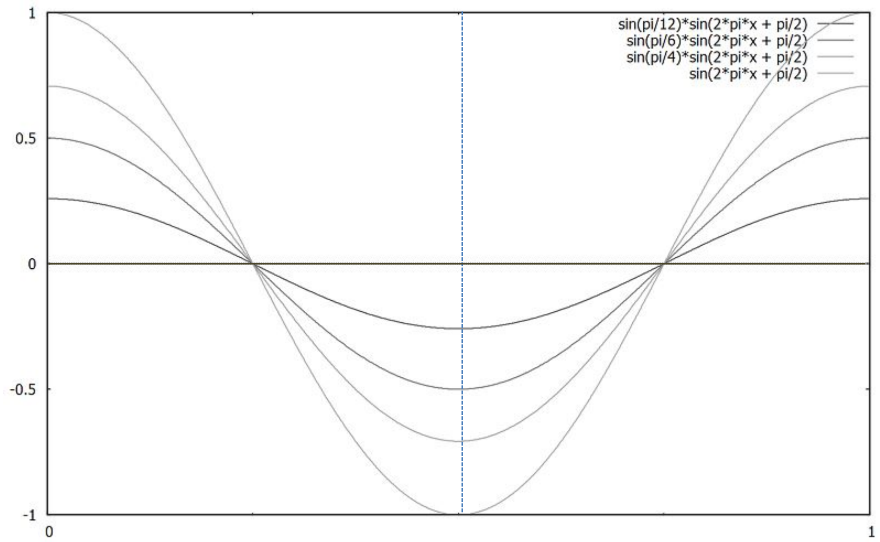
Le théorème d'échantillonnage: cas limite (2)

Et si $f_e = 2f$? Examinons la reconstruction pour $f = 1$ Hz et $f_e = 2$ Hz avec différents déphasages: de $\pi/12$ à $\pi/2$

Signal échantillonné



Signal reconstruit



Dans le cas limite, le déphasage a aussi une inflluence

Exemple: conclusion

Rappel: la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

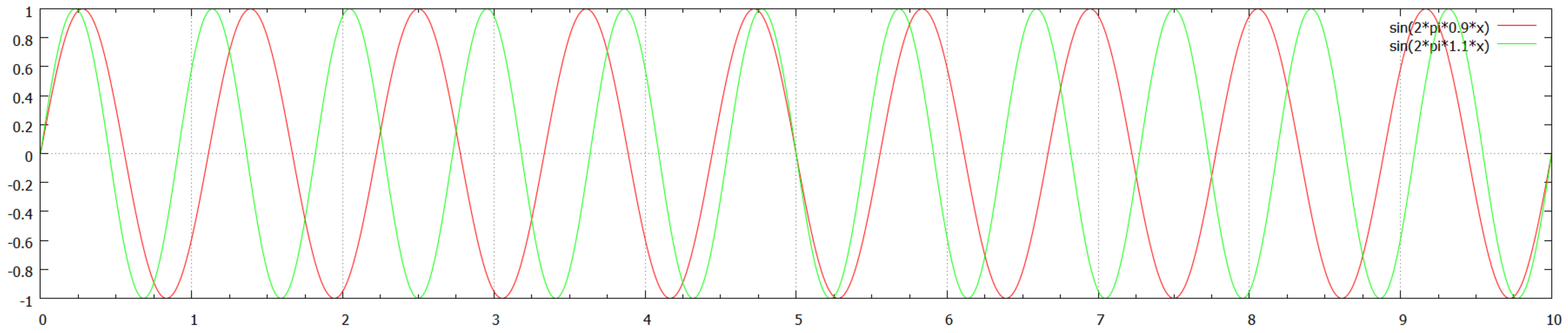
- A partir des seules valeurs échantillonées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de $f = 2$ Hz ou de $f = 3$ Hz.
- Par construction notre formule d'interpolation produit la fréquence inférieure à $f_e/2$, c'est à dire $f = 2$ Hz.
- Donc si on sait dès le départ que la fréquence f de la sinusoïde d'origine est plus petite que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- Si par contre la fréquence f est plus grande que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors la formule d'interpolation produit une fréquence inférieure: c'est l'effet stroboscopique -> *fréquence apparente*

La fréquence apparente f_a est donnée par: $f_a = f_e/2 - (f - f_e/2) = f_e - f$

Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

f = 0.9Hz et 1.1 Hz

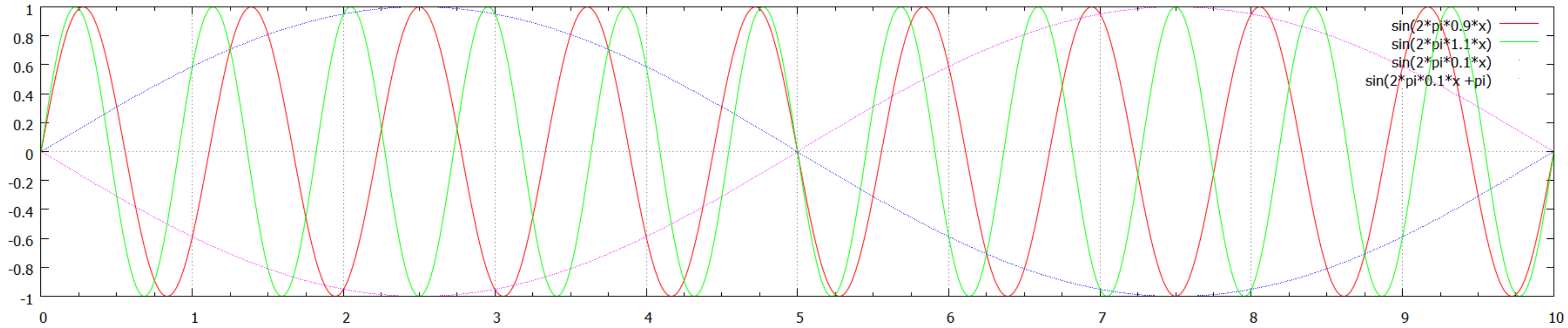


Question: déterminer la fréquence du signal apparent

Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

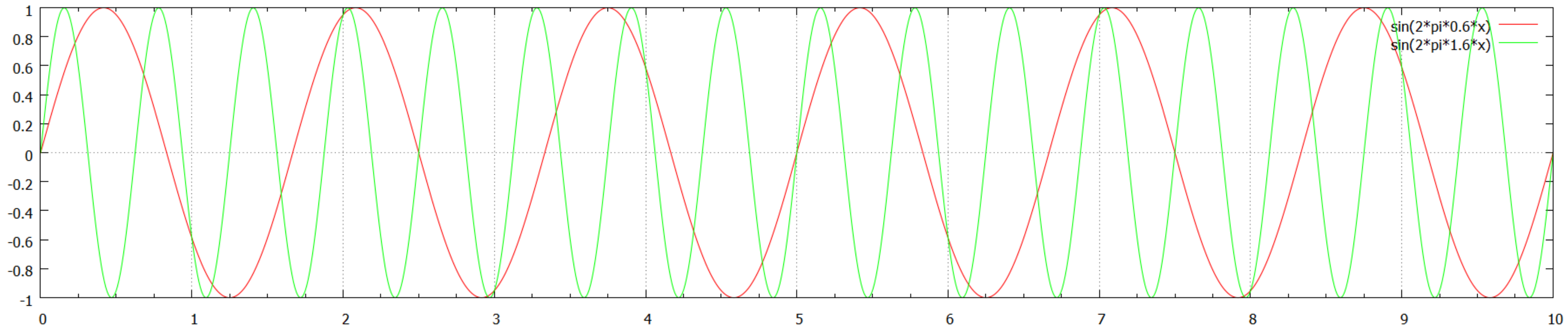
f = 0.9Hz et 1.1 Hz



Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

f = 0.6Hz et 1.6 Hz

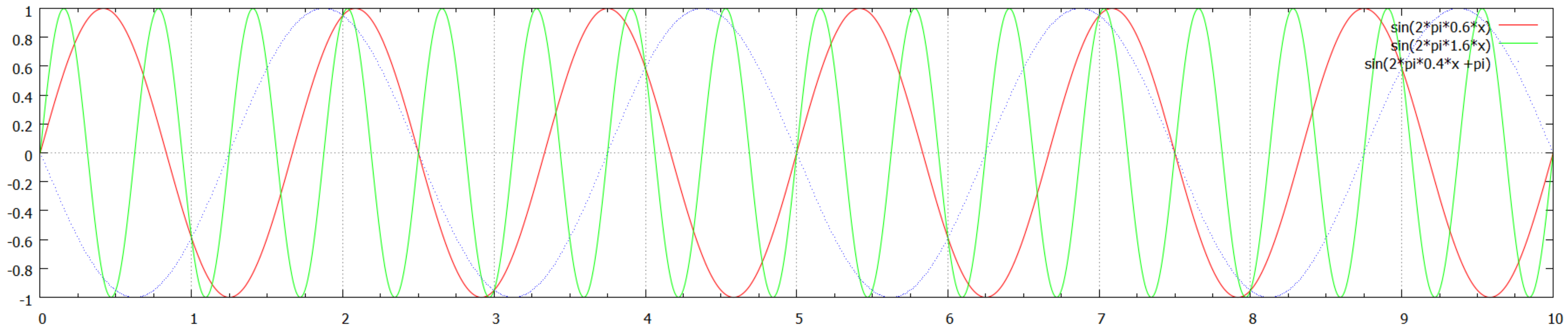


Question: déterminer la fréquence du signal apparent

Exemples

Effet du sous-échantillonnage à 1 Hz de fonctions sinus de fréquence > 0.5 Hz

f = 0.6Hz et 1.6 Hz



Le théorème d'échantillonnage (rappel)

Soit $(X(t), t \in \mathbb{R})$ un signal dont la plus grande fréquence est égale f_{max}.

Soit $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné avec une période T_e et une fréquence correspondante $f_e = 1 / T_e$

Soit $(X_I(t), t \in \mathbb{R})$ tel que

$$X_I(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

Alors:

Si $f_e > 2f_{max}$ alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f_e \geq 2f_{max}$

Préambule: pourquoi $f_e > 2f_{\max}$?

Dans tous les exemples vus précédemment, on avait à faire à un signal $X(t)$ avec une seule fréquence f .

On a vu dans ce cas que $f_e > 2f$ est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.

Et si maintenant le signal X(t) contient deux fréquences f_1 et f_2 ?

Dans ce cas, il suffira que $f_e > 2f_1$ et $f_e > 2f_2$ pour que le signal soit bien reconstruit, i.e. que $f_e > 2 \max\{f_1, f_2\}$

En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc intuitivement à la condition $f_e > 2f_{\max}$

Démonstration: 1) assertion intermédiaire (Lemme)

Lemme: la bande passante du signal sinc(t / T_e) est B = f_e / 2

Outil: La fonction sinc est la somme de *N* sinusoïdes, pour *N* tendant vers ∞ :

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(2\pi f_j t + \pi / 2) \qquad \text{avec} \qquad f_j = \frac{j}{2N}$$

Justification:

Une telle somme est liée à l'approximation d'une intégrale de Riemann qui additionne la surface de N rectangles de largeur 1/2N, pour *f* compris entre 0 et 1/2.

$$\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N} \sin(2\pi f_j t + \pi / 2)$$

$$= \int_0^{1/2} \sin(2\pi f t + \pi / 2) df$$

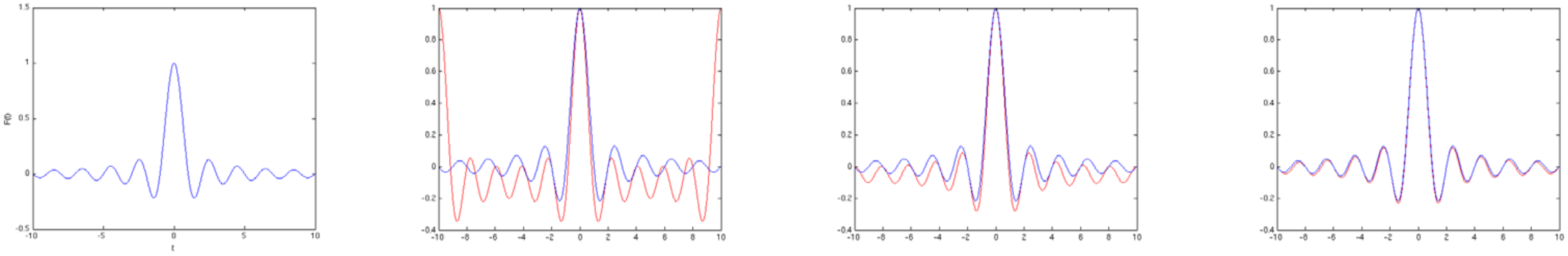
$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(2\pi f_j t + \frac{\pi}{2}) = 2\int_0^{1/2} \sin(2\pi f t + \frac{\pi}{2}) df = 2\frac{(-\cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) - (-\cos(\frac{\pi}{2})))}{2\pi t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Démonstration: 1) assertion intermédiaire (suite)

Illustrons l'approximation de la fonction sinc avec différente valeurs de N:

$$\mathrm{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(2\pi f_j t + \pi / 2)$$

avec $f_j = j / (2N)$.



$N = 5$, $N = 10$, $N = 50$.

On voit en effet ci-dessus (en rouge) ce que vaut cette approximation

démonstration: assertion intermédiaire (suite)

$$\text{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(2\pi f_j t + \pi/2)$$

Les fréquences $f_j = j/(2N)$ couvrent $[0, 1/2]$ quand j varie de 1 à N, et N tend vers l'infini

La fonction sinc(t) contient toutes les fréquences de l'intervalle $[0,1/2]$

Cependant la formule d'interpolation travaille plutôt avec sinc$((t - nT_e)/T_e)$

$$X_I(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(nT_e)\,\text{sinc}\left(\frac{t-nT_e}{T_e}\right)$$

Le terme $-nT_e$ introduit un déphasage temporel sans conséquence sur l'intervalle des fréquences. Par contre, observons la division par T_e :

$$\text{sinc}(t/T_e) = \text{sinc}(f_e t) \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(2\pi f_j f_e t + \pi/2)$$

Donc la fonction sinc($f_e t$) contient toutes les fréquences de l'intervalle $[0, f_e/2]$.

démonstration: assertion intermédiaire (suite)

La bande passante du signal $\mathrm{sinc}(f_e\, t)$ est donc $B_{sinc} = f_e / 2$

Or c'est la fonction $\mathrm{sinc}(f_e\, t)$ qu'on utilise pour reconstruire le signal :

La bande passante B_I du signal interpolé $X_I(t)$

est donc plus petite ou égale à $f_e / 2$

Idée de la démonstration: première partie

Première partie de la démonstration:

Si $f_e > 2f_{max}$ Alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Idée de la preuve:

- Etant donné que : $f_e > 2f_{max}$ c'est à dire $f_{max} < f_e / 2$
  la bande passante B du signal d'origine $X(t)$ est strictement plus petite que $f_e / 2$
  (remarque: si $B < f_e / 2$ est vrai, alors $B \le f_e / 2$ est aussi vrai)
- **Lemme:** $B_I \le f_e / 2$
- De plus le signal interpolé $X_I(t)$ et le signal original $X(t)$ prennent les mêmes valeurs aux points d'interpolation nTe , $n \in \mathbb{Z}$.
- Deux signaux dont la bande passante est plus petite ou égale à $B = f_e / 2$ et qui coïncident aux points nT_e, $n \in \mathbb{Z}$, coïncident en fait partout !

Conclusion: Si $f_e > 2f_{max}$, on a bien $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Deuxième partie de la démonstration:

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in$ R, alors $f_e \geq 2f_{\max}$.

Preuve:

- Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in$ R alors ils ont la même bande passante. (forcément : ce sont les mêmes signaux).
- Or on a vu que la bande passante de $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $f_e/2$
- Donc $f_{\max}$ (de $X(t)$) est inférieure ou égale à $f_e/2$.

Sous-échantillonnage d’un signal

Lorsqu’on (sous-)échantillonne un signal à une fréquence $f_e < 2f_{\max}$ apparaît l’effet stroboscopique dont nous avons parlé la semaine dernière.

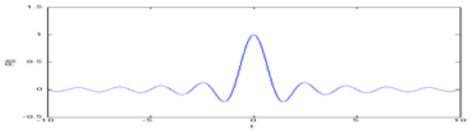
En général, on essaie à tout prix d’éviter cet effet stroboscopique!

Une solution simple, mais coûteuse:

augmenter la fréquence d’échantillonnage jusqu’à satisfaire la condition $f_e > 2f_{\max}$.

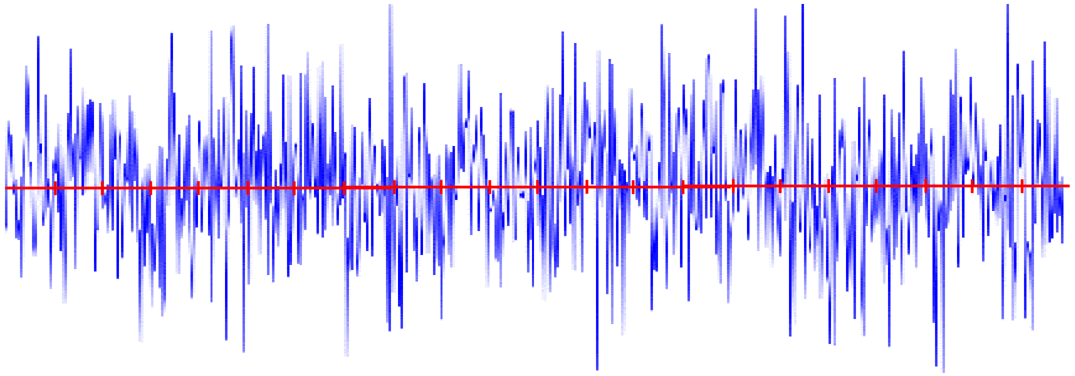
Effet stroboscopique: une autre solution

Il existe des signaux qui contiennent un nombre infini de fréquences (comme la fonction sinc).



De même, certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique, des fréquences très élevées mais pas toujours utiles).

Pour ces signaux, $f_{\max} = +\infty$:
de tels signaux sont donc *toujours* sous-échantillonnés, quelle que soit la fréquence d'échantilonnage f_e.



Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas?

Effet stroboscopique: une autre solution

Une solution qui minimise les dégâts consiste à:

filtrer le signal
avant de l'échantillonner !

- on filtre le signal avec un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure $f_c < f_e/2$.
- puis on échantillonne le signal à la fréquence f_e;
- et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite; on n'a donc pas d'effet stoboscopique.

original 44KHz

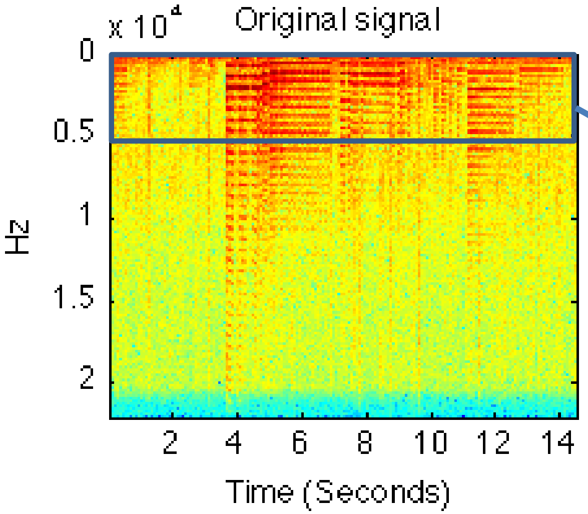
sous-ech. 9KHz

filtré puis sous-éch. KHz

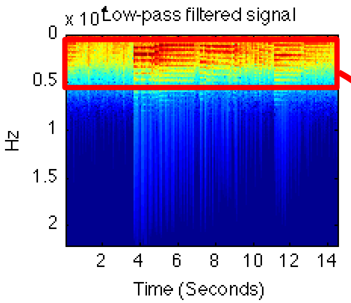
original filtré 44KHz

Effet stroboscopique: une autre solution (2)

original 44KHz

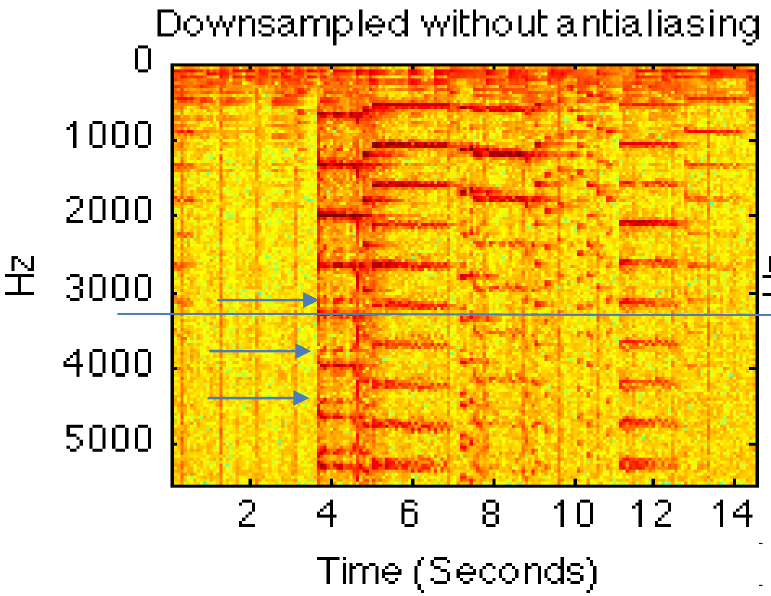


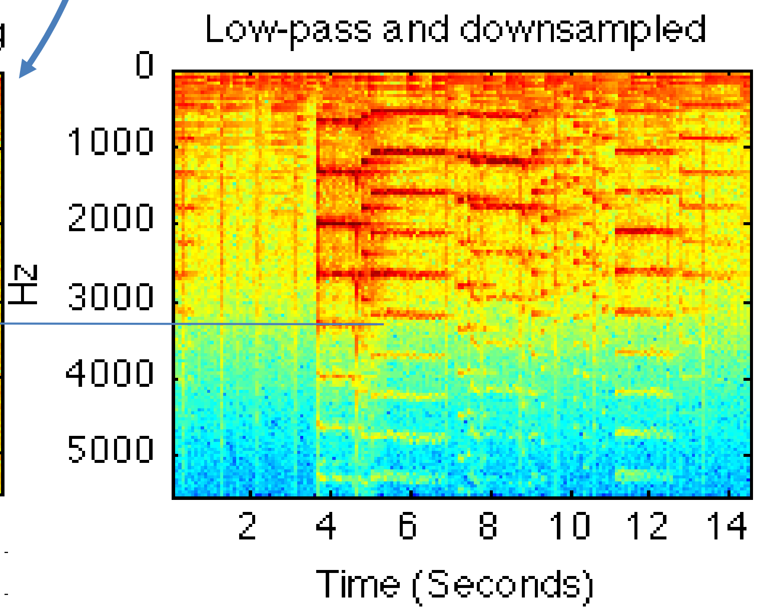
original filtré 44KHz



Diagrammes temps-fréquence:
abscisse: temps
ordonnée: fréquence
couleur = intensité: bleu->rouge

sous-ech.
9KHz





filtré puis
sous-éch.
9 KHz

Echantillonnage de signaux: conclusion

- De façon surprenante, un signal à temps continu $(X(t), t \in \mathbb{R})$ peut sous certaines conditions être reconstruit **parfaitement** à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$.

- Le théorème d'échantillonnage nous donne le **seuil** ($2f_{\max}$) au dessus duquel la fréquence d'échantillonnage f_e est suffisante pour permettre une reconstruction parfaite du signal.

- En dessous de ce seuil, l'**effet stroboscopique** apparaît.

- On peut éviter l'apparition d'un tel phénomène en **filtrant** le signal avant de l'échantillonner.

Echantillonnage de signaux: 2^{e} conclusion

L' échantillonnage et la reconstruction de signaux a permis une transformation profonde des télécommunications:

des signaux analogiques, on est passé aux signaux numériques, qui permettent un transfert bien plus efficace de l'information.