EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2020

Série 2

Applications de la formule des classes

Exercice 1. Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier et G le groupe fini d'ordre p et d'élément neutre noté e_G.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de cardinal $a \geqslant 1$, on note

$$\mathcal{F}(G, \mathcal{A}) = \{f : g \in G \mapsto f(g) \in \mathcal{A}\}$$

l'ensemble des fonctions de G à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Pour tout $h \in G$ et toute fonction $f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ on définit la fonction $h \star f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ par

$$h.f : g \mapsto (h \star f)(g) := f(g.h).$$

1. Montrer que $(h, f) \mapsto h \star f$ définit une action à gauche de G sur $\mathcal{F}(G, \mathcal{A})$.
2. Montrer que si $h \in G$ n'est pas l'élément neutre alors h est d'ordre p et qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$, qui est invariante sous l'action de h (ie. telle que $h \star f = f$) est constante.
3. En déduire le nombres d'orbites de l'action de G sur $\mathcal{F}(G, \mathcal{A})$.
4. En déduire le *petit Théorème de Fermat* : soit $p \geqslant 2$ premier, pour tout entier $a \geqslant 1$, $a^p - a$ est divisible par p.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de demontrer le Theoreme de Cauchy :

Théorème 1. *Soit G un groupe fini d'ordre n et $p \geqslant 2$ un nombre premier divisant n alors G admet un element g d'ordre p.*

Pour cela on considere le groupe quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dont on notera les elements

$$\overline{m} = m \pmod{p} = m + p\mathbb{Z}$$

et

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0=\{\overline{n}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\mapsto g(\overline{n})\in G,\ g(\overline{0}).g(\overline{1})\cdots g(\overline{p-1})=e_G\}\subset(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^G$$

l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a valeurs dans G et dont le produit de toutes les valeurs est egal a l'element neutre e_G.

1. Montrer que $|\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0|=|G|^{p-1}$.
2. Montrer que l'action par translations de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur lui-meme induit une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0$. Cette action est a gauche ou a droite, pourquoi ?
3. Montrer que les orbites de l' action $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\curvearrowright\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0$ sont de taille 1 ou p.
4. Montrer que les orbites qui sont de taille 1 sont exactement celles des fonctions constantes $\overline{n}\mapsto g$ avec $g\in G$ verifiant
$$g^p=e_G.$$
5. Donner un exemple d'une telle orbite.
6. A l'aide de la formule des classes montrer que le nombre d'orbites de taille 1 est divisible par p.
7. Montrer qu'il existe au moins deux telles orbites et que G possede au moins un element d'ordre p.

Remarque 1. Le Theoreme de Cauchy est le point fondamental de la preuve (par recurrence) du :

Théorème 2 (1er Theoreme de Sylow)**.** *Soit G un groupe fini d'ordre n, p un nombre premier divisant n et $v_p(n)$ la p-valuation de n ($v_p(n)\geqslant 1$ est l'exposant de la plus grande puissance de p divisant n, ie. $p^{v_p(n)}|n$ et $p^{v_p(n)+1}\not|n$) alors G possede un sous-groupe P d'ordre exactement $p^{v_p(n)}$.*

Un tel sous-groupe est appele *p-groupe de Sylow de G* (ou simplement p-Syolw de G)et le 2eme Theorem de Sylow dit que tous les p-Sylows de G sont conjugues. Le troisieme Theoreme de Sylow donne des informations sur le nombres de p-Sylows.

Questions de transitivite

Exercice 3. On pose

$$(\mathbb{R}^2)^2_1=\{(P,Q)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ d(P,Q)=1\}$$

l'ensemble des segments unitaires de $\mathbb{R}^2$: l'ensemble des paires de points de $\mathbb{R}^2$ a distance (euclidienne) 1 l'un de l'autre.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ induit une action bien définie sur $(\mathbb{R}^2)^2_1$.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ agit transitivement sur $(\mathbb{R}^2)^2_1$.

Exercice 4. Soit $G \curvearrowright X$ un groupe agissant transitivement sur un ensemble. Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :

1. Il existe $x \in X$ tel que le groupe G_x agit transitivement sur l'ensemble $X - \{x\}$.
2. Pour tout $x \in X$, le groupe G_x agit transitivement sur l'ensemble $X - \{x\}$.
3. Le groupe G agit transitivement sur $X \times X - \Delta X$ ou
$$\Delta X = \{(x, x),\ x \in X\} \subset X \times X$$
et l'action est l'action evidente
$$g \star (x, y) := (g.x, g.y).$$

Retrouver ainsi une solution de l'exercice precedent.

Application de la fomule de Burnside

Exercice 5. On souhaite généraliser les calculs du nombre $C(p, c)$ de colliers de p perles a c couleurs.

On note $\mathcal{F}(p, c)$ l'ensemble des coloriages de l'ensemble des sommets d'un polygone regulier de p elements avec c couleurs.

1. Enumerer (dans un tableau) les 8 elements φ de D_8 avec leur ordre et pour chaque φ, calculer le nombre de points fixes de φ agissant sur $\mathcal{F}(4, c)$ pour $c = 2, 3, 4$ (on pourra pour cela enumerer les differentes orbites du carre -non-colore- sous l'action sous-groupe $\varphi^{\mathbb{Z}}$ engendre par φ).
2. En deduire le nombre de modeles de colliers possibles pour $c = 2, 3, 4$.
3. Calculer le nombres d'orbites $|C_4 \backslash \mathcal{F}(4, c)|$ de $\mathcal{F}(4, c)$ quand on ne considere que l'action du sous-groupe C_4 des rotations du carre.

Exercice 6. Calculer $C(5, 2)$, $C(5, 3)$ et plus generalement $C(5, c)$.

Exercice 7. Le benzene est une molecule formee de 6 atomes de carbone et 6 atomes d'hydrogene, chaque atome de carbone est lie a deux autres atomes de carbone, le tout se fermant en un hexagone regulier ; par ailleurs chaque atome d'hydrogene est lie a un atome de carbone.

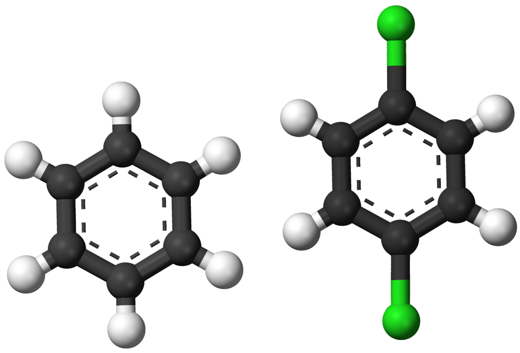

FIGURE 1 – Molecule de Benzene et de $1-4$-dichlorobenzene

Les chlorobenzenes, dichlorobenzenes, ..., hexachlorobenzenes sont les molecules formees en remplacant 1, 2, 3,...5 ou 6 atome(s) d'hydrogene par 1, 2, 3,...5 ou 6 atome(s) de Chlore.

Combien au total peut-on synthetiser de telles molecules ?

Sur les G-ensembles

On rappelle que si un groupe G agit a gauche sur un ensemble X, $G \curvearrowright X$, alors on dit que X est un G-ensemble.

Définition 1. *Etant donne $G \curvearrowright X$ et $G \curvearrowright Y$ deux G-ensembles (dont les actions sont notess $\odot$ et $\otimes$). Un morphisme de G-ensembles (a gauche) – encore appele "application d'entrelacement"– est une application*

$$\phi : X \mapsto Y$$

qui est compatible avec les structures de G-ensemble de X et Y : elle satisfait

$$\forall g \in G,\ \forall x \in X,\ \phi(g \odot x) = g \otimes \phi(x).$$

De maniere equivalente on a pour tout $g \in G$

$$\varphi \circ \mathrm{a}_{l,X}(g) = \mathrm{a}_{l,Y} \circ \varphi(g)$$

ou $\mathrm{a}_{l,X}$ et $\mathrm{a}_{l,Y}$ designent respectivement les applications de G dans $\mathrm{Bij}(X)$ et $\mathrm{Bij}(Y)$ qui definissent ces actions.

On notera $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de G-ensembles de X vers Y. Si ϕ est bijectif on dira que ϕ est un isomorphisme (ou un homeomorphisme) *de G-ensembles. Si $Y = X$ on parlera d'endomorphisme ou d'automorphisme de G-ensembles...*

Exercice 8. Montrer que si un morphisme $\varphi : X \to Y$ de G-ensembles est bijectif alors l'application reciproque φ^{-1} est encore un morphisme de G-ensembles.

Exercice 9. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de G-ensembles.

1. Montrer qu'il existe une unique application

$$\overline{\phi} : G\backslash X \to G\backslash Y$$

   entre les espaces d'orbites de X et de Y verifiant

$$\forall x \in X,\ \overline{\phi}(G.x) = G.\phi(x).$$

2. Montrer que si ϕ est un isomorphisme alors $\overline{\phi}$ est une bijection.

Ainsi un morphisme de G ensemble fournit "naturellement" un "morphisme" (cad une application) entre les espaces d'orbites.

Exercice 10 (Un raffinement du Thm. Orbite-Stabilisateur)**.** Soit X un G-ensemble et $x \in X$, $G.x$ l'orbite de x sous l'action de G et G_x le stabilisateur de x sous l'action de G. Le Thm. Orbite-Stabilisateur dit qu'on a une bijection

$$g.G_x \in G/G_x \simeq g.x \in G.x$$

(G/G_x est l'ensemble des orbites de G sous l'action par multiplication a droite de G_x.)

1. Montrer que G/G_x admet une structure naturelle de G-ensemble a gauche qui fait de la bijection precedente un isomorphisme de G-ensembles.