

## Semaine 7 : Série d'exercices sur les signaux

### 1 [N1] Fréquence d'échantillonnage

Soient  $f_1 > f_2 > 0$  deux fréquences données. Pour chacun des signaux suivants, à quelle fréquence  $f_e$  minimum doit-on échantillonner le signal de manière à garantir une reconstruction parfaite au moyen de la formule d'interpolation ?

- a)  $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$
- b)  $X_2(t) = 2 \cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$
- c)  $X_3(t) = \sin(4\pi f_1 t) + \sin(2\pi(f_1 + f_2) t)$
- d)  $X_4(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$

### 2 [N2] Questions-test

Pour les questions ci-dessous, *plusieurs réponses* sont parfois possibles.

**1.** Un *filtre passe-haut* (idéal) est un filtre qui supprime toutes les fréquences plus basses qu'une certaine fréquence de coupure  $f_c$  dans un signal. On applique successivement à un signal  $X(t)$  un filtre passe-haut avec fréquence de coupure  $f_1$ , puis un filtre passe-bas avec fréquence de coupure  $f_2$ . Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont-elles vraies ?

- a) Si  $f_1 < f_2$ , alors le signal sortant est nul.
- b) Si  $f_2 < f_1$ , alors le signal sortant est nul.
- c) Si la plus haute fréquence contenue dans le signal est plus petite que  $f_1$ , alors le signal sortant est nul, quelle que soit la valeur de  $f_2$ .
- d) Si la plus haute fréquence contenue dans le signal est plus petite que  $f_2$ , alors le signal sortant est nul, quelle que soit la valeur de  $f_1$ .

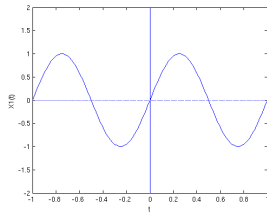
**2.** On rappelle ici la formule d'interpolation :  $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$ . Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont-elles vraies ?

- a)  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1/T_e$  est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal  $X(t)$ .
- b)  $X_I(t)$  est la « courbe » qui relie les points du signal échantillonné ( $X(nT_e)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) par des droites.
- c) Dans tous les cas,  $X_I(nT_e) = X(nT_e)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
- d) La bande passante du signal  $X_I(t)$  est plus petite ou égale à  $f_e/2$ , quel que soit le signal  $X(t)$ .

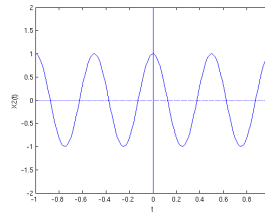
**3.** Si on désire éviter l'effet stroboscopique lorsqu'on échantillonne un signal dont la bande passante est infinie, on doit

- a) ne rien faire en particulier.
- b) filtrer les hautes fréquences du signal avant de l'échantillonner.
- c) filtrer les basses fréquences du signal avant de l'échantillonner.
- d) échantillonner le signal à plus de deux fois la fréquence maximum qui nous intéresse dans le signal.

4. On représente deux signaux :



$X_1(t)$



$X_2(t)$

Pour passer de  $X_1(t)$  à  $X_2(t)$ , on a :

- a) doublé l'amplitude du signal et introduit un déphasage de  $\pi/2$ .
- b) divisé par 2 l'amplitude du signal et doublé sa fréquence.
- c) doublé la fréquence du signal et introduit un déphasage de  $\pi/2$ .
- d) divisé par 2 la fréquence du signal et introduit un déphasage de  $\pi/2$ .

### 3 [N3] Un peu de radio

Cet exercice montre l'application du filtrage à travers un exemple du monde réel. On s'intéresse à la modulation en amplitude (AM). Un signal modulé en amplitude est formé par le produit de deux signaux distincts : le signal contenant l'information que l'on désire transmettre  $S(t)$  (du son en général) et l'onde porteuse  $P(t)$ . Dans cet exercice, on désire transmettre une sinusoïde à 1 kHz en utilisant une onde radio porteuse à 300 kHz.

$$\begin{aligned} S(t) &= \sin(2\pi f_s t) & P(t) &= \sin(2\pi f_p t) \\ f_s &= 1 \text{ kHz} & f_p &= 300 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Le signal émis par l'émetteur radio est finalement donné par

$$A(t) = S(t) P(t).$$

La figure 1 donne une illustration conceptuelle de ce à quoi peut ressembler  $A(t)$ ; les fréquences ne sont pas correctes mais leur grande différence produit ce type de signal qui d'ailleurs a été rencontré dans un exercice précédent.

- a) Dans un premier temps, un petit rappel de Physique est nécessaire pour justifier l'emploi de l'onde porteuse. En effet pourquoi n'est-il pas possible de simplement transmettre le signal  $S(t)$  directement en émettant une onde radio à 1 kHz ?

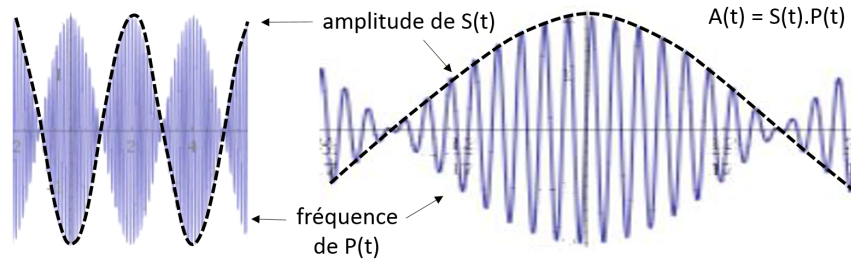


FIGURE 1 – L’onde porteuse est la sinusoïde de haute fréquence tandis que le signal  $S(t)$  est rendu visible par l’enveloppe de l’amplitude de la porteuse.

- En pratique, la longueur d’une antenne pour un récepteur radio doit au moins être de l’ordre du quart de la longueur d’onde du signal à recevoir. La relation entre la fréquence  $f$  et la longueur d’onde  $\lambda$  d’une onde électromagnétique est  $c = \lambda f$ , où  $c = 3 \times 10^8$  m/s est la vitesse de la lumière. Sachant cela calculer et comparer la longueur d’antenne nécessaire pour les deux valeurs de fréquences fournies (signal et porteuse).

b) Ensuite, du côté de la réception, on obtient  $A(t)$  et on cherche à récupérer le signal  $S(t)$ . On suppose pour ça qu’on connaît la fréquence  $f_p$ , mais pas forcément la fréquence  $f_s$  (seulement qu’elle est bien plus petite que  $f_p$ ).

- Que se passe-t-il si on filtre le signal reçu  $A(t)$  avec un filtre à moyenne mobile ayant une durée d’intégration égale à 4 fois la période de l’onde porteuse ? Faire une ébauche du résultat en appliquant le filtre sur le dessin conceptuel de droite et en déduire ce qui se passerait sur le cas réel. Quelle est la cause principale de cet effet ?

c) Il s’agit maintenant de transformer  $A(t)$  pour 1) conserver l’enveloppe de l’amplitude de  $S(t)$ , mais 2) tout en supprimant l’effet d’alternance de signe de l’amplitude causée par  $P(t)$ . L’idée est la suivante : pour supprimer la variation de signe de l’amplitude causée par  $P(t)$ , il faut rendre ce terme toujours positif au lieu d’alterner entre positif et négatif. Cela se fait facilement en multipliant  $A(t)$  une nouvelle fois par  $P(t)$ . On a alors :

$$A'(t) = S(t) P(t) P(t).$$

- Utiliser les formules trigonométriques pour transformer  $A'(t)$  en une somme de sinusoïdes.
- En déduire comment récupérer  $S(t)$  à partir de  $A'(t)$ .

## Cours ICC : liens théorie $\longleftrightarrow$ Programmation

L’exercice 7 de la série 7 vous propose de coder un signal, son échantillonnage et la reconstruction de celui-ci pour voir l’effet de la fréquence d’échantillonnage sur le résultat et « jouer » avec les résultats du théorème d’échantillonnage.

Retrouvez tous les exercices de programmation liés à la partie théorie du cours ICC sur cette page :

<https://progmath.epfl.ch/liens-icc.html>