M2.L3 : Série d'exercices sur les signaux et l'entropie

Rappel de trigonométrie

Soient *a,b,u,v* des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u - v) - \cos(u + v)$

$2\cos(u)\sin(v) = \sin(u + v) - \sin(u - v)$

$\cos(b) - \cos(a) = 2\sin((a + b)/2)\sin((a - b)/2)$

$\sin(b) - \sin(a) = 2\cos((a + b)/2)\sin((b - a)/2)$

$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

On rappelle également que $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$.

1 Signaux

1.1 Questions-test

Pour les questions ci-dessous, *plusieurs réponses* sont parfois possibles.

1.1 Un ***filtre passe-haut*** (idéal) est un filtre qui supprime toutes les fréquences plus basses qu'une certaine fréquence de coupure f_c dans un signal. On applique successivement à un signal $X(t)$ un filtre passe-haut avec fréquence de coupure f_1, puis un filtre passe-bas avec fréquence de coupure f_2. Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont-elles vraies?

a) Si $f_1 < f_2$, alors le signal sortant est nul.

b) Si $f_2 < f_1$, alors le signal sortant est nul.

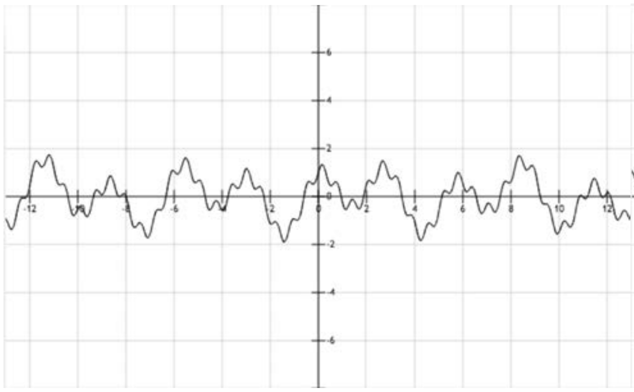
c) Si la plus haute fréquence contenue dans le signal est plus petite que f_1, alors le signal sortant est nul, quelle que soit la valeur de f_2.

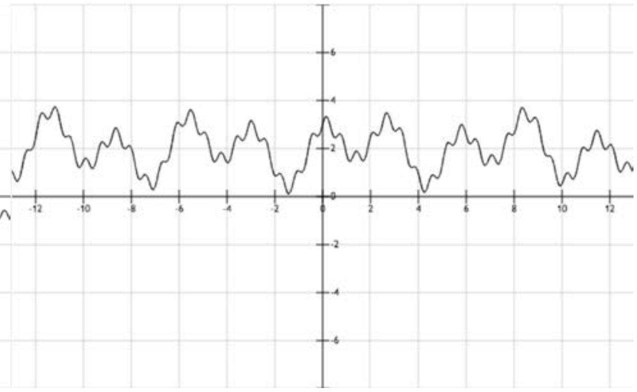
d) Si la plus haute fréquence contenue dans le signal est plus petite que f_2, alors le signal sortant est nul, quelle que soit la valeur de f_1.

1.2 **Composante continue**. La composante continue d'un signal ne varie pas dans le temps. Elle correspond à la contribution d'une *fréquence nulle*. Par exemple, dans le signal

$$f(t) = 2 + 0.6\sin(t) + \cos(2.2t) + 0.3\sin(10t),$$

la composante continue correspond au terme "2".





f(t) = 0.6sin(t) + cos(2.2t) + 0.3sin(10t)　　f(t) = 2 +0.6sin(t) + cos(2.2t) + 0.3sin(10t)

Le signal de gauche a une composante continue nulle, alors qu'elle vaut 2 pour le signal de droite.

a) A quelle opération sur le graphe de f(t) correspond l'ajout d'une composante continue ?

b) Soit f(t) un signal comportant une composante continue et plusieurs sinusoïdes de fréquences 0 < f1 < f2 etc... Quel type de filtre idéal faut-il utiliser pour conserver seulement la composante continue? Comment feriez-vous avec un filtre à moyenne mobile?

c) Soit f un signal comportant une composante continue. Quel type de filtre idéal faut-il utiliser pour supprimer la composante continue ? Est-ce possible avec un filtre à moyenne mobile?

2. On rappelle ici la formule d'interpolation: $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$. Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont-elles vraies?

a) $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in$R lorsque la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.

b) $X_I(t)$ est la "courbe" qui relie les points du signal échantillonné ($X(nT_e)$, $n \in$Z) par des droites.

c) Dans tous les cas, $X_I(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in$Z.

d) La bande passante du signal $X_I(t)$ est plus petite ou égale à $f_e/2$, quel que soit le signal $X(t)$.

3. Si on désire éviter l'effet stroboscopique lorsqu'on échantillonne un signal dont la bande passante est infinie, on doit

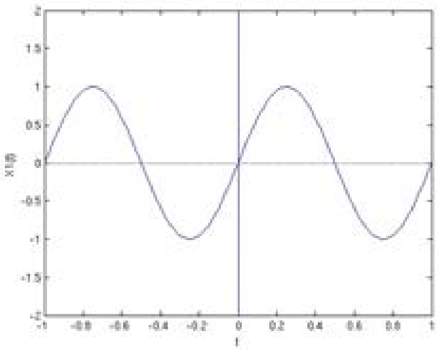
a) ne rien faire en particulier.

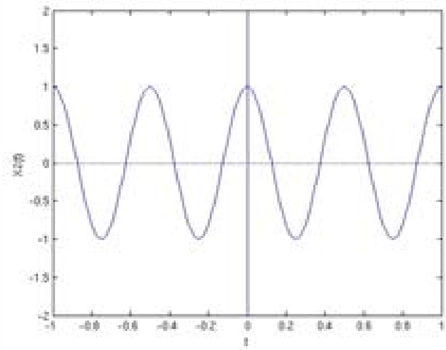
b) filtrer les hautes fréquences du signal avant de l'échantillonner.

c) filtrer les basses fréquences du signal avant de l'échantillonner.

d) échantillonner le signal à plus de deux fois la fréquence maximum qui nous intéresse dans le signal.

4. On représente deux signaux:





$X_1(t)$ $X_2(t)$

Pour passer de $X_1(t)$à $X_2(t)$, on a:

a) doublé l'amplitude du signal et introduit un déphasage de $\pi/2$.

b) divisé par 2 l'amplitude du signal et doublé sa fréquence.

c) doublé la fréquence du signal et introduit un déphasage de $\pi/2$.

d) divisé par 2 la fréquence du signal et introduit un déphasage de $\pi/2$.

2 Entropie

2.1 Quelques pâtisseries

Voici des séquences de 16 lettres chacune (*inclus* les espaces, cette fois). Ordonnez-les dans l'ordre croissant (!) de leurs entropies respectives:

a) TRESSE AU BEURRE

b) PAIN AU CHOCOLAT

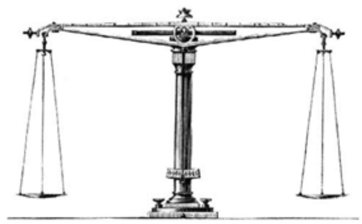
c) CROISSANT FOURRE

d) CHOUX A LA CREME

e) GATEAUX MILANAIS

2.2 Quelques pièces de monnaie

a) Vous avez devant vous 9 pièces de monnaie, identiques en apparence, mais quelqu'un vous dit que l'une d'elles est fausse et pèse un peu moins lourd que les autres. Pour identifier la fausse pièce, vous disposez d'une balance…



…avec laquelle il est possible d'effectuer des pesées. Le résultat de chaque pesée peut être “la balance penche à gauche”, “la balance penche à droite” ou “la balance reste stable”.

Quel est le nombre *minimum* de pesées qu'il vous faut exécuter pour identifier la fausse pièce? Et quelles sont ces pesées?

Indication: Commencez par le problème plus simple où vous n'avez que 3 pièces devant vous.

b) Supposons maintenant que vous ayez 4 pièces devant vous, et que l'on vous indique qu'*au plus* une d'entre elles est fausse, *sans vous dire si celle-ci est plus légère ou au contraire plus lourde que les autres*. Pour vous aider, vous avez cette fois une pièce additionnelle dans votre poche que vous savez être vraie et que vous pouvez utiliser pour les pesées.

Quel est le nombre minimum de pesées qu'il vous faut exécuter (et à nouveau, quelles pesées effectuerez vous?) pour être en mesure de répondre aux trois questions suivantes (prises ensemble): y a-t-il une fausse pièce? le cas échéant, quelle est-elle? et est-elle plus lourde ou plus légère que les autres?

2.3 Questions-test

Pour chaque paire de mots ci-dessous, spécifier lequel des deux a la plus grande entropie, ou s'ils ont la même entropie.

a) AAAAAAHH et HAHAHAHA

b) ABBA et BEBE

c) CALC et CALCUL

d) MEDITERRANNEE et MEDETERRENNEE

e) EPFL et EEPPFFLL