

# Géométrie II

Philippe Michel May 24, 2020



## Table des matieres

Chapitre 1. Action d'un groupe sur un ensemble	5
1. Action a gauche, a droite	5
2. Noyau, Image d'une action	11
3. Points fixes et Stabilisateurs	13
4. Orbites	14
5. Espace quotient et quotient de groupes	18
6. La formule des points fixes (de Burnside)	21
7. Groupe quotient	24
8. Complement: Produit semi-direct	29
Chapitre 2. Pavages du plan	31
1. Tuiles	31
2. Pavages	33
3. Pavages de Reseaux	34
4. Les groupes cristallographiques du plan	35
5. Groupes paveurs	45
Chapitre 3. L'espace euclidien et ses isometries	55
1. Espaces affines	55
2. L'espace euclidien	64
3. La structure du groupe des isometries	69
4. Le groupe des isometries lineaires et des matrices orthogonales	72
5. Les isometries affines	79
6. Classification et nomenclature des isometries quand $n = 3$	82
Chapitre 4. Groupes finis d'isometries et solides platoniciens	89
1. Enonce du Theoreme de classification	89
2. Classification des groupes d'isometries speciales	92
3. Identification des different groupes possibles	95
4. Presentation des solides platoniciens	103
5. Les groupes symetriques et alternes	111
6. Appendice: Une definition intrinseque du determinant.	113
Chapitre 5. Rudiments de geometrie differentielle	117
1. Courbes dans l'espace	117
2. Champs de vecteurs le long d'une courbe	121



## CHAPITRE 1

# Action d'un groupe sur un ensemble

Dans ce chapitre on definit et on etudie la notion d'action d'un groupe sur un ensemble; on appliquera cette notion dans le chapitre suivant a l'action d'un sous-groupe d'isometrie preservant un pavage.

### 1. Action a gauche, a droite

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe et  $X$  un ensemble. Une action de  $G$  sur  $X$  est la donnee pour chaque element de  $G$  d'une bijection de  $X$  sur lui-meme de sorte que la famille de ces bijections soient compatible avec les lois de groupes sur  $G$  et sur  $\text{Bij}(X)$ .

DÉFINITION 1.1. Une action a gauche d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est la donnee d'un morphisme de groupe

$$\mathfrak{a}_l : \begin{array}{l} G \mapsto \text{Bij}(X) \\ g \mapsto \mathfrak{a}_l(g) : X \mapsto X \end{array}$$

En d'autres termes c'est une application verifiant

- (1)  $\mathfrak{a}_l(e_G) = \text{Id}_X$ ,
- (2)  $\mathfrak{a}_l(g^{-1}) = \mathfrak{a}_l(g)^{-1}$ ,
- (3)  $\mathfrak{a}_l(g.g') = \mathfrak{a}_l(g) \circ \mathfrak{a}_l(g')$ .

On notera  $G \curvearrowright X$  le fait qu'un groupe agisse sur un ensemble a gauche. Un ensemble  $X$  muni d'une action a gauche d'un groupe  $G$  sera appelé un  $G$ -ensemble a gauche.

NOTATION. Soit  $\mathfrak{a}_l : G \rightarrow \text{Bij}(X)$  une action alors pour tout  $g$ ,  $\mathfrak{a}_l(g)$  est une bijection de  $X$  sur  $X$ . Pour designer l'image d'un element  $x \in X$  par cette bijection la notation

$$\mathfrak{a}_l(g)(x)$$

est un peu lourde. On l'omettra ou on la remplacera avec un autre symbole par exemple on pourra ecrire

$$\mathfrak{a}_l(g) = (x)g.x \text{ ou } g \odot x \text{ a la place de } \mathfrak{a}_l(g)(x).$$

Comme  $\mathfrak{a}_l$  est un morphisme de groupes on a

$$\mathfrak{a}_l(g) \circ \mathfrak{a}_l(g') = \mathfrak{a}_l(g.g').$$

En d'autres termes, pour tout  $x \in X$  et tout  $g, g' \in G$  on a

$$\mathfrak{a}_l(g)(\mathfrak{a}_l(g')(x)) = \mathfrak{a}_l(g.g')(x).$$

Avec la notation introduite ci-dessus cela nous donne

$$g \odot (g' \odot x) = g \odot g' \odot x = (g.g') \odot x.$$

Cela conduit a la definition alternative mais equivalente d'une action de groupes:

DÉFINITION 1.2. Une action à gauche d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est la donnée d'une application

$$\odot : G \times X \mapsto X \\ (g, x) \mapsto g \odot x$$

vérifiant

$$\forall x \in X, e_G \odot x = x$$

$$\forall g, g' \in G, x \in X, g \odot (g' \odot x) = (g.g') \odot x;$$

(en particulier si  $g' = g^{-1}$  on aura pour tout  $x \in X$

$$g \odot (g^{-1} \odot x) = (g.g^{-1}) \odot x = e_G \odot x = x.)$$

Verifions que ces deux definitions sont bien equivalentes:

Definition 1.1  $\implies$  Definition 1.2. Etant donne un morphisme  $a_l : G \rightarrow (X)$ , on defini

$$\odot : G \times X \mapsto X \\ (g, x) \mapsto g \odot x := a_l(g)(x).$$

Comme  $a_l$  est un morphisme on a

$$e_G \odot x = a_l(e_G)(x) = \text{Id}_X(x) = x$$

$$g \odot (g' \odot x) = a_l(g)(a_l(g')(x)) = (a_l(g) \circ a_l(g'))(x) = a_l(g.g')(x) = (g.g') \odot x.$$

Definition 1.2  $\implies$  Definition 1.1. On se donne

$$\odot : G \times X \mapsto X \\ (g, x) \mapsto g \odot x$$

vérifiant

$$\forall x \in X, e_G \odot x = x$$

$$\forall g, g' \in G, x \in X, g \odot (g' \odot x) = (g.g') \odot x.$$

Definissons pour tout  $g \in G$ , l'application

$$a_l(g) : X \mapsto X \\ x \mapsto a_l(g)(x) := g \odot x$$

Montrons que  $a_l(e_G) = \text{Id}_X$ : en effet

$$\forall x \in X, a_l(e_G)(x) = e_G \odot x = x.$$

Montrons que  $a_l(g.g') = a_l(g) \circ a_l(g')$ : en effet  $\forall x \in X$

$$a_l(g.g')(x) = (g.g') \odot x = g \odot (g' \odot x) = g \odot (a_l(g')(x)) = a_l(g)(a_l(g')(x)) = (a_l(g) \circ a_l(g'))(x).$$

En particulier si  $g' = g^{-1}$  on obtient

$$\text{Id}_X = a_l(e_G) = a_l(g.g^{-1}) = a_l(g) \circ a_l(g^{-1}),$$

et en echangeant  $g$  et  $g^{-1}$

$$\text{Id}_X = a_l(e_G) = a_l(g^{-1}.g) = a_l(g^{-1}) \circ a_l(g),$$

ce qui montre que  $a_l(g)$  et  $a_l(g^{-1})$  sont reciproques l'une de l'autre et en particulier bijectives. Ainsi l'application  $a_l$  (de  $G$  vers l'ensemble des applications de  $X$  dans  $x$ ) est a valeurs dans de groupe  $\text{Bij}(X)$  et les proprietes qu'on vient de demontrer montrent qu'il s'agit d'un morphisme de groupes.  $\square$

1.0.1. *Action a droite.* Quelque fois on tombe naturellement sur la structure suivante

DÉFINITION 1.3. *Une action a droite d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est la donnée d'une application*

$$\mathfrak{a}_r : \begin{array}{l} G \mapsto \text{Bij}(X) \\ g \mapsto \mathfrak{a}_r(g) : X \mapsto X \end{array}$$

verifiant

- (1)  $\mathfrak{a}_r(e_G) = \text{Id}_X$ ,
- (2)  $\mathfrak{a}_r(g^{-1}) = \mathfrak{a}_r(g)^{-1}$ ,
- (3)  $\mathfrak{a}_r(g.g') = \mathfrak{a}_r(g') \circ \mathfrak{a}_r(g)$ .

On notera  $X \curvearrowright G$  le fait qu'un groupe agisse sur un ensemble a droite. Un ensemble  $X$  muni d'une action à gauche d'un groupe  $G$  sera appelé un  $G$ -ensemble à gauche.

On a donc pas exactement un morphisme de groupe mais presque:

EXERCICE 1.1. Soit  $\mathfrak{a}_r : G \rightarrow \text{Bij}(X)$  une action a droite alors l'application

$$g \in G \mapsto \mathfrak{a}_r(g^{-1}) \in \text{Bij}(X)$$

est un morphisme de groupe (donc definit une action a gauche).

**Preuve:** Posons  $\mathfrak{a}_l(g) = \mathfrak{a}_r(g^{-1})$ . Pour montrer que  $g \in G \mapsto \mathfrak{a}_l(g) \in \text{Bij}(X)$  est un morphisme de groupes il suffit de montrer que (critere de morphisme de groupes)

$$\forall g, g' \in G, \mathfrak{a}_l(g^{-1}.g') = \mathfrak{a}_l(g)^{-1} \circ \mathfrak{a}_l(g').$$

On a

$$\mathfrak{a}_l(g^{-1}.g') = \mathfrak{a}_l(g^{-1}) \circ \mathfrak{a}_l(g') = \mathfrak{a}_l(g)^{-1} \circ \mathfrak{a}_l(g').$$

On a donc bien une action a gauche.

Inversement donnons nous une action a gauche  $\mathfrak{a}_l : G \mapsto \text{Bij}(X)$  et posons

$$\mathfrak{a}_r : \begin{array}{l} G \mapsto \text{Bij}(X) \\ g \mapsto \mathfrak{a}_l(g) := \mathfrak{a}_r(g^{-1}) \end{array}$$

et verifions les axiomes d'une action a droite:

- $\mathfrak{a}_r(e_G) = \mathfrak{a}_l(e_G^{-1}) = \mathfrak{a}_l(e_G) = \text{Id}_X$ .
- $\mathfrak{a}_r(g^{-1}) = \mathfrak{a}_l((g^{-1})^{-1}) = \mathfrak{a}_l(g) = \mathfrak{a}_l(g^{-1})^{-1} = \mathfrak{a}_r(g)^{-1}$ .
- $\mathfrak{a}_r(g.g') = \mathfrak{a}_l((g.g')^{-1}) = \mathfrak{a}_l(g'^{-1}.g^{-1}) = \mathfrak{a}_l(g'^{-1}) \circ \mathfrak{a}_l(g^{-1}) = \mathfrak{a}_r(g') \circ \mathfrak{a}_r(g)$ .

□

On a la formulation equivalente suivante (qu'on demontre comme precedemment)

DÉFINITION 1.4. *Une action à droite d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est la donnée d'une application*

$$\odot : \begin{array}{l} X \times G \mapsto X \\ (x, g) \mapsto x \odot g \end{array}$$

verifiant

$$\forall x \in X, x \odot e_G = x$$

$$\forall g, g' \in G, x \in X, (x \odot g) \odot g' = x \odot (g.g');$$

REMARQUE 1.1. Si  $\odot$  est une action à gauche, l'application

$$\tilde{\odot} : \begin{array}{ccc} X \times G & \mapsto & X \\ (x, g) & \mapsto & x\tilde{\odot}g = g^{-1} \odot x \end{array}$$

définit une action à droite. Il est donc facile de passer d'une action à gauche à une action à droite et vice-versa.

### 1.1. Exemples.

1.1.1. *Action tautologique du groupe symétrique.* Le groupe  $\mathfrak{S}_X = \text{Bij}(X)$  des permutations de  $X$  sur  $X$  munis de  $\text{Id}_X$  comme élément neutre et de la composition  $\circ$  comme loi de groupe agit à gauche sur l'ensemble  $X$ , le morphisme  $a_l$  étant l'application identité

$$\text{Id}_{\text{Bij}(X)} : \sigma \in \text{Bij}(X) \rightarrow \sigma \in \text{Bij}(X).$$

C'est l'action *tautologique*: cette action est donnée pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_X$  et  $x \in X$  par

$$\sigma \odot x = \sigma(x).$$

On a pour tout  $x \in X$

$$\text{Id}_X \odot x = \text{Id}_X(x) = x$$

et

$$\sigma \odot (\sigma' \odot x) = \sigma(\sigma'(x)) = \sigma \circ \sigma'(x) = \sigma \circ \sigma' \odot x.$$

l'identité

$$\sigma(\sigma'(x)) = \sigma \circ \sigma'(x)$$

est précisément la définition de la composée de deux applications.

1.1.2. *Action triviale.* C'est l'action qui correspond au morphisme constant

$$g \in G \rightarrow \text{Id}_X \in \text{Bij}(X).$$

En d'autres termes

$$\forall x \in X, g \in G, g.x = x.$$

1.1.3. *Action restreinte à un sous-groupe.* Si un groupe  $G$  agit sur un ensemble  $X$  alors tout sous-groupe  $H \subset G$  agit également sur  $X$ : le morphisme est le morphisme  $a_{lH}$  par restriction de  $a_l$  au sous-groupe  $H \subset G$ . On parle "d'action par restriction à  $H$  de l'action de  $G$  sur  $X$ ".

1.1.4. *Action du groupe des isométries sur  $\mathbb{R}^2$ .* Considérons le cas  $X = \mathbb{R}^2$  et  $G = \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  le groupe des isométries de  $\mathbb{R}^2$ . On a montré que l'ensemble des isométries de  $\mathbb{R}^2$  est un sous-groupe de  $\text{Bij}(\mathbb{R}^2)$  et donc agit sur  $\mathbb{R}^2$  par restriction de l'action tautologique de  $\text{Bij}(\mathbb{R}^2)$ .

1.1.5. *Iteration d'une permutation.* Soit  $X$  un ensemble et  $\sigma \in \text{Bij}(X)$  une bijection de  $X$ , le sous-groupe  $\sigma^{\mathbb{Z}} \subset \text{Bij}(X)$  agit donc sur  $X$  par restriction. On rappelle qu'on dispose d'un morphisme de groupes

$$\exp_{\sigma} : n \in \mathbb{Z} \rightarrow \sigma^n \in \sigma^{\mathbb{Z}} \subset \text{Bij}(X)$$

obtenu en posant

$$\sigma^0 = \text{Id}_X$$

pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sigma^n = \sigma \circ \sigma \cdots \circ \sigma, \quad n - \text{fois}$$

et pour  $n < 0$

$$\sigma^n = \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \cdots \circ \sigma^{-1}, \quad |n| - \text{fois}$$



de sorte que

$$\exp_{\sigma}(m+n) = \sigma^{m+n} = \sigma^m \circ \sigma^n = \exp_{\sigma}(m) \circ \exp_{\sigma}(n).$$

Ainsi le morphisme

$$\exp_{\sigma} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \mapsto & \text{Bij}(X) \\ n & \mapsto & \sigma^n \end{array}$$

defini une action de  $\mathbb{Z}$  sur  $X$ :

$$n \odot x := \sigma^n(x).$$

1.1.6. *Action d'un groupe sur lui-même par translation.* Soit  $G$  un groupe, alors  $G$  agit sur lui-même (à gauche) par multiplication à gauche et (à droite) par multiplication à droite:

$$g \odot h = g.h.$$

On dit que  $G$  agit sur lui-même par translations: le morphisme est le morphisme "translation a gauche"

$$\text{tg} : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \text{Bij}(G) \\ g & \mapsto & \text{tg}_g : h \in G \rightarrow \text{tg}_g(h) = g.h \end{array}$$

ou le morphisme "translation a droite"

$$\text{td} : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \text{Bij}(G) \\ g & \mapsto & \text{td}_g : h \in G \rightarrow \text{td}_g(h) = h.g \end{array}$$

Verifions que tg definit action a gauche: pour cela on utilise la Definition 1.2 en posant  $g \odot h = \text{tg}_g(h) = g.h$ . Pour tout  $h, g, g' \in G$  on a

$$e_G \odot h = e_G.h = h, (g.g') \odot h = (g.g').h = g.(g'.h) = g \odot (g' \odot h).$$

On procede de meme pour la translation a droite td (en posant  $h \odot g = \text{td}_g(h) = h.g$ ). Pour tout  $h, g, g' \in G$  on a

$$h \odot e_G = h.e_G = h, h \odot (g.g') = h.(g.g') = (h.g).g' = (h \odot g) \odot g'.$$

EXEMPLE 1.1. Un cas important pour ce cours est l'action par translation d'un espace vectoriel  $V$  sur lui-même: pour tout  $\vec{v} \in V$  on note  $T_{\vec{v}}$  la translation de vecteur  $\vec{v}$

$$T_{\vec{v}} : \vec{x} \mapsto T_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}.$$

1.1.7. *Action d'un groupe sur lui-même par conjugaison.* Une deuxième action importante d'un groupe sur lui-même est l'action par conjugaison: etant donné  $g \in G$  soit  $\text{Ad}(g)$  l'application

$$\text{Ad}(g) : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ h & \mapsto & g.h.g^{-1} \end{array}$$

alors  $\text{Ad}(g) \in \text{Bij}(G)$  est une bijection (et egalement un morphisme de groupes) d'inverse  $\text{Ad}(g^{-1})$  et l'application

$$\text{Ad} : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \text{Bij}(G) \\ g & \mapsto & \text{Ad}(g) : h \in G \rightarrow ghg^{-1} \end{array}$$

est un morphisme de groupes. Cela definit donc une action de  $G$  sur  $G$  qu'on appelle action adjointe ou par conjugaison.

Verifions qu'on dispose bien d'une action a gauche: pour tout  $g, g', h \in G$  on a

$$\text{Ad}(e_G)(h) = e_G.h.e_G^{-1} = h,$$

$$\text{Ad}(g.g')(h) = (g.g').h.(g.g')^{-1} = g.g'.h.g'^{-1}.g^{-1} = \text{Ad}(g)(\text{Ad}(g')(h)) = \text{Ad}(g) \circ \text{Ad}(g')(h).$$

1.1.8. *Action induite sur les sous-ensembles et les fonctions.* L'action (a gauche) d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$ , induit une action (a gauche) de  $G$  sur l'ensemble  $\mathcal{P}(X)$  des sous-ensembles de  $X$ : etant donne  $Y \subset X$  et  $g \in G$ , on pose

$$g \odot Y = \{g \odot y, y \in Y\} \subset X.$$

Notons que  $\mathcal{P}(X)$  est en bijection avec  $\{0, 1\}^X = \{\phi : X \rightarrow \{0, 1\}\}$  l'ensemble des fonctions de  $X$  a valeurs dans  $\{0, 1\}$  (a un sous-ensemble  $Y \subset X$  on associe la fonction indicatrice

$$1_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

qui vaut un ou zero suivant que l'on se trouve dans l'ensemble ou pas. L'action de  $G$  sur  $\mathcal{P}(X)$  defini donc une action de  $G$  sur  $\mathcal{F}(X, \{0, 1\})$ .

Cette action se generalise a tout espace de fonctions: etant donne

$$\mathcal{F}(X; \mathbb{R}) = \{f : x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}\},$$

l'espace des fonctions sur  $X$  a valeurs dans  $\mathbb{R}$ , l'action (a gauche) d'un groupe  $G$  sur  $X$ , induit une action (a droite) de  $G$  sur l'ensemble  $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ : etant donne  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  et  $g \in G$ , on definit la fonction  $f|_g$  par la formule

$$f|_g : x \mapsto f(g \odot x).$$

Notons que pour obtenir une action a gauche il suffit de poser

$$g.f : x \mapsto f|_{g^{-1}}(x) = f(g^{-1} \odot x).$$

EXERCICE 1.2. Verifier que  $(f, g) \mapsto f|_g$  est bien une action a droite et que  $(g, f) \mapsto g.f$  est une action a gauche.

**Preuve:** On verifie que l'application

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \times G &\mapsto \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \\ (f, g) &\mapsto f|_g : x \mapsto f(g \odot x) \end{aligned}$$

les axiomes d'une action a droite (suivant la Definition equivalente 1.4)

- Montrons que pour toute fonction  $f$ ,  $f|_{e_G} = f$ :  $\forall x \in X$   $f|_{e_G}(x) = f(e_G \odot x) = f(x)$ .
- Calculons  $f|_{g.g'}$ :  $\forall x \in X$ ,  $f|_{g.g'}(x) = f((g.g') \odot x) = f(g \odot (g' \odot x)) = f|_g(g' \odot x)$ . Posons  $F = f|_g$ . On a donc pour tout  $x$   $f|_{g.g'}(x) = F(g' \odot x) = F|_{g'}(x)$  et donc

$$f|_{g.g'} = F|_{g'} = (f|_g)|_{g'}.$$

En particulier par une exercice precedent comme c'est une action a droite, l'application

$$\star : \mathbf{G} \times \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \\ (g, f) \mapsto g \star f : x \mapsto f(g^{-1} \odot x)$$

□

## 2. Noyau, Image d'une action

DÉFINITION 1.5. Soit  $G \curvearrowright X$  une action à gauche d'une groupe sur un ensemble défini par un morphisme

$$a_l : G \rightarrow \text{Bij}(X).$$

Le noyau et l'image de cette action sont définis respectivement de noyau  $\ker a_l \in G$  et l'image  $\text{Im } a_l \in \text{Bij}(X)$  de ce morphisme.

Si on dispose d'une action à droite  $a_r : G \rightarrow \text{Bij}(X)$  le noyau et l'image de l'action sont les noyau et image de l'action à gauche correspondante:

$$a_l : g \mapsto a_r(g^{-1}).$$

EXEMPLE 2.1. Un groupe  $G$  agit trivialement sur un ensemble  $X$  ssi le noyau de l'action est  $G$  tout entier.

DÉFINITION 1.6. Etant donné  $G \curvearrowright X$  un  $G$ -ensemble (à gauche). Si  $\ker(a_l) = \{e_G\}$  c'est à dire si le morphisme

$$a_l : G \mapsto \text{Bij}(X)$$

est injectif, on dira que l'action est fidele ou que  $G$  agit fidelement sur  $X$ . De maniere equivalente,  $G$  agit fidelement sur  $X$

$$\forall x \in X, g \odot x = x \implies g = e_G.$$

EXERCICE 1.3. Montrer que l'action d'un groupe  $G$  sur lui-meme par translations est fidele.

**Preuve:** Calculons le noyau du morphisme  $\text{tg}$ : son  $g \in G$  tel que pour tout  $h$  on ait  $\text{tg}(h) = g.h = h$ , alors en posant  $h = e_G$  on trouve  $g = e_G$  et donc

$$\ker(\text{tg}) = \{e_G\}$$

et donc  $\text{tg} : G \mapsto \text{Bij}(G)$  est injectif. □

EXERCICE 1.4. Montrer que le noyau de l'action de  $G$  sur lui-meme par conjugaison est un sous-groupe distingue appele le centre de  $G$

$$Z(G) = \{h \in G, \text{ pour tout } g \in G g.h = h.g\}.$$

**Preuve:** Soit  $g \in \ker \text{Ad}$  alors pour tout  $h \in H$  on a

$$\text{Ad}(g)(h) = h \iff g.h.g^{-1} = h \iff g.h = h.g.$$

Ainsi  $\ker \text{Ad}$  est l'ensemble des element de  $G$  qui commutent avec tous les element de  $G$ . C'est donc un sous-groupe distingue de  $G$  (c'est un noyau) appele le centre de  $G$  et note

$$Z(G) = \{h \in G, \text{ pour tout } g \in G g.h = h.g\}.$$

En paticulier l'action par conjugaison est triviale si et seulement si

$$Z(G) = G$$

c'est a dire que le groupe  $G$  est commutatif. □

**2.1. Action par automorphismes relatifs a une structure.** Soit  $X$  un  $G$ -ensemble muni d'une structure supplementaire  $Str$  (par exemple  $X$  est un groupe, un espace vectoriel etc...); on dira que  $G$  agit sur  $X$  par automorphismes pour cette structure si l'image de cette action  $\text{Im } a_l$  est contenue dans le sous-groupe  $\text{Aut}_{Str}(X) \subset \text{Bij}(X)$  des bijections preservant la structure additionnelle de  $X$ , ie.

$$\forall g \in G, a_l(g) \in \text{Aut}_{Str}(X).$$

EXEMPLE 2.2. Si  $X$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que pour tout  $g$

$$a_l(g) : X \mapsto X$$

est une application lineaire. On dira alors que  $G$  agit lieairement sur  $X$ .

REMARQUE 2.1. Pour montrer que  $G$  agit sur  $X$  par automorphismes relativement a une structure  $Str$ , il suffit de montrer que pour tout  $g$   $a_l(g) : x \mapsto g \odot x$  est un morphisme pour cette structure: en effet  $a_l(g^{-1})$  sera egalement un morphisme pour cette structure et  $a_l(g)$  et  $a_l(g^{-1})$  sont des morphisme et des applications reciproques l'une de l'autre, ce sont donc des isomorphismes.

EXEMPLE 2.3. L'action de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  sur  $\mathbb{R}^2$  est par isometries: elle preserve la structure donnee par la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ .

EXEMPLE 2.4. L'action de  $G$  sur lui-meme par conjugaison est une action par automorphismes relativement a la structure de groupe.

**Preuve:** En effet pour tout  $g \in G$  et  $h, h' \in G$  on a

$$\text{Ad}(g)(h.h') = g.h.h'.g^{-1} = g.h.g^{-1}.g.h'.g^{-1} = \text{Ad}(g)(h).\text{Ad}(g)(h')$$

et

$$\text{Ad}(g)(h)^{-1} = (g.h.g^{-1})^{-1} = g^{-1}.h^{-1}.g = g.h^{-1}.g^{-1} = \text{Ad}(g)(h^{-1})$$

on a donc bien un morphisme de groupes.  $\square$

EXEMPLE 2.5. L'action de  $G$  sur lui-meme par translations a gauche n'est PAS une action par automorphismes relativement a la structure de groupe sauf si le groupe est trivial.

**Preuve:** Voyons que pour tout  $g \in G$ ,  $\text{tg}_g : G \mapsto G$  n'est PAS un morphisme de groupe sauf si  $g = e_G$ . supposonsque  $\text{tg}_G$  est un morphisme. On a alors pour tout  $h, h' \in G$

$$\text{tg}_g(h.h') = g.h.h' = \text{tg}_g(h).\text{tg}_g(h') = g.h.g.h'$$

et en posant  $h = h' = e_G$  on obtient  $g.g = g$  et donc  $g = e_G$ .  $\square$

EXEMPLE 2.6. Soit  $G$  agissant a gauche sur un ensemble  $X$ , et  $\mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \curvearrowright G$  l'action a droite de  $G$  sur l'espace vectoriel des fonctions sur  $X$  induite par cette action. Le groupe  $G$  agit (a droite) sur  $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$  par automorphismes lineaire, ie. relativement a la structure d'espace vectoriel: pour tout  $g$ , l'application

$$a_r(g) : f \mapsto f|_g$$

est une application lineaire inversible.

**Preuve:** Montrons que pour tout  $g \in G$

$$f \mapsto f|_g$$

est lineaire. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$  on veut montrer que

$$(\lambda.f_1 + f_2)|_g = \lambda.f_1|_g + f_2|_g.$$

Pour tout  $x \in X$  on a

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f_1 + f_2)|_g(x) &= (\lambda \cdot f_1 + f_2)(g \odot x) = \lambda \cdot f_1(g \odot x) + f_2(g \odot x) \\ &= \lambda \cdot f_1|_g(x) + f_2|_g(x) = (\lambda \cdot f_1|_g + f_2|_g)(x). \end{aligned}$$

Ainsi cette application est lineaire et comme elle est inversible son inverse est egalement lineaire.  $\square$

## 2.2. Morphisme de $G$ -ensembles.

DÉFINITION 1.7. *Un morphisme de  $G$ -ensembles (a gauche) – encore appele "application d'entrelacement" – est une application*

$$\phi : X \mapsto Y$$

qui est compatible avec les structures de  $G$ -ensemble de  $X$  et  $Y$ : elle satisfait

$$\forall g \in G, \forall x \in X, \phi(g \odot x) = g \otimes \phi(x).$$

De maniere equivalente on a pour tout  $g \in G$

$$\varphi \circ a_{l,X}(g) = a_{l,Y} \circ \varphi(g)$$

ou  $a_{l,X}$  et  $a_{l,Y}$  designent respectivement les applications de  $G$  dans  $\text{Bij}(X)$  et  $\text{Bij}(Y)$  qui definissent ces actions.

On notera  $\text{Hom}_{G\text{-ens}}(X, Y)$  l'ensemble des morphismes de  $G$ -ensembles de  $X$  vers  $Y$ . Si  $\phi$  est bijectif on dira que  $\phi$  est un isomorphisme (ou un homeomorphisme) de  $G$ -ensembles. Si  $Y = X$  on parlera d'endomorphisme ou d'automorphisme de  $G$ -ensembles...

EXERCICE 1.5. Montrer que si un morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $G$ -ensembles est bijectif alors l'application reciproque  $\varphi^{-1}$  est encore un morphisme de  $G$ -ensembles.

## 3. Points fixes et Stabilisateurs

DÉFINITION 1.1. *Soit  $G \curvearrowright X$  un  $G$ -ensemble. Un element  $x \in X$  est un point fixe d'un element  $g \in G$  si*

$$g \cdot x = x.$$

On notera l'ensemble des points fixes d'un element  $g \in G$  par

$$X^g = \text{Fix}_X(g) = \{x \in X, g \cdot x = x\}.$$

Dualement etant donne  $x \in X$  le stabilisateur de  $x$  est l'ensemble des  $g \in G$  dont  $x$  est un point fixe, on le note

$$G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\} \subset G.$$

PROPOSITION 1.1. *Le stabilisateur  $G_x$  est un sous-groupe de  $G$ .*

PREUVE. Clairement  $e_G \in G_x$ . Il suffit de montrer que

$$\forall g, g' \in G_x, g \cdot g'^{-1} \in G_x.$$

$\square$

EXEMPLE 3.1. Soit un sous-groupe  $H$  agissant sur  $G$  par multiplication a gauche et soit  $g \in G$ , on a

$$H_g = \{h \in H, h \cdot g = g\} = \{e_G\}.$$

#### 4. Orbites

DÉFINITION 1.8. *Etant donné une action de groupe  $G \curvearrowright X$  et  $x \in X$ , l'orbite de  $x$  sous l'action de  $G$  (la  $G$ -orbite de  $x$ ) est le sous-ensemble*

$$G.x = \{g.x, g \in G\} \subset X.$$

Soient  $x' \in X$ , on notera la relation "x' appartient a la G-orbite de x" sous la forme

$$x' \sim_G x \iff x' \in G.x$$

THÉORÈME 1.1. *La relation  $x' \sim_G x$  est une relation d'équivalence et dont les différentes classes d'équivalences sont les orbites  $G.x$  pour  $x \in X$ .*

PREUVE. Cette relation est

- Reflexive: soit  $x \in X$ , on a  $x = e_G.x \in G.x$  donc  $x \sim_G x$ .
- Symétrique: soient  $x, x' \in X$  si  $x' \sim_G x$  alors  $x' \in G.x$  alors  $x' = g.x$  pour  $g \in G$  et  $g^{-1}.x' = g^{-1}.g.x = x$  donc  $x \in G.x'$  et  $x \sim_G x'$ .
- Transitive: soient  $x, x', x'' \in X$ , si  $x' \sim_G x$  et  $x'' \sim_G x'$  alors  $x' = g.x$  et  $x'' = g'.x'$  pour  $g, g' \in G$  et donc  $x'' = g'.g'.x = (g'g).x \in G.x$  et  $x'' \sim_G x$ .

□

Il sera utile d'introduire une notation pour l'espace de toutes les orbites.

DÉFINITION 1.9. *On note*

$$G \backslash X = \{G.x, x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

*l'ensemble des G-orbites de X (c'est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de X); on appelle cet ensemble le quotient de X sous l'action de G.*

*On note  $\pi_G$  ou encore  $\text{red}_G$ , l'application surjective*

$$\text{red}_G = \pi_G : \begin{array}{l} X \mapsto G \backslash X \\ x \mapsto G.x \end{array}$$

*qui a un element de x associe son orbite; on l'appelle cette application "projection sur  $G \backslash X$ " ou encore "reduction modulo G" et on note également l'image de x,  $G.x$ , "x modulo G" qu'on note encore*

$$G.x = x \pmod{G}.$$

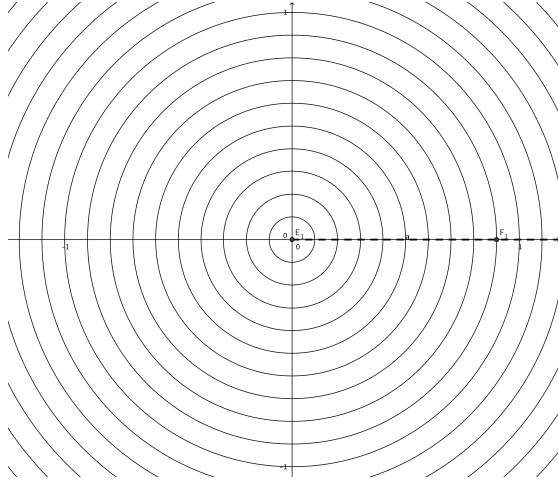
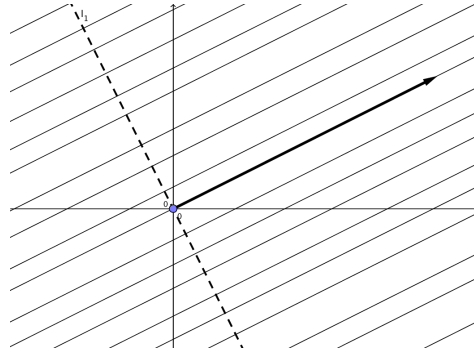
*Si  $X \curvearrowright G$  agit a droite, l'orbite de x sera notee  $x.G$  et l'espace des orbites  $X/G$ .*

EXEMPLE 4.1. Soit  $G = \text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}^+$  le groupe des rotations centrees en  $\mathbf{0}$  agissant sur  $X = \mathbb{R}^2$ . Ses orbites sont les cercle centres en  $\mathbf{0}$ . L'ensemble des orbites  $G \backslash X$  s'identifie avec la demi-droite  $\mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0)$  (ou avec n'importe quelle demi-droite partant de  $(0, 0)$ ).

EXEMPLE 4.2. Soit  $G = \mathbb{R} \cdot (2, 1)$  le groupe des multiples du vecteur  $(2, 1)$ ; ce groupe agit sur  $X = \mathbb{R}^2$  par translations; ses orbites sont les droites de direction le vecteur  $(2, 1)$ . L'ensemble des orbites  $G \backslash X$  s'identifie avec la droite  $\mathbb{R}(1, -2)$  (ou avec n'importe quelle droite non-parallele a  $(2, 1)$ ).

EXEMPLE 4.3. Soit  $X = \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 1$  et  $G = (q\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Z}, +)$  le sous-groupe des entiers divisible par  $q$ . Le groupe  $q\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{Z}$  par translation (a droite ou a gauche cela n'a pas d'importance car  $\mathbb{Z}$  est commutatif)

$$(qm, n) \mapsto qm + n = n + qm.$$

FIGURE 1. Orbites de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_0^+ \curvearrowright \mathbb{R}^2$ .FIGURE 2. Orbites de  $\mathbb{R} \cdot (2, 1) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ .

Les orbites pour cette action sont les sous-ensembles de la forme

$$n + q\mathbb{Z} = \{n + qm, m \in \mathbb{Z}\}$$

pour  $n$  variant dans  $\mathbb{Z}$ . On a l'équivalence

$$n' \in n + q\mathbb{Z} \iff n' = n + qm, m \in \mathbb{Z} \iff q|n' - n \iff q|n - n' \iff n \in n' + q\mathbb{Z}.$$

On dit alors que  $n'$  est congru à  $n$  modulo  $q$  et on l'écrit  $n' \equiv n \pmod{q}$ .

Comme la relation  $x \sim_G x'$  est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalences sont les différentes  $G$ -orbites on a

**THÉORÈME 1.2** (Disjonction et partition des orbites). *Soit  $G \curvearrowright X$  un  $G$  ensemble et  $x, x' \in X$ .*

*Si  $G.x$  et  $G.x'$  sont deux  $G$ -orbites alors*

$$G.x \cap G.x' \neq \emptyset \iff G.x = G.x'$$

*(ou de manière équivalente*

$$G.x \cap G.x' = \emptyset \iff G.x \neq G.x'.$$

En particulier

$$x' \in G.x \Leftrightarrow G.x' = G.x.$$

En d'autres termes deux  $G$ -orbites distinctes sont disjointes et comme tout élément  $x \in X$  est contenu dans au moins une  $G$ -orbite (la sienne  $G.x$ ), l'ensemble des  $G$ -orbites de  $X$  forme une partition de  $X$ :

$$X = \bigsqcup_{\mathcal{O} \in G \backslash X} \mathcal{O}.$$

C'est une conséquence d'un résultat général sur les relations d'équivalences sur un ensemble mais on peut retrouver cela directement à partir des définitions de l'action d'un groupe:

PREUVE. Si  $G.x = G.x'$  alors évidemment  $G.x \cap G.x' = G.x \neq \emptyset$ . Réciproquement supposons que  $G.x \cap G.x' \neq \emptyset$  et soit  $y$  dans l'intersection:

$$y = g.x = g'.x' \Rightarrow g^{-1}.y = g^{-1}(g.x) = g^{-1}(g'.x') \Rightarrow x = (g^{-1}.g').x' \in G.x'$$

de sorte que

$$G.x \subset G.(G.x') = (G.G).x' = G.x'$$

et de même  $G.x' \subset G.x$ .

Tout élément de  $x$  est contenu dans une orbite (la sienne,  $G.x$  car  $e_G.x = x$  !) de sorte que

$$X = \bigcup_{\mathcal{O} \in G \backslash X} \mathcal{O}$$

mais les orbites distinctes sont disjointes donc cette réunion est une partition.  $\square$

COROLLAIRE 1.1 (Formule des classes). Si  $X$  est un ensemble fini

$$|X| = \sum_{\mathcal{O} \in G \backslash X} |\mathcal{O}|.$$

**4.1. Exemple: le Théorème de Lagrange.** Le théorème de Lagrange est une application de la notion d'action de groupe pour l'action d'un groupe sur lui-même par translations à gauche ou à droite.

Soit  $H \subset G$  un sous-groupe de  $(G, \cdot)$ , alors  $H$  agit sur  $G$  par translations à gauche (resp. à droite):

$$h \in H \mapsto a_l(h) : g \mapsto h.g \quad (\text{resp. } a_r(h) : g \mapsto g.h).$$

DÉFINITION 1.2. L'espace des orbites de  $G$  sous l'action de  $H$  par translations à gauche (resp. à droite) est noté  $H \backslash G$  (resp.  $G/H$ ) et est appelé quotient à gauche (resp. à droite) de  $G$  par le sous-groupe  $H$ .

- Une orbite pour l'action à gauche  $H.g$  s'appelle également une classe à gauche (de  $g$ ).
  - Une orbite pour l'action à droite  $g.H$  s'appelle également classe à droite (de  $g$ ).
- Le cardinal  $|H \backslash G|$  s'appelle l'indice de  $H$  dans  $G$  et se note  $[G : H]$ .

EXERCICE 1.6. Montrer que l'application

$$g.H \mapsto H.g^{-1}$$

est une bijection de  $G/H$  sur  $H \backslash G$ .



**THÉORÈME 1.3** (Theoreme de Lagrange). *Supposons que  $H$  soit fini, alors toutes les orbites de  $H \setminus G$  (ou des  $G/H$ ) ont meme cardinal egal a  $|H|$ . Si de plus  $G$  est fini alors on a*

$$|G| = |H||H \setminus G| = |H||G/H|.$$

*En particulier l'ordre de  $H$  divise l'ordre de  $G$  et*

$$|G/H| = |H \setminus G| = |G|/|H|.$$

**PREUVE.** Supposons  $H$  fini. Soit  $\mathcal{O} = H.g$  une orbite. Comme L'application de translation a a droite par  $g$

$$g' \in G \mapsto g'.g \in G$$

est injective et que l'image de  $H$  par cette application est  $H.g$ , on a  $|H.g| = |H|$  et donc toutes les orbites sont de la meme taille.

Par la formule des classes on a alors

$$|G| = \sum_{\mathcal{O} \in H \setminus G} |\mathcal{O}| = \sum_{\mathcal{O} \in H \setminus G} |H| = |H \setminus G|. |H|$$

(cette formule est valable pour  $|G|$  fini ou infini). □

**4.2. Domaine fondamental.** Pour comprendre la structure d'un espace des orbites, il est souvent utile d'avoir recourt a un sous-ensemble de  $X$  en bijection avec  $G \setminus X$

**DÉFINITION 1.10.** *Soit  $G \curvearrowright X$  un  $G$ -ensemble; un domaine fondamental pour l'action de  $G$  est un sous-ensemble*

$$\mathcal{D}_G \subset X$$

*tel que l'application*

$$x \in \mathcal{D}_G \mapsto G.x \in G \setminus X$$

*est bijective: pour tout  $\mathcal{O}$  il existe un unique  $x \in \mathcal{D}_G$  tel que  $\mathcal{O} = G.x$ .*

*Un domaine fondamental s'appelle egalement "systeme de representants des differentes orbites".*

**REMARQUE 4.1.** Un domaine fondamental n'est pas uniquement definit.

**EXEMPLE 4.4.** Toute demi-droite d'extremite  $(0, 0)$ , par exemple  $\mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0)$ , est domaine fondamental de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}^+ \curvearrowright \mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLE 4.5.** toute droite non-parallele au vecteur  $(2, 1)$  est un domaine fondamental pour  $\mathbb{R}(2, 1) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ .

**EXERCICE 1.7.** Soit  $\mathbb{Z}$  agissant sur  $\mathbb{R}$  par translations: montrer que  $[0, 1[$  est un domaine fondamental.

**EXERCICE 1.8.** Soit  $\mathbb{Z}^2$  agissant sur  $\mathbb{R}^2$  par translations: montrer que  $[0, 1]^2$  est un domaine fondamental.

**EXERCICE 1.9.** Soit  $q \geq 1$  et le sous-groupe  $q\mathbb{Z}$  agissant sur  $\mathbb{Z}$  par translations: montrer que  $\{0, 1, \dots, q-1\}$  est un domaine fondamental.

### 5. Espace quotient et quotient de groupes

On va maintenant donner un résultat important concernant la structure des orbites d'une action de groupe:

**THÉORÈME 1.4** (Theoreme Orbite/stabilisateur). *Soit  $X$  un  $G$  ensemble et  $x \in X$  un element. On note son orbite  $\mathcal{O} = G.x \in G \setminus X$  et on note  $G_x$  le stabilisateur de  $x$  dans  $G$ .*

*L'application*

$$(5.1) \quad g.G_x \in G/G_x \mapsto g.x \in \mathcal{O}$$

*défini une bijection entre l'ensemble (des  $G_x$ -orbites de  $G$  pour la multiplication à droite)*

$$G/G_x = \{g.G_x, g \in G\}$$

*et la  $G$ -orbite*

$$\mathcal{O} = G.x.$$

*De plus si  $x' \in \mathcal{O}$  est dans l'orbite de  $x$  alors son stabilisateur  $G_{x'}$  est conjugué à celui de  $x$  et lui est donc isomorphe; ainsi  $G_x$  et  $G_{x'}$  ont le meme même cardinal.*

*En particulier si  $X$  et  $G$  sont finis on a*

$$|G.x| = |G/G_x| = |G|/|G_x|.$$

**PREUVE.** Notons qu'une orbite  $g.G_x$  peut-etre representee de multiples manieres: si  $g'$  appartient a  $g.G_x$ , on a

$$g.G_x = g'.G_x;$$

hors, l'application 5.1 semble dependre du choix de  $g$ : montrons que ce n'est pas le cas. soit  $g' \in g.G_x$ , on a par definition  $g' = g.g_x$  avec  $g_x \in G_x$  et donc

$$g'.x = (g.g_x).x = g.(g_x.x) = g.x.$$

cette application est surjective: prenons  $x' \in \mathcal{O} = G.x$  alors  $x' = g.x$  et est l'image par 5.1 de l'orbite a droite  $g.G_x$ .

Montrons qu'elle est injective: supposons que

$$g.x = g'.x$$

on a

$$x = g^{-1}.g'.x \text{ et donc } g^{-1}.g' \in G_x \text{ et donc } g' \in g.G_x.$$

En d'autre termes  $g'.G_x = g.G_x$ .

Soit  $x' \in \mathcal{O}$ , on a  $x' = g.x$ : soit  $g' \in G_{x'}$ , on a

$$g'.x' = x' \Leftrightarrow g'.g.x = g.x \Leftrightarrow g^{-1}.g'.g.x = x \Leftrightarrow g^{-1}.g'.g \in G_x.$$

Ainsi

$$G_{x'} = g.G_x.g^{-1}.$$

□

**5.1. Exemple: existence de points fixes.** La formule des classes permet également (sous certaines conditions) de montrer que l'action d'un groupe sur un ensemble admet des points fixes. Voici un cas parmi d'autres

PROPOSITION 1.2. *Soit  $X$  un ensemble fini et  $\sigma \in \text{Bij}(X)$  une involution (une bijection telle que  $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \text{Id}_X$ ). Si  $X$  est impair alors  $\sigma$  admet un point fixe: il existe  $x \in X$  tel que*

$$\sigma(x) = x.$$

**Preuve:** Si  $\sigma = \text{Id}_X$  c'est évident. Sinon on considère le groupe d'ordre 2 engendré par  $\sigma$

$$G = \sigma^{\mathbb{Z}} = \{\text{Id}_X, \sigma\} \in \text{Bij}(X).$$

Les orbites de  $X$  sous l'action de  $G$  sont de cardinal 1 ou 2:

$$\forall x \in X, G.x = \{x, \sigma(x)\}$$

et une orbite  $G.x$  est de cardinal 1 ssi  $\sigma(x) = x$  c'est à dire ssi  $x$  est un point fixe pour  $\sigma$ . Il suffit de montrer qu'il existe une orbite d'ordre 1. Si ce n'était pas le cas toutes les orbites seraient d'ordre 2 et par la formule des classes on aurait

$$|X| = \sum_{\mathcal{O} \in H \setminus G} |\mathcal{O}| = \sum_{\mathcal{O} \in H \setminus G} 2$$

serait pair. Contradiction □

Une application frappante de ce résultat la preuve élémentaire due à D. Zagier de la partie difficile du Théorème de Fermat:

THÉORÈME 1.5 (Fermat). *Soit  $p$  un nombre premier impair alors  $p$  est somme de deux carrés d'entiers, cad. il existe  $a, b \in \mathbb{Z}^2$  tels que*

$$p = a^2 + b^2$$

ssi  $p \equiv 1 \pmod{4}$  (ie.  $4|p-1$ ).

La partie difficile est de montrer que si  $p \equiv 1 \pmod{4}$  alors  $p$  est somme de deux carrés d'entiers. **Preuve:** (Zagier) Il "suffit" de considérer l'ensemble

$$R_p = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3, p = x^2 + 4yz\},$$

de montrer qu'il est fini et d'ordre impair. Alors l'involution

$$\sigma : (x, y, z) \in R_p \mapsto (x, y, z) \in R_p$$

admet un point fixe qui est de la forme  $(x, y, y)$  et on a donc

$$p = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2.$$

□

EXERCICE 1.10. Comblé les trous de cette démonstration notamment en trouvant une involution sur  $R_p$  qui ne possède qu'un seul point fixe.

EXERCICE 1.11. Montrer plus généralement le théorème fondamental suivant

THÉORÈME 1.6. *Soit  $G \curvearrowright X$  un groupe fini d'ordre premier  $p$  agissant sur un ensemble fini. Si  $p$  ne divise pas le cardinal de  $X$  alors l'action de  $G$  sur  $X$  admet un point fixe: il existe  $x \in X$  tel que*

$$\forall g \in G, g.x = x.$$

**5.2. Transitivite d'une action.** soit  $G \curvearrowright X$ , on discute des deux cas extremes possibles pour une orbite  $G.x$ :

$$G.x = \{x\}, \quad G.x = X.$$

dans

DÉFINITION 1.11. Soit  $G \curvearrowright X$  un  $G$ -ensemble. Un element  $x \in X$  est un point fixe sous l'action de  $G$  si l'orbite de  $x$  est reduite a  $\{x\}$ :

$$G.x = \{x\}.$$

DÉFINITION 1.12. Si  $G \curvearrowright X$  n'a qu'une seule orbite (il existe  $x \in G$  tel que  $X = G.x$  et donc pour tout  $x', X = G.x'$ ) on dit que  $G$  agit transitivement sur  $X$ . On dit que  $X$  est un espace homogene sous l'action de  $G$ .

EXEMPLE 5.1. Soit  $X$  un  $G$  ensemble et  $x \in X$  alors  $G$  agit transitivement sur la  $G$ -orbite  $G.x$ :

$$g.(g'.x) = (g.g').x \in G.x.$$

Si  $G$  agit transtivement sur  $X$ , on a (par le Theoreme Orbite/Stabilisateur) pour tout  $x \in X$

$$X = G.x \simeq G/G_x$$

et tous les stabilisateurs  $G_x$ ,  $x \in X$  sont conjuges.

**5.3. 2-transitivité.** Un renforcement de la notion de transitivite est la notion de 2-transitivite: si  $G$  agit sur  $X$  alors  $G$  agit sur le produit  $X^2 = X \times X$  par

$$\begin{aligned} G \times X^2 &\mapsto X^2 \\ (g, (x, x')) &\mapsto (g.x, g.x') \end{aligned}$$

La diagonale de  $X \times X$  est definie comme le sous-ensemble

$$\Delta_X = \{(x, x), x \in X\} \subset X \times X.$$

est stable sous cette action

$$g.(x, x) = (g.x, g.x) \in \Delta_X.$$

En fait  $X$  et  $\Delta_X$  sont en bijection ( $\delta : x \mapsto (x, x)$ ) et cette bijection est compatible avec l'action de  $G$ :

$$g.\delta(x) = g.(x, x) = (g.x, g.x) = \delta(g.x).$$

Ainsi comme  $G$  laisse stable  $\Delta_X$ , il laisse stable le complement de la diagonale

$$X \times X - \Delta_X = \{(x, x'), x, x' \in X, x \neq x'\}.$$

En effet si  $x \neq x'$  alors  $g.x \neq g.x'$  (puisque l'action par  $g$  est une bijection donc injective)

DÉFINITION 1.13. On dit que l'action de  $G$  sur  $X$  est 2-transitive si l'action induite de  $G$  sur  $X \times X - \Delta_X$  est transitive. Autrement dit si

$$\forall x, x', y, y' \in X, x \neq x', y \neq y', \text{ il existe } g \in G \text{ tel que } g.x = y, g.x' = y'.$$

En fait la notion de 2-transitivité est plus forte que la transitivité

PROPOSITION 1.3. Si  $G$  agit 2-transitivement sur  $X$  alors  $G$  agit transitivement sur  $X$ .

PREUVE. Si  $X$  ne contient qu'un seul element ( $X \times X - \Delta_X = \emptyset$ ) il n'y a rien a dire l'action est transitive. Soit  $x, x' \in X$ , si  $x = x'$  alors  $e_G.x = x$ . Supposons donc que  $x \neq x'$  alors  $(x, x')$  et  $(x', x)$  appartiennent a  $X \times X - \Delta_X$  et par 2-transitivité il existe  $g \in G$  tel que

$$g(x, x') = (g.x, g.x') = (x', x)$$

et en particulier  $g.x = x'$ . □

REMARQUE 5.1. Ainsi si un groupe  $G$  agit 2-transitivement sur  $X$  son action induite sur  $X \times X$  possède 2 orbites

$$\Delta_X \text{ et } X \times X - \Delta_X.$$

REMARQUE 5.2. La notion de 2-transitivité est beaucoup plus forte que la simple transitivité: comme on l'a vu dans la preuve elle montre que si  $x, x'$  sont distincts il existe  $g \in G$  qui "echange"  $x$  et  $x'$ :

$$g.x = x', \quad g.x' = x.$$

On pourrait de même définir la 3, 4, et  $n$ -transitivité...

EXEMPLE 5.2. Le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  agit transitivement sur  $\mathbb{R}^2$  mais pas 2-transitivement: en effet deux points distincts sont envoyés par toute isometrie sur deux points distincts mais les images doivent être a même distance que la distance entre les deux points originaux. En fait c'est la seule obstruction:

EXERCICE 1.12. Montrer que le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  agit transitivement sur l'ensemble des paires de points de  $\mathbb{R}^2$  a distance 1 l'un de l'autre.

$$(P, Q) \in \mathbb{R}^2, \quad d(P, Q) = 1.$$

Est ce que le sous-groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$  agit 2-transitivement ?

## 6. La formule des points fixes (de Burnside)

THÉORÈME 1.7 (Formule de Burnside). Soit  $G$  un groupe fini et  $G \curvearrowright X$  un  $G$ -ensemble fini. Soit

$$X^g = \{x \in X, \quad g.x = x\}$$

l'ensemble des points fixes de  $G$ , on a

$$|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| :$$

le nombre d'orbites de  $G$  dans  $X$  est la valeur moyenne du nombre de points fixes des element de  $G$ .

PREUVE. Soit

$$S = \{(g, x) \in G \times X, \quad g.x = x\}.$$

On a

$$|S| = \sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{\mathcal{O}} \sum_{x \in \mathcal{O}} |G_x|$$

car les orbites forment une partition de  $X$ . On a vu dans le theoreme 1.4 que étant donné une orbite  $\mathcal{O}$ , l'application  $x \in \mathcal{O} \mapsto |G_x|$  est constante égale a

$$|G_x| = |G|/|\mathcal{O}|$$

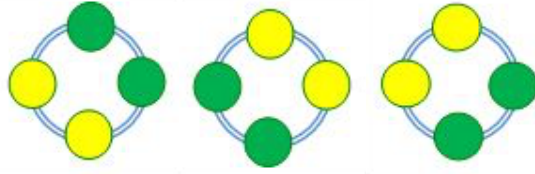


FIGURE 3. Un modele de collier a deux perles vertes et deux perles jaunes

et donc

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} |G_x| = \sum_{x \in \mathcal{O}} |G|/|\mathcal{O}| = |G||\mathcal{O}|/|\mathcal{O}| = |G|.$$

Ainsi

$$\sum_{\mathcal{O}} \sum_{x \in \mathcal{O}} |G_x| = |G| \sum_{\mathcal{O}} 1 = |G||G \setminus X|$$

et donc

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = |G \setminus X|.$$

□

REMARQUE 6.1. Cette formule (ou encore Lemme de Burnside) n'est pas vraiment due a Burnside; c'est une manifestation du phenomene qui veut que l'on ne prete qu'aux riche. Cette formule est mentionnee dans son livre (un grand classique) de 1897 sur la theorie des groupes finis il l'attribue a Frobenius (1887) mais elle etait deja connue (sous une forme plus obscure) de Cauchy au moins des 1845. On l'appelle egalement le "*Lemme qui n'est pas de Burnside !*"

**6.1. Application au secteur de la haute joaillerie.** Nous utiliserons cette formule pour classifier sous-groupes finis de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  ainsi que les solides platoniciens.

Nous allons voir maintenant comment cette formule permet de resoudre des problemes de combinatoire, notamment le comptage de colliers: nous sommes dans une usine fabriquant des colliers de perles colorees; pour des questions de marketing on veut savoir combien de modeles de colliers differents on peut presenter.

Supposons qu'on veuille fabriquer des colliers de 4 perles de couleurs jaunes et vertes. Pour cela on considere les quatre sommets d'un carre (qu'on appelle par exemple  $1, i, -1, -i$ ) que l'on va colorer soit en vert soit en jaune.

Dans le processus, il est clair qu'on obtiendra des modeles de colliers identiques meme si les sommets colories sont differents: par exemple dans les deux figures ci-dessous (colliers avec 2 perles vertes et 2 jaunes ou bien 1 perle verte et 3 jaunes) les trois coloriations fournissent le meme modele de collier.

Pour formaliser cela on defini un coloriage (des sommets d'un carre par les deux couleurs jaune et vert) comme etant une fonction

$$c : \{1, i, -1, -i\} \mapsto \{J, V\}$$

qui assigne au sommet  $s \in \{1, i, -1, -i\}$  la couleur  $c(s) \in \{J, V\}$ .

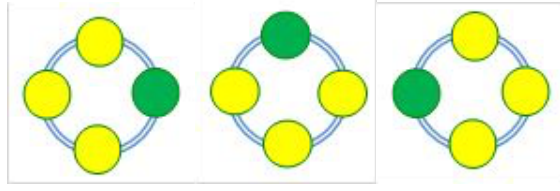


FIGURE 4. Un modele de collier a une perle verte et trois perles jaunes

On note  $\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})$  l'ensemble de toutes ces fonctions. C'est un ensemble fini de cardinal

$$|\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})| = |\{J, V\}|^{|\{1, i, -1, -i\}|} = 2^4.$$

Considerons  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{C_4}$  le groupe des isometries du carre

$$C_4 = [1, i, -1, -i].$$

Ce groupe agit (a droite) sur l'espace des coloriage par permutation: si  $\varphi$  est une telle isometrie elle induit une permutation des sommets du carre et on defini un nouveau coloriage en posant pour  $x \in \{1, i, -1, -i\}$

$$c|_{\sigma}(s) = c(\sigma(s)).$$

Comme on permute les sommets du carre a l'aide d' isometries preservant les sommets (une rotation qui "fait tourner" le collier autour de l'axe perpendiculaire a son plan ou bien une symetrie axiale qui "retourne" le collier dans l'espace) le nouveau coloriage obtenu correspondra au meme modele de collier.

En d'autre termes *deux coloriage c correspondent au meme collier si ils sont dans la meme orbite sous l'action de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{C_4}$ .*

Le nombre de colliers possibles (a 4 perles et 2 couleurs)  $C(4, 2)$  est donc egal au nombres d'orbites de cette action. Pour compter le nombre d'orbites on utilise la formule de Burnside:

$$C(4, 2) = \frac{1}{8} \sum_{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{C_4}} |\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})^{\varphi}|.$$

Rappelons que ce groupe est dihedral d'ordre 8 compose de 4 rotations (d'ordre 1, 2, 4 et 4) et 4 symetries axiales (2 d'axes passant par les diagonales et 2 d'axes passant par les milieux des cotes opposes).

(1) Si  $\varphi = \text{Id}$ , on a

$$|\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})^{\varphi}| = 2^4$$

car tout les coloriage sont fixes par l'identite.

(2) Si  $\varphi = r_4$  est une des deux rotations d'ordre 4, on a

$$|\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})^{r_4}| = 2$$

car si on choisit une couleur pour le sommet 1 et que le coloriage est fixe, tous les sommet seront de cette couleur.

(3) Si  $\varphi = r_2$  est la rotation d'ordre 2, on a

$$|\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})^{r_2}| = 2^2$$

car si on choisit une couleur parmi 2 pour le sommet 1 et une pour le sommet  $i$  et que le coloriage est fixe par  $r_2$ , alors  $-1$  sera de la couleur de 1 et  $-i$  de celle de  $i$ .

(4) Si  $\varphi = \sigma_D$  est une des deux symetries d'axe une des diagonales, on a

$$|\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})^{\sigma_D}| = 2^3$$

car on peut choisir un couleur par sommet de la diagonale et une couleur commune pour les deux sommets de part et d'autre de la diagonale.

(5) Si  $\varphi = \sigma_M$  est une des deux symetries d'axe passant par les milieux des cotes opposes, on a

$$|\mathcal{F}(\{1, i, -1, -i\}, \{J, V\})^{\sigma_M}| = 2^2$$

car on peut choisir pour chaque sommet d'un cote de l'axe une couleur parmi 2 et le sommet symetrique sera de la meme couleur.

On obtient donc

$$C(4, 2) = \frac{1}{8}(2^4 + 2 \times 2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 2 \times 2^2) = \frac{1}{8}(16 + 4 + 4 + 16 + 8) = 6.$$

Voici les 6 modeles possibles

$$(V, V, V, V), (J, J, J, J), (V, V, V, J), (J, J, J, V), (V, V, J, J), (V, J, V, J).$$

Bien sur on aurait pu faire le decompte a la main mais l'avantage de cette methode est qu'elle peut mecaniquement donner une formule pour des configurations plus compliquees de colliers et de couleurs. Par exemple une formule generale pour

$$C(4, c)$$

pour tout entier  $c \geq 1$ .

EXERCICE 1.13. Calculer  $C(5, 12)$  ou  $C(6, 5)$  de la meme maniere.

Nous verrons en exercice d'autres exemples similaires ainsi que des applications (plus scientifiques) pour calculer le nombre de molecules isomeres (chirales ou pas) d'une molecule donnee.

## 7. Groupe quotient

Soit  $G$  un groupe et  $H \subset G$  un sous-groupe. Sous certaines conditions sur  $H$  on peut donner a l'espace des orbites (a droite pour fixer les idees)  $G/H$  une structure de groupe compatible avec celle de  $G$ : ie. de sorte que la surjection naturelle

$$\text{red}_H : \begin{array}{l} G \mapsto G/H \\ g \mapsto g.H = g \pmod{H} \end{array}$$

qui a un element  $G$  associe son orbite soit un morphisme de groupe. Notons  $\star$  une telle loi. Si cette loi existe, on doit avoir

(1) l'element neutre de  $G/H$  pour cette loi devrait etre

$$\text{red}_H(e_G) = H,$$

(2)  $\forall g, g' \in G$

$$g.H \star g'.H = g.g'.H,$$

(3)  $\forall g \in G$ ,

$$(g.H)^{-1} = g^{-1}.H,$$

(4) Le noyau du morphisme  $\text{red}_H$  etant

$$\ker(\text{red}_H) = \{g \in G, \text{red}_H(g) = g.H = H\} = H,$$

il s'ensuit que  $H$  doit etre un sous-groupe normal de  $G$ .



On va montrer que si  $H \triangleleft G$ , les quotients  $G/H$  et  $H \setminus G$  admettent de telles lois de groupe. Définissons maintenant un candidat naturel pour cette loi. L'ensemble

$$G/H = \{g.H, g \in G\}$$

est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de  $G$ ,  $\mathcal{P}(G)$  et ce dernier ensemble admet une loi de composition naturelle donnée par la multiplication dans le groupe: à deux sous-ensembles  $A, B \subset G$ , on associe le produit  $A.B$  forme de l'ensemble de tous les produits d'éléments de  $A$  et d'éléments de  $B$ ,

$$A.B := \{a.b, a \in A, b \in B\} \subset \mathcal{P}(G).$$

Un "inverse" naturel serait donné par

$$A^{-1} = \{a^{-1}, a \in A\}.$$

Cette loi est associative

$$(A.B).C = A.(B.C).$$

Notons que l'ensemble

$$A.A^{-1} = \{a.a'^{-1}, a, a' \in A\}$$

peut varier avec l'ensemble  $A$  et donc on ne peut espérer disposer d'un élément neutre (voir le Lemme ci-dessous) Ainsi cette "loi" n'a pas beaucoup de chance d'être une loi de groupes de l'ensemble complet  $\mathcal{P}(G)$ .

Considérons cette loi mais restreinte au sous-ensemble  $G/H$ : on

LEMME 1.1. *Soit  $H \subset G$  un sous-groupe alors*

$$H^{-1} = H, H.H = H.$$

**Preuve:** La première égalité est évidente car un groupe est invariant par inversion. Pour la seconde égalité on a

$$\forall h, h' \in H, h.h' \in H$$

donc

$$H.H \subset H$$

et

$$H = \{e_G\}.H \subset H.H.$$

□

Ainsi pour  $H$  un sous-groupe,  $H = e_G.H \in G/H$  a une bonne chance d'être l'élément neutre du quotient  $G/H$  pour cette loi de composition.

Pour l'inversion on a pour tout  $g \in G$

$$(g.H)^{-1} = H^{-1}.g^{-1} = H.g^{-1}.$$

Pour avoir une loi de groupe, il est nécessaire que cet ensemble  $H.g^{-1}$  soit de la forme  $g'.H$ ; supposons que ce soit le cas, on doit alors avoir

$$g.H.H.g^{-1} = e_{G/H} = H \implies gHg^{-1} = H \iff H \text{ est distingué}$$

car  $H.H = H$ . Notons alors que dans ce cas on a

$$(7.1) \quad H.g^{-1} = g^{-1}.g.H.g^{-1} = g^{-1}.H.$$

Ainsi on a trouvé une condition nécessaire pour ce le produit d'ensemble soit une loi de groupe sur  $G/H$ :  $H$  est distingué. Le Théorème suivant dit que cette condition est suffisante.

THÉORÈME 1.8 (Existence du groupe quotient). *Soit  $H \triangleleft G$  un sous-groupe distingué de  $G$  alors le quotient  $G/H$  munis de la loi de multiplication des ensemble*

$$gH.g'H = \{a.b, a \in g.H, b \in g'.H\}$$

*a une structure de groupe telle que  $\text{red}_H : G \mapsto G/H$  est un morphisme surjectif de groupe et dont le noyau est  $H$ :*

$$\ker(\text{red}_H) = H.$$

*En particulier l'élément neutre de  $G/H$  est  $H$ , l'inverse de  $gH$  est  $g^{-1}H$  et on a*

$$g.H.g'.H = g.g'.H.$$

*Le groupe  $G/H$  ainsi obtenu s'appelle le groupe quotient de  $G$  par  $H$ .*

REMARQUE 7.1. On a vu qu'un noyau  $\ker \phi$  d'un morphisme de groupes  $\phi : G \rightarrow G'$  est un sous-groupe distingué.

Reciproquement tout groupe distingué  $H \triangleleft G$  est le noyau d'un morphisme: c'est le noyau du morphisme  $\text{red}_H : G \mapsto G/H$ .

**Preuve:** Supposons que  $H$  est distingué dans  $G$ . Nous devons vérifier les quatre conditions qui font de  $(G/H, \cdot)$  un groupe

- (1) On a bien une loi de composition dans  $G/H$ : si  $g, g' \in G$  alors l'ensemble produit  $g.H.g'.H$  est de la forme  $g''.H$ : en effet

$$g.H.g'.H = g.g'.g'^{-1}.H.g'.H = g.g'.H.H = g.g'.H \text{ car } g'^{-1}.H.g' = H,$$

- (2) On a vu que cette loi est associative.  
 (3)  $H$  est l'élément neutre:

$$\forall g \in G, g.H.H = g.H, H.g.H = g.g^{-1}.H.g.H = g.H.H = g.H \text{ ( car } g^{-1}.H.g = H).$$

- (4) Existence d'un inverse: pour tout  $g \in G$ , l'inverse de  $g.H$  est donné par (7.1),

$$(g.H)^{-1} = g^{-1}.H$$

qui appartient bien à  $G/H$  car on a (à nouveau le calcul précédent)

$$g.H(g.H)^{-1} = g.H.g^{-1}.H = g.g^{-1}.H = H.$$

Le fait que  $\text{red}_H$  soit un morphisme de groupe résulte des formules précédentes:

$$\forall g, g' \in G, \text{red}_H(g).\text{red}_H(g') = g.H.g'.H = g.g'.H = \text{red}_H(g.g').$$

Cette application est surjective et comme  $H$  est un groupe

$$g.H = H \iff g = g.e_G \in H \text{ et } g.H = H.$$

donc son noyau est  $H$ . □

EXERCICE 1.14. Montrer que si  $H \triangleleft G$ , l'ensemble des classes à gauche  $H \backslash G = \{H.g, g \in G\}$  admet une structure de groupe induite par la multiplication dans  $G$ .

EXERCICE 1.15. Montrer que les groupes  $G/H$  et  $H \backslash G$  sont isomorphes.

REMARQUE 7.2. Si  $G$  est un groupe abélien tout sous-groupe  $H \subset G$  est distingué et le groupe quotient  $G/H$  a toujours une structure de groupe donnée par

$$g.H.g'.H = gg'.H.$$

EXEMPLE 7.1. Un exemple important de groupe quotient d'un groupe abelien est le groupe de l'horloge note au depart  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  qu'on a definit comme l'ensemble des entiers

$$\{0, 1, \dots, N - 1\}$$

munis de l'addition

$$m \oplus m' = \text{reste de la division euclidienne de } m + m' \text{ par } N.$$

On a la

PROPOSITION 1.4. *L'application*

$$m \in \{0, 1, \dots, N - 1\} \mapsto m + N\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

est un isomorphisme entre le groupe de l'horloge et le groupe quotient de  $\mathbb{Z}$  par le sous-groupe  $N\mathbb{Z}$  justifiant ainsi la notation  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  pour le groupe de l'horloge.

### 7.1. Le Theoreme Noyau-Image.

THÉOREME 1.9 (Theoreme Noyau-Image). *Soit  $\phi : G \mapsto G'$  un morphisme de groupes de noyau  $H = \ker(\phi) \subset G$  et d'image  $H' = \text{Im}(\phi) \subset G'$ . Alors  $\phi$  induit un isomorphisme de groupes*

$$\phi_H : G/H \simeq H'$$

defini par

$$\phi_H(g.H) = \phi(g).$$

En particulier si  $G'$  est fini,  $G/H$  est fini ( $H$  est d'indice fini dans  $G$ ) et on a

$$|G/H| = |H'|.$$

En particulier si  $G$  est fini on a (par le Theoreme de Lagrange)

$$|G|/|H| = |G/H| = |H'|.$$

PREUVE. Soit  $\phi_H$  l'application donnee par la regle

$$\phi_H : \begin{array}{ccc} G/H & \mapsto & H' \\ gH & \mapsto & \phi(g) \end{array}$$

cette application est bien definie: si  $gH = g'H$ , on a  $g' = gh$  pour un certain  $h \in H$  et

$$\phi_H(g'H) = \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(g).$$

Par ailleurs  $\phi_H$  est d'image  $H'$ : pour tout  $h' \in H'$ , il existe  $g \in G$  tel que  $\phi(g) = h'$  et donc

$$\phi_H(g.H) = \phi(g) = h'.$$

Enfin c'est un morphisme de groupe car

$$\forall g, g' \in G, \phi_H(g.H.g'.H) = \phi_H(g.g'.H) = \phi(g).\phi(g') = \phi_H(g.H)\phi_H(g'.H).$$

Montrons que  $\phi_H$  est injectif: on a

$$\phi_H(gH) = e_{G'} \Leftrightarrow \phi(g) = e_{G'} \Leftrightarrow g \in \ker \phi = H \Leftrightarrow gH = H = e_{G/H}.$$

Donc  $\phi_H$  est un morphisme de groupes bijectif sur son image, sa reciproque est donc automatiquement un morphisme de groupes et  $\phi_H$  est donc un isomorphisme de groupes entre  $G/H$  et  $H'$ .  $\square$

## 7.2. Groupes quotients et morphismes de groupes.

THÉORÈME 1.10 (Propriété universelle des groupes quotients). *Soit  $G$  un groupe et  $H \subset G$  un sous-groupe distingué et  $G'$  un autre groupe. Il existe une bijection entre les ensembles suivants*

- (1) *L'ensemble des morphismes  $\phi : G \rightarrow G'$  tels que  $H \subset \ker(\phi)$ .*
- (2) *L'ensemble des morphismes  $\phi_H : G/H \rightarrow G'$ .*

*Cette bijection est donnée par*

$$\Psi : \phi_H \mapsto \phi := \phi_H \circ \text{red}_H.$$

*en d'autres termes étant donné  $\phi_H \in \text{Hom}_{Gr}(G/H, G')$  on a*

$$\Psi(\phi_H)(g) := \phi(g) = \phi_H(g.H).$$

**Preuve:** Soit  $\phi_H \in \text{Hom}_{Gr}(G/H, G')$  et soit  $\phi := \Psi(\phi_H)$  défini par

$$\phi(g) = \phi_H(\text{red}_H(g)) = \phi_H(g.H).$$

Comme  $\phi$  est le composé de deux morphismes de groupes c'est un morphisme de groupes de plus

$$\forall h \in H, \phi(h) = \phi_H(H) = \phi_H(e_{G/H}) = e_{G'}$$

donc

$$H \subset \ker(\phi).$$

Pour montrer que  $\Psi$  est une bijection il suffit de montrer qu'elle admet une application réciproque. Soit  $\Psi'$  l'application qui à un morphisme  $\varphi : G \rightarrow G'$  tel que  $H \subset \ker \varphi$  associe l'application

$$\Psi'(\varphi) : G/H \rightarrow G'$$

définie par

$$\Psi'(\varphi)(g.H) = \varphi(g).$$

Vérifions que  $\Psi'(\varphi)$  est bien définie: si  $gH = g'H$  alors  $\varphi(g) = \varphi(g')$ . C'est bien le cas car il existe  $h \in H$  tel que  $g' = gh$  et

$$\varphi(g') = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)$$

car  $h \in \ker \varphi$ . Par ailleurs  $\Psi'(\varphi)$  est un morphisme de groupes:  $\forall gH, g'H \in G/H$ , on a

$$\Psi'(\varphi)(gH \star g'H) = \Psi'(\varphi)(gg'H) = \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = \Psi'(\varphi)(gH)\Psi'(\varphi)(g'H),$$

et les autres propriétés d'un morphisme de groupe se démontrent de même.

Reste à montrer que  $\Psi \circ \Psi'$  et  $\Psi' \circ \Psi$  est l'application identité sur les ensembles de départ: cela montrera que  $\Psi$  et  $\Psi'$  sont réciproques l'une de l'autre et que les deux ensembles sont en bijection.

Soit  $\phi_H : G/H \rightarrow G'$ , et  $\phi = \Psi(\phi_H) = \phi_H \circ \text{red}_H$

$$\forall gH \in G/H, \Psi'(\Psi(\phi_H))(gH) = \phi(g) = \phi_H(gH)$$

de sorte que

$$\Psi'(\Psi(\phi_H)) = \phi_H.$$

Soit  $\phi : G \rightarrow G'$ , tel que  $H \subset \ker \phi$  et  $\phi_H = \Psi'(\phi)$

$$\forall g \in G, \Psi(\Psi'(\phi))(g) = \phi_H(gH) = \phi(g)$$

de sorte que

$$\Psi(\Psi'(\phi)) = \phi.$$

□

### 8. Complement: Produit semi-direct

On a vu que étant donné deux groupes  $(H, \cdot)$  et  $(K, \cdot)$  on pouvait construire un nouveau groupe, le produit direct  $(H \times K, (\cdot, \cdot))$  dont les éléments sont les paires  $(h, k)$ ,  $h \in H, k \in K$  et dont la loi de groupe est

$$(h, k) \times (h', k') = (h.h', k.k').$$

On va généraliser cette construction dans le cas où  $K$  agit sur  $H$ :

**THÉORÈME 1.11** (Produit semi-direct externe). *Soit  $(H, \cdot)$  et  $(K, \cdot)$  deux groupes et une action à gauche  $H \curvearrowright K$  de  $H$  sur  $K$  (notée  $k \odot h$ ) par automorphismes de groupes (pour tout  $h \in H, k \in K \mapsto h \odot k \in K$  est un morphisme de groupes). L'ensemble produit  $H \times K$  muni de la loi*

$$\star : ((h, k), (h', k')) \mapsto (h, k) \star (h', k') = (h.h', h.k.k')$$

*est un groupe d'élément neutre  $(e_H, e_K)$  et dont l'inversion est donnée par*

$$(h, k)^{\star(-1)} = (k^{-1} \odot h^{-1}, k^{-1}).$$

*On note ce groupe  $H \rtimes_{\odot} K$  et on l'appelle produit semi-direct externe de  $H$  par  $K$ . Les injections de  $H$  et  $K$*

$$i : \begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & H \rtimes K \\ h & \mapsto & (h, e_H) \end{array}, \quad j : \begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & H \rtimes K \\ k & \mapsto & (e_H, k) \end{array}$$

*sont des morphismes de groupes injectifs ce qui permet d'identifier  $H$  et  $K$  aux sous-groupes images  $i(H)$  et  $j(K)$ . Avec ces identifications le groupe  $H$  est distingué dans  $H \rtimes K$  et  $K$  agit sur  $H$  par conjugaison. De plus le quotient  $H \rtimes K / H$  est isomorphe à  $K$ .*

Reciproquement

**THÉORÈME 1.12.** *Soit  $(G, \cdot)$  un groupe;  $H, K \subset G$  des sous-groupes avec  $H \triangleleft G$  ( $H$  est distingué dans  $G$ ). On suppose que*

- (1)  $H.K = G$ ,
- (2)  $H \cap K = \{e_G\}$ .

*Soit  $H \rtimes K$  le produit semi-direct externe obtenu en faisant agir  $K$  sur  $H$  par conjugaison dans  $G$  (on rappelle que  $H$  est distingué dans  $G$ ); alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} H \rtimes K & \mapsto & G \\ (h, k) & \mapsto & h.k \end{array}$$

*est un isomorphisme de groupes; en particulier tout élément  $g \in G$  se décompose de manière unique en un produit  $g = h.k$  avec  $h \in H$  et  $k \in K$ .*

**REMARQUE 8.1.** Le produit direct est un cas particulier du produit semi-direct quand  $H$  agit sur  $G$  trivialement:

$$\forall h \in H, k \in K, k \odot h = h.$$

**EXEMPLE 8.1** (Le groupe diédral). Soit  $R = \langle r \rangle = r^{\mathbb{Z}}$  un groupe fini cyclique d'ordre  $n$  et  $S = \{1, s\}$  un groupe d'ordre 2 qui agit sur  $R$  par inversion: par

$$r \odot s = r^{-1}.$$

Le groupe

$$R \rtimes S$$

est un *groupe dihedral*  $\mathcal{D}_{2n}$ .

## CHAPITRE 2

# Pavages du plan

### 1. Tuiles

Qui dit pavage dit tuiles; nous allons définir les tuiles comme étant des polygones pleins.

**DÉFINITION 2.1.** *Étant donné  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , l'intérieur de  $\mathbf{P}$ , noté  $\mathbf{P}^\circ \subset \mathbf{P}$  est l'ensemble des points  $P \in \mathbf{P}$  tels qu'il existe un disque  $\mathcal{D}(P, r)$  centre en  $P$  et de rayon  $r > 0$  entièrement contenu dans  $\mathbf{P}$ , ie.  $\mathcal{D}(P, r) \subset \mathbf{P}$ .*

*L'adhérence de  $\mathbf{P}$ ,  $\overline{\mathbf{P}}$  est l'ensemble des points  $P$  de  $\mathbb{R}^2$  arbitrairement proches d'un point de  $\mathbf{P}$ , ie. tels que pour tout  $r > 0$  (aussi petit soit-il),*

$$\mathcal{D}(P, r) \cap \mathbf{P} \neq \emptyset.$$

*Le bord (ou la frontière) de  $\mathbf{P}$  est le complément de l'intérieur dans l'adhérence*

$$\partial\mathbf{P} = \overline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}^\circ.$$

**EXERCICE 2.1.** Montrer que de manière équivalente, la frontière est l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  arbitrairement proches d'un point de  $\mathbf{P}$  et de son complémentaire  $\mathbf{P}^c = \mathbb{R}^2 - \mathbf{P}$ :

$$P \in \partial\mathbf{P} \iff \forall r > 0, \mathcal{D}(P, r) \text{ contient un point dans } \mathbf{P} \text{ et un point hors de } \mathbf{P}.$$

**DÉFINITION 2.2.** *Une tuile de  $\mathbb{R}^2$  est une sous-ensemble  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$  qui fermé ( $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$ ), borné (il existe  $R \geq 0$  tel que  $\mathbf{P} \subset \mathcal{D}(0, R)$ ) et d'intérieur  $\mathbf{P}^\circ$  non-vide.*

**1.1. Tuile polygonale.** La notion très générale de tuile telle que définie ci-dessus est suffisante pour obtenir le Théorème 2.1 de Fedorov. En particulier elle s'applique au cas particulier des *tuiles polygonales* ou encore *polygones pleins* définis ci-dessous.

**DÉFINITION 2.3.** *Un sous-ensemble  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$  est connexe par arcs si deux points quelconques de  $\mathbf{P}$  peuvent être reliés par une courbe continue contenue dans  $\mathbf{P}$ . Pour tout  $P, Q \in \mathbf{P}$ , il existe une application continue (ie. les fonctions  $t \rightarrow x(t), y(t)$  sont continues)*

$$P(\cdot) : \begin{array}{l} [0, 1] \mapsto \mathbf{P} \\ t \mapsto P(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

telle que  $P(0) = P, P(1) = Q$ .

**DÉFINITION 2.4.** *Un simplexe de  $\mathbb{R}^2$  est le triangle plein déterminé par trois points distincts non-alignés  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ . On le note  $\overline{ABC}$ ; c'est l'ensemble des barycentres possibles des points  $A, B, C$*

$$\overline{ABC} = \{P = \lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\}.$$

*Les faces de  $\overline{ABC}$  (ou encore arêtes) sont les segments  $[AB], [AC], [BC]$ . Les sommets sont les points  $A, B, C$ .*

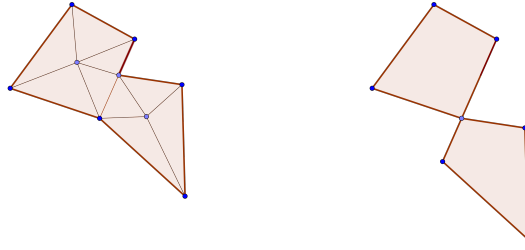


FIGURE 1. Exemple de polygone plein et contre-exemple

DÉFINITION 2.5. Un polygone plein  $\mathbf{P}$  est une reunion finie, non-vide de simplexes distincts

$$\mathbf{P} = \bigcup_i \overline{A_i B_i C_i}$$

dont l'interieur  $\mathbf{P}^\circ$  est connexe par arcs. Les faces (ou aretes) de  $\mathbf{P}$  sont les segments contenus dans  $\partial\mathbf{P}$  et qui sont maximaux pour cette propriete; les sommets de  $\mathbf{P}$  sont les intersections de deux faces distinctes.

EXERCICE 2.2 (Evident a voir mais pas forcément evident a prouver !). Montrer que tout polygone plein peut se decomposer en une reunion finie de simplexes tels que l'intersection de deux simplexes distincts est constituee de

- (1) soit l'ensemble vide,
- (2) soit un sommet commun,
- (3) soit un cote (face) commun (memes extremités).

Pour cela on commencera par montrer qu'une union de deux simplexes (disjoints ou non) peut se decomposer de cette maniere.

EXERCICE 2.3. Soit  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble et  $\varphi$  une isometrie. On note  $\varphi(\mathbf{P})$  ou  $\varphi.\mathbf{P}$  l'image de  $\mathbf{P}$  par  $\varphi$

$$\varphi(\mathbf{P}) = \varphi.\mathbf{P} = \{\varphi(P), P \in \mathbf{P}\}.$$

Montrer que

- (1) l'image de l'interieur est l'interieur de l'image

$$\varphi(\mathbf{P})^\circ = \varphi(\mathbf{P}^\circ),$$

- (2) l'image du bord est le bord de l'image

$$\partial\varphi(\mathbf{P}) = \varphi(\partial\mathbf{P}).$$

- (3) L'image du simplexe  $\overline{ABC}$  est le simplexe  $\overline{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)}$ .
- (4) L'image d'un polygone plein  $\mathbf{P}$  est encore un polygone plein. De plus, les sommets et les aretes de l'image sont les images des sommets et des aretes de  $\mathbf{P}$ .
- (5) Montrer que cela reste vrai si  $\varphi$  est seulement une transformation affine.



## 2. Pavages

DÉFINITION 2.6. *Un pavage du plan a une tuile (eventuellement polygonale),  $\mathcal{P}(\mathbf{P}, \text{Is})$  est un ensemble de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  (appelées tuiles) obtenus a partir*

- d'une tuile  $\mathbf{P}$  (eventuellement polygonale),
- d'un sous-ensemble  $\text{Is} \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  d'isometries, qui fournit un ensemble de tuiles isometrique a  $\mathbf{P}$

$$\text{Is}.\mathbf{P} = \{g.\mathbf{P} = g(\mathbf{P}), g \in \text{Is}\},$$

tel que l'ensemble de ces tuiles recouvrent le plan:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in \text{Is}} g.\mathbf{P},$$

et tel que deux tuiles distinctes ne peuvent s'intersecter que suivant leur bord:

$$g.\mathbf{P}^\circ \cap g'.\mathbf{P}^\circ \neq \emptyset \Leftrightarrow g.\mathbf{P} = g'.\mathbf{P}.$$

REMARQUE 2.1. L'ensemble  $\text{Is}$  est necessairement infini car sinon  $\text{Is}.\mathbf{P}$  ne pourrait recouvrir  $\mathbb{R}^2$ .

REMARQUE 2.2. Quitte a remplacer  $\mathbf{P}$  par une tuile isometrique de la forme  $g.\mathbf{P}$  on supposera dans la suite que l'identite  $\text{Id}$  appartient a  $\text{Is}$  (de sorte que  $\mathbf{P}$  est une des tuiles du pavage). L'ensemble d'isometries  $\text{Is}$  est alors remplace par  $\text{Is}.g^{-1}$ .

### 2.1. Action du groupe des isometries sur les pavages du plan.

PROPOSITION 2.1. *Soit  $\mathbf{P}$  une tuile et  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  une isometrie alors  $\varphi(\mathbf{P})$  est une tuile et si  $\mathbf{P}$  est polygonale,  $\varphi(\mathbf{P})$  l'est egalement*

PREUVE. Exercice. □

Ainsi le groupe des isometries  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  agit sur l'ensemble des tuiles et il agit egalement sur l'ensemble des pavages a une tuile de la maniere suivante: soit  $\mathcal{P}(\mathbf{P}, \text{Is})$  un pavage et  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  une isometrie, alors on peut appliquer l'isometrie  $\varphi$  a chaque tuile  $g.\mathbf{P}$  du pavage et on obtient un ensemble des tuiles isometriques

$$\{\varphi(g(\mathbf{P})), g \in \text{Is}\}.$$

cet ensemble de tuiles a les proprietes d'un pavage:

$$\bigcup_{g \in \text{Is}} \varphi(g(\mathbf{P})) = \varphi\left(\bigcup_{g \in \text{Is}} g(\mathbf{P})\right) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2.$$

De plus pour tout  $g, g' \in \text{Is}$ ,

$$\varphi(g(\mathbf{P}))^\circ \cap \varphi(g'(\mathbf{P}))^\circ = \varphi(g(\mathbf{P})^\circ) \cap \varphi(g'(\mathbf{P})^\circ) = \varphi(g(\mathbf{P})^\circ \cap g'(\mathbf{P})^\circ)$$

qui vaut l'ensemble vide sauf si  $g(\mathbf{P}) = g'(\mathbf{P})$  c'est a dire ssi  $\varphi(g(\mathbf{P})) = \varphi(g'(\mathbf{P}))$ .

DÉFINITION 2.7. *Etant donne un pavage a une tuile  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{P}, G)$ ; le groupe d'isometries de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_\mathcal{P}$  est l'ensemble des isometries  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  qui laissent le pavage invariant: tel que*

$$\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(\mathbf{P}, \varphi \circ \text{Is}) = \mathcal{P}(\mathbf{P}, \text{Is}).$$

EXEMPLE 2.1. Soit

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}([0, 1] \times [0, 1], t_{\mathbb{Z}^2}) = \{[m, m+1] \times [n, n+1], (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

le pavage dont les tuiles sont les translates du carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$  par les vecteurs de coordonnées entières. Montrer que  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}_4}$  est le groupe d'isométries engendré par  $t_{\mathbb{Z}^2} = \{t_{(m,n)}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$  et le groupe des isométries du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  (qui est un groupe  $D_8$  diédral d'ordre 8).

REMARQUE 2.3. Alternativement on pourrait également définir cette action en faisant agir  $\varphi$  sur la tuile originale  $\mathbf{P}$ . Pour obtenir le même pavage, il convient alors de *conjuguer* Is: on obtient le même pavage si on définit

$$\varphi\mathbf{P} = (\varphi(\mathbf{P}), \text{Ad}(\varphi)(\text{Is}))$$

avec

$$\text{Ad}(\varphi)(\text{Is}) = \varphi \circ \text{Is} \circ \varphi^{-1} = \{\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, g \in \text{Is}\}.$$

En effet on a pour tout  $g \in \text{Is}$

$$\text{Ad}(\varphi)(g)(\varphi(\mathbf{P})) = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{P})) = \varphi(g(\mathbf{P})).$$

### 3. Pavages de Réseaux

Un exemple particulièrement simple de pavage est celui donné par les réseaux:

DÉFINITION 2.8. Un réseau  $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$  de  $(\mathbb{R}^2, +)$  est un sous-groupe additif engendré par deux vecteurs,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^2$  (ces vecteurs forment donc une base de  $\mathbb{R}^2$ ):

$$\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v} = \{m\vec{u} + n\vec{v}\}.$$

PROPOSITION 2.2. Soit  $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$  un réseau; le parallélogramme fondamental porté par  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  est l'ensemble

$$\mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}} = \{x\vec{u} + y\vec{v}, x, y \in [0, 1]\}.$$

Soit  $T(\Gamma) = \{t_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$  le groupe des translations par les vecteurs de  $\Gamma$  alors pour tout point  $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $(P_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}, T(\Gamma))$  est un pavage du plan: c'est un pavage dont l'ensemble des isométries donnant les copies des différentes tuiles est un groupe (un groupe de translations).

REMARQUE 3.1. Le groupe des isométries de  $(P_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}, T(\Gamma))$  contient le groupe  $T(\Gamma)$ : pour tout  $t = t_\gamma \in T(\Gamma)$  on a

$$t(P_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}, T(\Gamma)) = (P_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}, t \circ T(\Gamma)) = (P_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}, T(\Gamma))$$

car  $t \circ T(\Gamma) = T(\Gamma)$  puisque  $T(\Gamma)$  est un groupe et  $t$  en est un élément de ce groupe. Le groupe contient également la rotation de centre  $P_0$  et d'angle  $-1$ . En effet cette rotation transforme la tuile

$$P_0 + \vec{w} + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}$$

en la tuile

$$P_0 - \vec{w} + \mathbf{P}_{-\vec{u}, -\vec{v}} = P_0 - \vec{w} - \vec{u} - \vec{v} + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}.$$

Ainsi le groupe des isométries de ce pavage contient le groupe engendré par  $T(\Gamma)$  et  $r_{P_0, -1}$

Notons cependant que  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{(P_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}, T(\Gamma))}$  peut être strictement plus grand: si  $\mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}$  est un carré le groupe d'isométrie du pavage contiendra également le groupe d'isométries du carré qui a part l'élément neutre ne contient pas de translations.

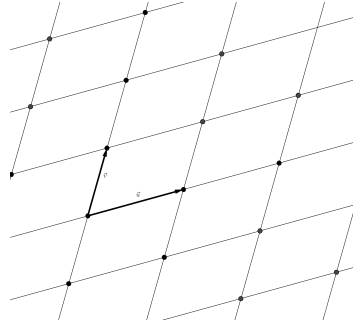


FIGURE 2. Un reseau

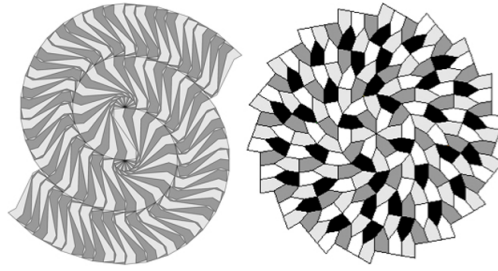


FIGURE 3. Pavages non-reguliers de Voderberg et de Hirschhorn-Hunt (source R. Coolman)

#### 4. Les groupes cristallographiques du plan

On va être intéressés à classer les groupes d'isométries de certains pavages qu'on appelle pavages *réguliers*:

**DÉFINITION 2.1.** *Un pavage  $\mathcal{P}$  est dit régulier si son groupe d'isométries  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathcal{P}}$  contient au moins deux translations  $t_{\vec{u}}$  et  $t_{\vec{v}}$  avec  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  des vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. En particulier  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathcal{P}}$  contient le groupe des translations du réseau associé  $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$ .*

**EXEMPLE 4.1.** Les pavages de réseaux  $(P_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}, T(\Gamma))$  sont réguliers. La figure suivante donne deux exemples de pavages qui ne sont pas réguliers

**DÉFINITION 2.9.** *Le groupe des isométries d'un pavage régulier  $\mathcal{P}$ ,  $G_{\mathcal{P}} \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  est dit cristallographique.*

**EXEMPLE 4.2.** Le groupe des translations  $T(\Gamma)$  associé à un réseau  $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$  (avec  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$   $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants) est un groupe cristallographique: pour tuile on prend n'importe quel translate du parallélogramme fondamental  $\vec{v}_0 + \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}$ .

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant

**THÉORÈME 2.1 (Fedorov).** *Il existe 17 classes d'isomorphismes possibles pour un groupe cristallographique.*

En d'autres termes il existe exactement 17 pavages reguliers dont les groupes d'isometries sont deux a deux non-isomorphes et tels que le groupe d'isometrie de tout pavage regulier est isomorphe a l'un de ces groupes.

REMARQUE 4.1. On trouvera un exemple de pavage pour chacun des 17 (classe d'isomorphisme de) groupes cristallographiques sur le site de Therese Eveilleau

<http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr>

La preuve de ce theoreme passe par plusieurs etapes. Soit  $G = G_{\mathcal{P}}$  un groupe cristallographique, notons

$$G^+ = G \cap \text{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$$

le sous-groupe des rotations (affines) et

$$T_G = G^+ \cap T(\mathbb{R}^2)$$

le sous-groupe des translations (les rotations affines dont la partie lineaire est triviale). La strategie est la suivante:

- (1) Elucider la structure du groupe des translations  $T_G$ .
- (2) En deduire la structure du groupe des rotations  $G_+$ .
- (3) En deduire la structure du groupe  $G$ .
- (4) Construire un pavage regulier correspondant a chacun des 17 types d'isomorphisme.

Pour conduire les trois premieres etapes, la Proposition suivante sera tres utile:

PROPOSITION 2.3. *Les sous-groupes  $T_G$  et  $G^+$  sont distingues dans  $G$ ; en particulier  $T_G$  est distingue dans  $G^+$ .*

**Preuve:** En effet  $T_G$  est le noyau du morphisme "partie lineaire" restreint a  $G$  et est donc distingue:

$$T_G = \ker(\text{lin}|_G), \quad \text{lin} : \phi \in G \mapsto \phi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)_0.$$

De meme,  $G^+$  est le noyau du morphisme "determinant de la partie lineaire" restreint a  $G$ :

$$\det|_G : \phi \in G \mapsto \det(M_{\phi_0}) \in \{\pm 1\}$$

ou  $M_{\phi_0}$  designe la matrice (dans la base canonique) de la partie lineaire  $\phi_0$ .  $\square$

Dans ce cours on va se contenter de mener a bien les deux premieres etapes: et on va montrer qu'il existe cinq classes d'isomorphismes possibles pour  $G^+$ .

THÉORÈME 2.2 (Fedorov pour les groupes de rotations). *Il existe 5 classes d'isomorphismes possibles pour le sous-groupe de isometrie directes  $G^+ \subset G$  d'un groupe cristallographique.*

**4.1. Le sous-groupe des translations.** Soit  $T_G$  le sous-groupe des translations de  $G$ ; dans tout la suite, on identifiera librement  $T_G$  au sous-groupe additif des vecteurs correspondants et qu'on notera  $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ :

$$T_G = T(\Gamma) = \{t_\gamma, \gamma \in \Gamma\}.$$

Par ailleurs, dans la suite il sera tres commode d'identifier  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$ . On identifiera donc le sous-groupe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma$  a un sous-groupe du groupe additif des nombres complexes  $(\mathbb{C}, +)$  qu'on notera egalement  $\Gamma$ .

On va montrer le theoreme suivant:

THÉORÈME 2.3. *Le groupe  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  est un reseau: il existe  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{C}$  non-colineaires tels que*

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1.$$

Pour montrer ce theoreme on aura besoin de l'annonce de finitude suivant:

**PROPOSITION 2.4.** *Pour tout disque  $D(z, r) = \{z' \in \mathbb{C}, |z' - z| \leq r\}$ , l'ensemble  $\Gamma \cap D(z, r)$  est fini.*

Pour montrer cette proposition on aura besoin du lemme suivant:

**LEMME 2.1.** *Pour tout disque  $D = D(z, r)$  le nombre  $N(z, r)$  de tuiles du pavage  $\mathcal{P}$  qui intersectent  $D$  est fini.*

**Preuve:** La raison peut paraitre evidente mais on va formaliser cela: soit  $r_0 > 0$  et  $P_0 \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$D(P_0, r_0) \subset \mathbf{P}^\circ.$$

Soit  $R_0 > 0$  un rayon tel que la tuile  $\mathbf{P}$  soit contenue entierement dans le disque  $D(0, R_0)$ : on a donc

$$D(P_0, r_0) \subset \mathbf{P} \subset D(0, R_0).$$

Soit  $\mathbf{P}' = g.\mathbf{P}$  une tuile du reseau qui intersecte  $D = D(z, r)$  alors  $\mathbf{P}' \subset D(z, r + 2R_0)$  (deux point distincts de  $\mathbf{P}'$  sont a distance au plus  $2R_0$  l'un de l'autre et dont si  $\mathbf{P}'$  intersecte  $D$  il est a distance au plus  $r$  de  $z$  et tout autre point de  $\mathbf{P}'$  est a distance au plus  $r + 2R_0$  de  $z$ ). Comme les tuiles forment un pavage, l'aire de la reunion de toutes les tuiles qui intersectent  $D$  est au moins egale a

$$\text{Aire}(D(P_0, r_0)) \times N(z, r) = \pi r_0^2 \times N(z, r).$$

Cette aire est majoree par l'aire du disque  $D(z, r + 2R_0)$ : on a donc

$$\pi r_0^2 \times N(z, r) \leq \pi (r + 2R_0)^2.$$

ce qui donne la finitude de  $N(z, r)$ . □

**Preuve:** (de la Proposition 2.4) Considerons la reunion

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma \cap D(z, r)} (\gamma + \mathbf{P})$$

des translates de  $\mathbf{P}$  par les elements de  $\Gamma$  contenus dans le disque. Comme  $\mathbf{P}$  est une tuile du pavage les translates par les elements de  $\Gamma$  sont egalement des tuiles. A nouveau cette reunion est contenue dans le disque de rayon  $D(z, r + 2R_0)$  et leur nombre est donc fini et donc le nombre de  $\gamma$  est fini. □

**4.2. Preuve du Theoreme 2.3.** Comme le pavage est regulier, il existe  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  lineairement independants. Soit un disque  $D(\mathbf{0}, r)$  contenant  $\gamma, \gamma'$  alors  $D(\mathbf{0}, r) \cap \Gamma$  est fini. Il existe donc

- un element  $\gamma_0 \in \Gamma$  non-nul et de longueur minimale (parmi tous les elements de  $\Gamma$ ),
- un element  $\gamma_1$  non-colineaire a  $\gamma_0$  et de longueur minimale (parmi tous les elements de  $\Gamma$  non-colineaires a  $\gamma_0$ ).

On note ces elements  $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma \cap D(\mathbf{0}, r) - \{0\}$ :

$$|\gamma_0| = \min_{0 \neq \gamma \in \Gamma} |\gamma|, |\gamma_1| = \min_{\substack{\gamma' \in \Gamma \\ \gamma' \notin \mathbb{R}\gamma_0}} |\gamma'|.$$

Posons

$$\Gamma_0 = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1 \subset \Gamma.$$

On va montrer qu'on a egalite

$$\Gamma_0 = \Gamma.$$

Soit

$$\mathbf{P}_0 = \{x\gamma_0 + y\gamma_1, x, y \in [-1/2, 1/2[.\}$$

LEMME 2.2. *Le parallelogramme  $\mathbf{P}_0$  est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma_0$  sur  $\mathbb{C}$  par addition.*

**Preuve:** : pour le voir, il faut montrer que tout element de  $\mathbb{C}$  se decompose en la somme d'un element de  $\Gamma_0$  et d'un element de  $\mathbf{P}_0$  et que cette decomposition est unique.

En effet pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  il existe des entiers  $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$  tels que

$$x = n_x + u_x, y = n_y + v_y \text{ avec } u_x = x - n_x, v_y = y - n_y \in [-1/2, 1/2[.$$

En effet si on pose  $[x] \in \mathbb{Z}$  la partie entiere de  $x$  et  $\{x\} = x - [x] \in [0, 1[$  sa partie fractionnaire, il suffit de prendre

$$u_x = \begin{cases} \{x\} & \text{si } 0 \leq \{x\} < 1/2 \\ \{x\} - 1 & \text{si } 1/2 \leq \{x\} < 1 \end{cases}$$

et alors

$$n_x = x - u_x = \begin{cases} [x] & \text{si } 0 \leq \{x\} < 1/2 \\ [x] + 1 & \text{si } 1/2 \leq \{x\} < 1 \end{cases}$$

et on procede de meme pour  $y$ . Ainsi pour  $z = x\gamma_0 + y\gamma_1 \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , si on pose

$$\gamma_0(z) := n_x\gamma_0 + n_y\gamma_1 \in \Gamma_0$$

on a

$$z = \gamma_0(z) + (z - \gamma_0(z))$$

avec

$$z - \gamma_0(z) \in \mathbf{P}_0.$$

Supposons que

$$z = \gamma + (z - \gamma) = \gamma' + (z - \gamma')$$

avec

$$\gamma, \gamma' \in \Gamma_0, z - \gamma, z - \gamma' \in \mathbf{P}_0$$

alors

$$w = (z - \gamma) - (z - \gamma') = \gamma' - \gamma \in \Gamma_0$$

et donc les coordonnees de  $w$  dans la base  $\gamma_0, \gamma_1$  sont des entiers. Par ailleurs les coordonnees de  $z - \gamma$  et  $z - \gamma'$  sont contenues dans l'intervalle  $[-1/2, 1/2[$  et leur differences (qui sont des entiers) sont contenues  $] - 1, 1[$ , elle valent donc 0 et

$$w = 0 = (z - \gamma) - (z - \gamma') = \gamma' - \gamma.$$

□

Soit  $\gamma \in \Gamma$  que l'on decompose comme ci-dessus:

$$\gamma = \gamma_0(\gamma) + (\gamma - \gamma_0(\gamma)) \in \Gamma_0 + \mathbf{P}_0$$

En particulier

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| = |u\gamma_0 + v\gamma_1| \leq |u\gamma_0| + |v\gamma_1| \leq \frac{1}{2}(|\gamma_0| + |\gamma_1|) \leq |\gamma_1|.$$

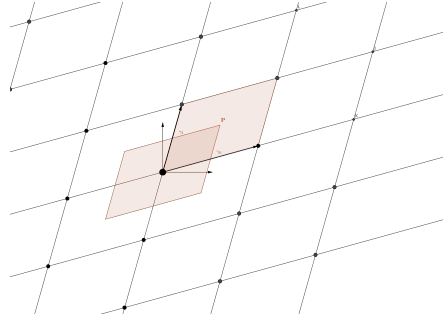


FIGURE 4.

Supposons que cette inegalite soit stricte: on a donc

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| < |\gamma_1|$$

ce qui implique, par definition de  $\gamma_1$  (un element de  $\Gamma$  non-colineaire a  $\gamma_0$  et de longueur minimale) que  $\gamma - \gamma_0(\gamma)$  est colineaire a  $\gamma_0$  et donc  $v = 0$ . on a alors

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| \leq \frac{1}{2}|\gamma_0| < |\gamma_0|$$

ce qui implique, par definition de  $\gamma_0$ , que

$$\gamma - \gamma_0(\gamma) = 0$$

et donc que  $\gamma = \gamma_0(\gamma) \in \Gamma_0$ .

Supposons que l'on soit dans le cas d'egalite: on a alors

$$|u\gamma_0 + v\gamma_1| = |u\gamma_0| + |v\gamma_1| = \frac{1}{2}(|\gamma_0| + |\gamma_1|) = |\gamma_1|.$$

On a donc  $|\gamma_0| = |\gamma_1|$  et  $|u| = |v| = 1/2$  et ainsi necessairement  $u = v = -1/2$ . Ainsi

$$\gamma - \gamma_0(\gamma) = -\frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2} \neq 0$$

mais comme  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne sont pas proportionnels, l'inegalite triangulaire est stricte:

$$|-\frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2}| < \frac{|\gamma_0| + |\gamma_1|}{2} = |\gamma_0|$$

et donc

$$0 \neq |\gamma - \gamma_0(\gamma)| < |\gamma_0|$$

ce qui contredit la minimalite de  $|\gamma_0|$ . Ainsi le cas d'egalite ne peut avoir lieu.

On a donc montre que

$$\Gamma = \Gamma_0 = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1.$$

□

**4.3. Le groupe des rotations lineaires.** Dans cette partie, on s'intéresse aux angles possibles des rotations de  $G$ .

Considerons l'application "partie lineaire"

$$\text{Lin} : \begin{array}{l} G \mapsto \text{Isom}(\mathbb{R}^2)_0 \\ g \mapsto g_0 \end{array}.$$

C'est un morphisme de groupe dont le noyau est  $\Gamma$ . Soit  $G_0$  l'image de  $G$  et  $G_0^+$  l'image de  $G^+$ ; dans cette partie on identifiera  $G_0^+$  avec un sous-groupe de  $\mathbb{C}^1$ .

On va montrer que

**THÉORÈME 2.4.** *Le groupe  $G_0^+$  (identifié à un sous-groupe de  $\mathbb{C}^1$ ) est soit*

- (1) *le groupe trivial  $\{1\}$ ,*
- (2) *le groupe d'ordre 2,  $\mu_2 = \{\pm 1\}$ ,*
- (3) *le groupe cyclique d'ordre 3  $\mu_3 = \omega_3^{\mathbb{Z}} = \{1, \omega_3, \omega_3^2\}$ , avec  $\omega_3 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,*
- (4) *le groupe cyclique d'ordre 4,  $\mu_4 = i^{\mathbb{Z}} = \{\pm 1, \pm i\}$ ,*
- (5) *le groupe cyclique d'ordre 6,  $\mu_6 = \omega_6^{\mathbb{Z}}$  avec  $\omega_6 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .*

De plus, il existe  $\gamma_0 \in \mathbb{C}^\times$  tel que

$$- \text{Si } G_0^+ = \mu_3,$$

$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0\omega_3,$$

$$- \text{Si } G_0^+ = \mu_4,$$

$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0i,$$

$$- \text{Si } G_0^+ = \mu_6,$$

$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6) = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0\omega_3.$$

**PREUVE.** Si  $G^+ = T(\Gamma)$  on a  $G_0^+ = \{1\}$  et on a terminé.

Supposons que  $G^+ \neq T(\Gamma)$ .

Ecrivons le groupe des vecteurs des translations sous la forme

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1 \subset \mathbb{C}$$

avec  $\gamma_0, \gamma_1$  comme dans la preuve du Theoreme 2.3; en particulier  $|\gamma_1| \geq |\gamma_0|$ .

**LEMME 2.3.** *Soit  $r \in G^+$  une rotation d'angle  $\alpha$  alors*

$$\alpha\Gamma = \Gamma.$$

**Preuve:** Soit  $r = r_{\alpha, \nu} \in G^+$  une rotation d'angle  $\alpha$ ; alors pour toute translation  $t_\gamma, \gamma \in \Gamma$

$$\text{Ad}(r)(t_\gamma) = r \circ t_\gamma \circ r^{-1} = t_{\alpha\gamma}$$

est la translation de vecteur  $\alpha\gamma$  (voir (5.2)). Comme

$$t_{\alpha\gamma} \in T(\mathbb{R}^2) \cap G = T(\Gamma)$$

on a  $\alpha\gamma \in \Gamma$  et donc

$$\alpha\Gamma \subset \Gamma.$$

De plus, comme  $G_0^+$  est un groupe et que l'angle de  $r^{-1}$  est  $\alpha^{-1}$  on a  $\alpha^{-1} \in G_0^+$  et donc par le raisonnement precedent on a

$$\alpha^{-1}\Gamma \subset \Gamma \iff \Gamma \subset \alpha\Gamma.$$

□



Ce resultat donne des informations importantes sur la nature de  $\alpha$ : soit

$$\Gamma' = \frac{1}{\gamma_0}\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\gamma'_1, \quad \gamma'_1 = \gamma_1/\gamma_0;$$

$\Gamma'$  est un reseau obtenu a partir de  $\Gamma$  par multiplication par  $\gamma_0^{-1} = |\gamma_0|^{-1} \cdot \frac{|\gamma_0|}{\gamma_0}$ , c'est a dire que  $\Gamma'$  est obtenu par rotation lineaire d'angle  $\frac{|\gamma_0|}{\gamma_0} \in \mathbb{C}^1$  et l'homothetie de rapport  $1/|\gamma_0|$ . De plus –de par notre choix de  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ – 1 est le module minimal d'un element de  $\Gamma' - \{0\}$  et  $\gamma'_1$  est un element de  $\Gamma'$  de module minimal parmi les elements de  $\Gamma'$  qui ne sont pas des multiples (par des facteurs reels) de 1 (ie. qui ne sont pas des nombres reels). On a de plus

$$|\gamma'_1| \geq 1.$$

On a alors pour tout  $\alpha \in G_0^+$  (ie. la multiplication dans  $\mathbb{C}$  est commutative !)

$$\alpha\Gamma' = \alpha\left(\frac{1}{\gamma_0}\Gamma\right) = \frac{\alpha}{\gamma_0}\Gamma = \frac{1}{\gamma_0}(\alpha\Gamma) = \frac{1}{\gamma_0}\Gamma = \Gamma'.$$

En particulier, comme  $1 \in \Gamma'$  on a  $\alpha.1 = \alpha \in \Gamma'$  et donc  $\alpha \in \Gamma'$ : on d'autre termes on a montre que

$$G_0^+ \subset \Gamma'.$$

Comme  $\alpha^{-1} \in \Gamma'$  et que  $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$  ( $\alpha$  est de module 1), on a  $\alpha, \alpha^{-1} \in \Gamma'$  et comme  $\Gamma'$  est un groupe additif, on a

$$\alpha + \alpha^{-1} = \alpha + \bar{\alpha} = 2\text{Re}\alpha \in \mathbb{R} \cap \Gamma'.$$

LEMME. On a  $\mathbb{R} \cap \Gamma' = \mathbb{Z}$ .

**Preuve:** On a  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}.1 \subset \mathbb{R} \cap \Gamma'$ . Montrons l'inclusion inverse. Soit  $x \in \mathbb{R} \cap \Gamma'$  alors  $\{x\} = x - [x] \in [0, 1[ \cap \Gamma'$ . Comme 1 est un element de  $\Gamma' - \{0\}$  de plus petit module, on doit avoir  $\{x\} = 0$  et donc  $x = [x] \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Retournons a la preuve de notre Theoreme: comme  $|2\text{Re}\alpha| \leq 2$  on a  $2\text{Re}\alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  et comme  $|\alpha|^2 = 1 = (\text{Re}\alpha)^2 + (\text{Im}\alpha)^2$  on a

$$\text{Im}\alpha \in \left\{0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1\right\}.$$

En particulier  $\alpha$  ne prend n'a qu'un nombre fini de valeurs possibles

$$\alpha \in \left\{\pm 1, \pm i, \pm \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

et  $G_0^+$  est donc un groupe fini de  $\mathbb{C}^1$  et est donc cyclique.

Supposons donc que  $\alpha = \omega$  est un generateur de  $G_0^+$ . On est dans l'un des cas suivants:

- (1)  $\omega = 1, G_0^+ = \{1\} = \mu_1.$
- (2)  $\omega = -1, G_0^+ = \{\pm 1\} = \mu_2.$
- (3)  $\omega = \omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $\omega = \omega_3^{-1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, G_0^+ = \omega_3^{\mathbb{Z}} = \mu_3.$
- (4)  $\omega = \omega_4 = i$  ou  $\omega = \omega_4^{-1} = -i, G_0^+ = i^{\mathbb{Z}} = \mu_4.$
- (5)  $\omega = \omega_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $\omega = \omega_6^{-1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, G_0^+ = \omega_6^{\mathbb{Z}} = \mu_6.$

Ici on a note

$$\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^\times, z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^1$$

le groupe des racines  $n$ -iemes de l'unite.

Supposons maintenant que  $G_0^+$  est d'ordre 3, 4, ou 6 alors  $\Gamma'$  contient suivant les cas

$$\text{ou bien } \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \text{ ou bien } \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3 \text{ ou bien } \Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6.$$

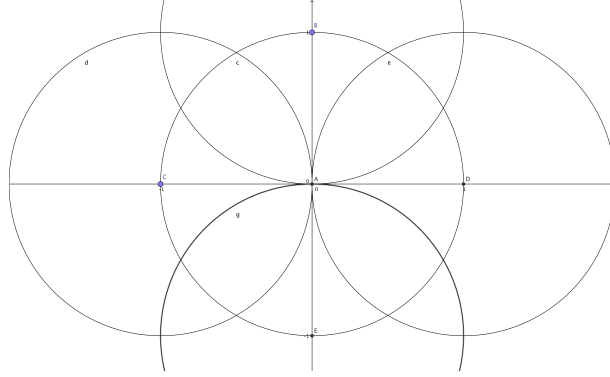


FIGURE 5.

(ces groupes sont des reseaux car  $i$ ,  $\omega_3$  et  $\omega_6$  ne sont pas des nombres reels.) Montrons que  $\Gamma'$  est exactement egal a l'un de ces reseaux.

Rappelons que

$$\Gamma' = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}\gamma'_1$$

avec 1 de module minimal parmi les elements non-nuls de  $\Gamma'$  et  $\gamma'_1$  de module minimal parmi les elements non-nul de  $\Gamma$  non-colineaires a 1 (ie. non-reels) et en particulier  $|\gamma'_1| \geq 1$ . Comme  $i$ ,  $\omega_3$  et  $\omega_6$  sont non-reels et de module 1, on a necessairement  $|\gamma'_1| \leq 1$  et donc

$$|\gamma'_1| = 1.$$

Comme  $i$ ,  $\omega_3$  et  $\omega_6$  sont non-reels et de module 1 (donc de module minimal parmi les lements de  $\Gamma'$  non colineaires a 1, la preuve du Theoreme 2.3 nous dit que (suivant le cas)

$$\Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \text{ ou bien } \Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3 \text{ ou bien } \Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6.$$

On a donc

$$\Gamma = \gamma_0.\Gamma' = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) \text{ ou bien } \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3) \text{ ou bien } \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6).$$

Notons par ailleurs que

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3.$$

En effet, la relation  $\omega_6 = \omega_3 - 1$  montre l'inclusion  $\subset$  et la relation  $\omega_3 = \omega_6 + 1$  montre l'inclusion reciproque  $\supset$ .  $\square$

REMARQUE 4.2. Alternativement, les deux dessins suivants montrent que le cercle unite est recouvert par des cercles de rayon 1 centres aux points de  $\mu_4$  ou aux points de  $\mu_6$  et donc que tout point du cercle unite est a distance  $< 1$  d'un point de  $\mu_4$  ou de  $\mu_6$ ; par la minimalite de 1 et de  $\gamma$  une telle difference (qui est contenue dans  $\Gamma'$ ) doit etre nulle, c'est a dire que  $\gamma$  appartient a  $\mu_4$  ou  $\mu_6$  et donc que

$$\Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \text{ ou bien } \Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6.$$

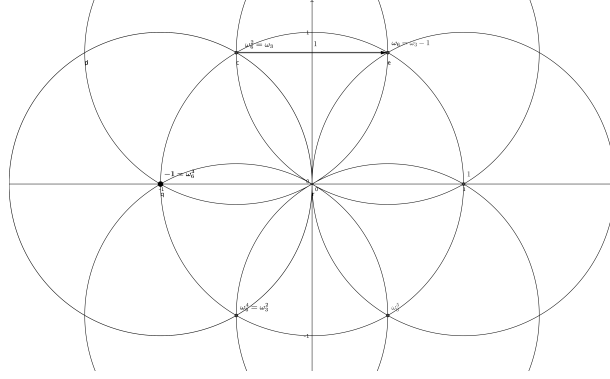


FIGURE 6.

**4.4. Preuve du Theoreme de Fedorov (pour les groupes de rotations).** Considerons un pavage regulier a une tuile  $\mathcal{P} = (\mathbf{P}, \text{Is})$ ,  $G^+$  son groupe des isometries speciales,  $T_G$  son groupe des translations et

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1 \subset \mathbb{C}$$

le reseau tel que  $T_G = T(\Gamma)$ .

Soit  $\omega \in G_0^+$  un generateur c'est a dire un element d'ordre maximal (1, 2, 3, 4 ou 6) et  $r \in G^+$  une rotation d'angle  $\omega$  et de centre  $z_r \in \mathbb{C}$  (on rappelle qu'on a identifie  $G_0^+$  a un sous groupe du cercle unite  $\mathbb{C}^1$ ).

Appliquant au pavage  $\mathcal{P} = (\mathbf{P}, \text{Is})$  la translation  $t_{-z_r}$ , on obtient (cf. Remarque 2.3) le pavage  $\mathcal{P}' = (\mathbf{P}', \text{Is}')$  avec  $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - z_r$  dont le groupe d'isometries est le groupe conjuge

$$G' = \text{Ad}(t_{-z_r})(G) = t_{-z_r} \circ G \circ t_{z_r} \text{ et } G'^+ = t_{-z_r} \circ G^+ \circ t_{z_r}$$

et on a

$$T_{G'} = t_{-z_r} \circ T(\Gamma) \circ t_{z_r} = T(\Gamma)$$

car les translations commutent entre elles. D'autre part

$$r' = \text{Ad}(t_{-z_r})(r) = r_{\omega, 0}$$

est la rotation d'angle  $\omega$  centree en 0: en effet la conjugaison d'une rotation par une translation ne change pas son angle et on a

$$r'(0) = -\nu + r(0 + z_r) = -z_r + r(z_r) = -z_r + z_r = 0$$

car  $z_r$  est le centre de  $r$ . Ainsi quitte a remplacer le pavage  $\mathcal{P}$  par le pavage  $\mathcal{P}'$  ce qui modifie le groupe des isometries par un isomorphisme (et meme une conjugaison), on peut donc supposer que  $G^+$  contient la rotation lineaire  $r_{\omega, 0}$  et donc le groupe qu'elle engendre qui est  $G_0^+$ .

Dans la suite, on fait cette substitution et on suppose que  $G$  est tel que  $G_0^+ \subset G^+$ .

Ecrivant  $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1$ , comme ci-dessus; la transformation lineaire

$$\left[ \times \frac{1}{\gamma_0} \right] : z \mapsto \frac{1}{\gamma_0} z$$

est la composee d'une rotation lineaire (d'angle  $|\gamma_0|/\gamma_0$ ) et d'une homothetie lineaire (de rapport  $1/|\gamma_0|$ ) et transforme le pavage  $(\mathbf{P}, \text{Is})$  en

$$(\mathbf{P}', \text{Is}') = \left(\frac{1}{\gamma_0}\mathbf{P}, \text{Ad}\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)(I)\right).$$

Les sous-groupes associes au groupe d'isometries  $G'$  sont

$$G'^+ = \text{Ad}\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)(G^+), \quad \Gamma' = \text{Ad}\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)(\Gamma) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\gamma, \quad G_0'^+ = \text{Ad}\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)(G_0^+) = G_0^+ \subset G'^+.$$

Ainsi quitte a remplacer  $G$  par  $G'$  on peut supposer que  $G$  verifie

$$G_0^+ \subset G^+ \text{ et } \Gamma = \mathbb{Z} + \gamma_1\mathbb{Z}$$

avec  $\gamma_1$  de module  $|\gamma_1| \geq 1$  et de longueur minimale parmi les elements de  $\Gamma$  qui ne sont pas des multiples de 1. Comme  $G_0^+ \subset G^+$ , tout element  $r$  de  $G^+$  s'ecrit de maniere unique sous la forme

$$r = t_\gamma \circ r_{\alpha,0}, \quad \gamma \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in G_0^+;$$

comme  $G_0^+ \subset G^+$  il en resulte que  $t_\gamma = r \circ r_{\alpha,0}^{-1} \in G^+$  et donc  $\gamma \in \Gamma$ .

Ainsi ( apres ces substitutions) on obtient que  $G^+$  est (isomorphe au sous-groupe de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ ) engendre par  $T(\Gamma)$  et par  $G_0^+$ , c'est a dire soit

- (1) le reseau de translations  $T(\Gamma)$  pour  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  un reseau,
- (2) le groupe engendre par la rotation lineaire  $r_{-1,0}$  et le reseau de translations  $T(\Gamma)$ ,
- (3) le groupe engendre par la rotation  $r_{\omega_3,0}$  et le reseau de translations  $T(\Gamma)$  avec  $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$ ,
- (4) le groupe engendre par la rotation  $r_{i,0}$  et le reseau de translations  $T(\Gamma)$  avec  $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ ,
- (5) le groupe engendre par la rotation  $r_{\omega_6,0}$  et le reseau de translations  $T(\Gamma)$  avec  $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$ .

**DÉFINITION 2.10.** *Soit  $G$  un groupe cristallographique contenu dans  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$  (ie.  $G = G^+$ ) et  $\mathcal{P}$  un pavage associe. On dit que  $\mathcal{P}$  est de type  $p1$ ,  $p2$ ,  $p3$ ,  $p4$  ou  $p6$  suivant que l'ordre maximal d'une rotation contenue dans  $G$  est 1, 2, 3, 4 ou 6.*

La figure 7 donne cinq schemas des pavages reguliers de type  $p1$ ,  $p2$ ,  $p3$ ,  $p4$ ,  $p6$ . Les figures suivantes donnent des exemples de tels pavages dans l'oeuvre de M.C. Escher.

**4.5. Optionnel: formulation en terme de groupes abstraits.** En termes de groupes abstraits  $G^+$  est isomorphe a l'un des groupes suivants

- (1) isomorphe a  $\mathbb{Z}^2$ ,
- (2) le produit semi-direct  $\{\pm 1\} \ltimes \mathbb{Z}^2$  ( $\{\pm 1\}$  agissant sur  $\mathbb{Z}^2$  par multiplications),
- (3) le produit semi-direct  $\omega_3^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$ ,  $\omega_3^{\mathbb{Z}}$  agissant sur  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3$  par multiplications,
- (4) le produit semi-direct  $i^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ ,  $i^{\mathbb{Z}}$  agissant sur  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$  par multiplications,
- (5) le produit semi-direct  $\omega_6^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6$ ,  $\omega_6^{\mathbb{Z}}$  agissant sur  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6$  par multiplications.

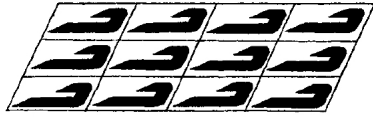


Figure 1.7.4.1

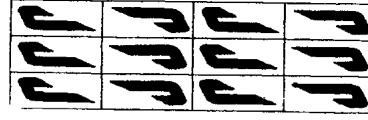


Figure 1.7.4.2

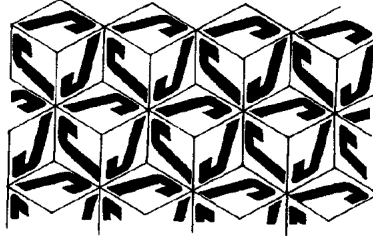


Figure 1.7.4.3

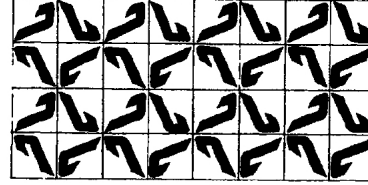


Figure 1.7.4.4

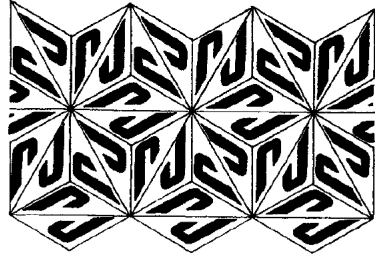
Figure 1.7.4.5  
(Source: {BD})

FIGURE 7. Pavages Reguliers sans symetries axiales (source Y. Brossard)

ou encore, en utilisant le fait que

$$i^2 = -1, \omega_3^2 = -1 - \omega_3, \omega_6^2 = -1 + \omega_6,$$

on voit que  $G^+$  est isomorphe a l'un des groupes suivants

- (1)  $\mathbb{Z}^2$ ,
- (2) le produit semi-direct  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ , 1 (mod 2) agissant sur  $\mathbb{Z}^2$  par la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,
- (3) le produit semi-direct  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ , 1 (mod 3) agissant sur  $\mathbb{Z}^2$  par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,
- (4) le produit semi-direct  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ , 1 (mod 4) agissant sur  $\mathbb{Z}^2$  par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,
- (5) le produit semi-direct  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ , 1 (mod 6) agissant sur  $\mathbb{Z}^2$  par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 5. Groupes paveurs

Pour conclure ce chapitre, on va discuter le cas des pavages  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{P}, \text{Is})$  ou l'ensemble  $\text{Is} \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  des isometries qui transforment la tuile initiale est un *sous-groupe* de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ .

DÉFINITION 2.2. Soit  $G \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  un sous-groupe d'isometries tel qu'il existe une tuile  $\mathbf{P}$  telle que

$$\mathcal{P}(\mathbf{P}, G) = \{g.\mathbf{P}, g \in G\}$$

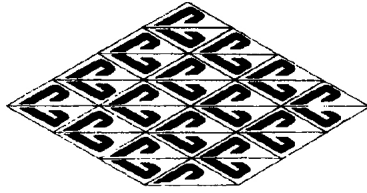


Figure 1.7.6.1

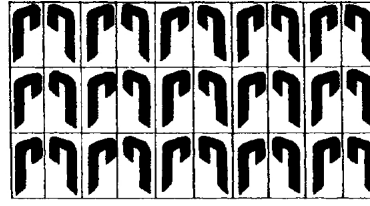


Figure 1.7.6.2

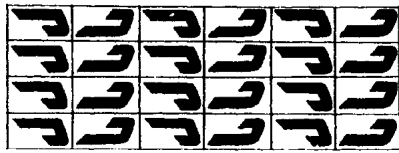


Figure 1.7.6.3

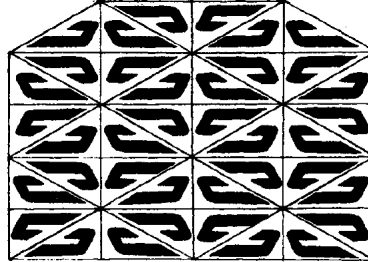


Figure 1.7.6.4

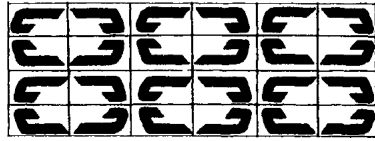


Figure 1.7.6.5

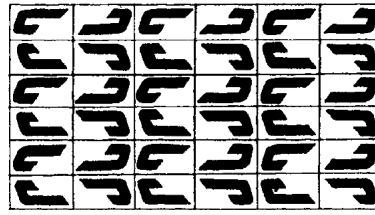


Figure 1.7.6.6

FIGURE 8. Pavages Reguliers avec symetries axiales (source Y. Brossard)

forme un pavage du plan. On dit alors que  $G$  est un groupe paveur.

REMARQUE 5.1. Si  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{P}, G)$  est un pavage associe a un groupe paveur alors  $G$  est un sous-groupe du groupe des isometries de ce pavage,

$$G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathcal{P}} = G_{\mathcal{P}}$$

. En effet pour  $g' \in G$ , l'ensemble des tuiles du pavage  $g'.\mathcal{P}$  est

$$\{g'.g.\mathbf{P}, g \in G\} = \{g''.\mathbf{P}, g'' \in G\} = \{g.\mathbf{P}, g \in G\}.$$

Notons cependant que  $G_{\mathcal{P}}$  peut etre strictement plus grand (le pavage associe au reseau  $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.i$  de groupe  $G = T(\Gamma)$  et de groupe d'isometries le groupe engendre par  $T(\Gamma)$  et par le groupe des isometries d'un carre.)

On va montrer le resultat suivant:

THÉOREME 2.5. Soit  $G$  un groupe paveur de pavage associe  $\mathcal{P}$ ; soit  $G_{\mathcal{P}}$  son groupe d'isometries. Alors  $\mathcal{P}$  est un pavage regulier (ie.  $G_{\mathcal{P}}$  est cristallographique) et  $G$  est d'indice fini dans  $G_{\mathcal{P}}$ . Par ailleurs le theoreme de Fedorov est valide pour  $G$ :  $G$  appartient a l'une des 17 classes d'isomorphisme de groupes du Theoreme de Fedorov et  $G^+$  est isomorphe a l'un des 5 groupes du Theoreme 2.2.

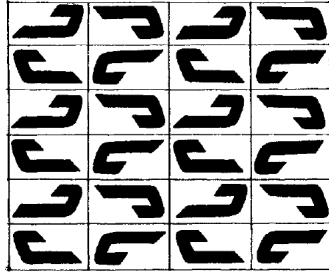


Figure 1.7.6.7

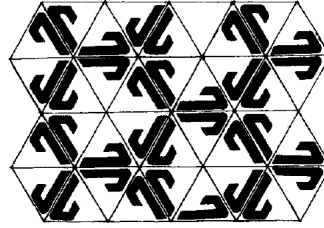


Figure 1.7.6.8

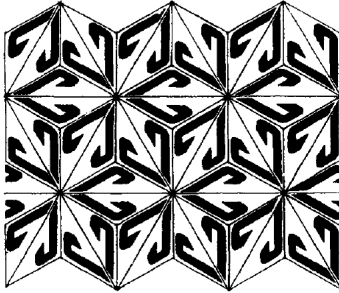


Figure 1.7.6.9

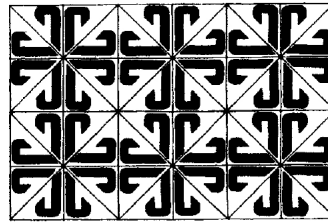


Figure 1.7.6.10

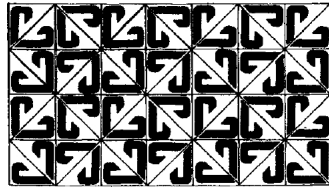


Figure 1.7.6.11

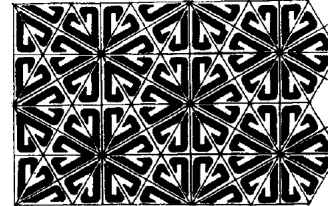


Figure 1.7.6.12

FIGURE 9. Pavages Reguliers avec symetries axiales (source Y. Brossard)

Dans la suite on note

$$T_G = T(\Gamma) \subset G^+ \subset G$$

les sous-groupes de rotations et de translations de  $G$ . On note egalement  $G_0^+ = \text{lin}(G^+)$  l'image de  $G^+$  par l'application partie lineaire. Comme precedemment on identifie  $\Gamma$  avec un sous-groupe de  $\mathbb{C}$  et  $G_0^+$  a un sous-groupe de  $\mathbb{C}^1$ .

Notons par ailleurs que l'on est dans l'un des deux cas suivants:

$$(5.1) \quad G = G^+ \text{ ou bien } G = G^+ \sqcup s.G^+$$

pour  $s \in G - G^+$  une symetrie affine .

En effet, si  $G - G^+$  est non-vide et  $s \in G - G^+$  alors  $s$  est non speciale et pour tout  $s' \in G - G^+$  alors  $s^{-1}.s' \in G \cap \text{Isom}(\mathbb{R}^2)^+ = G^+$  et  $s' \in s.G^+$ .

**5.1. Existence d'un reseau de translations dans un groupe paveur.** Pour montrer ce theoreme, l'etape la plus importante est la suivante:

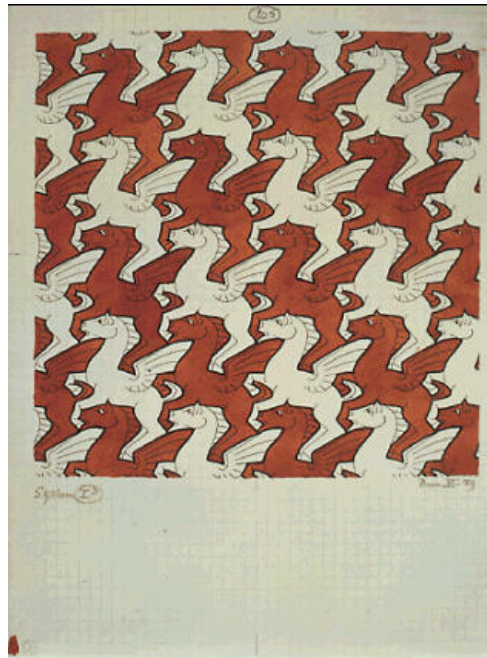
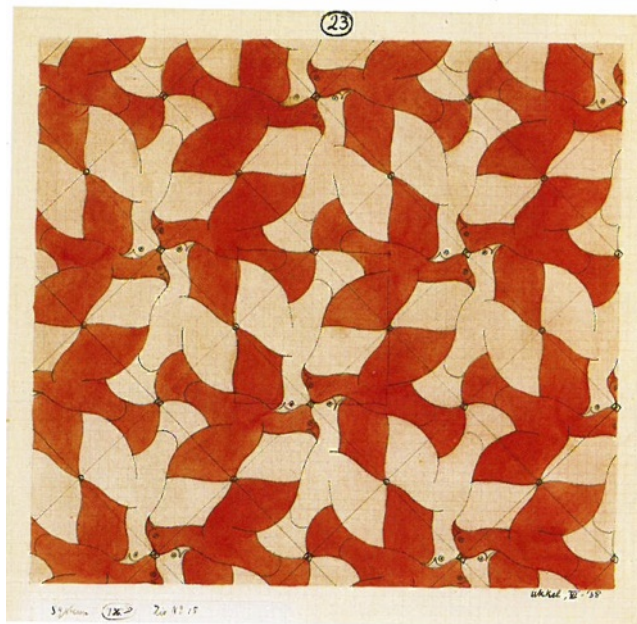
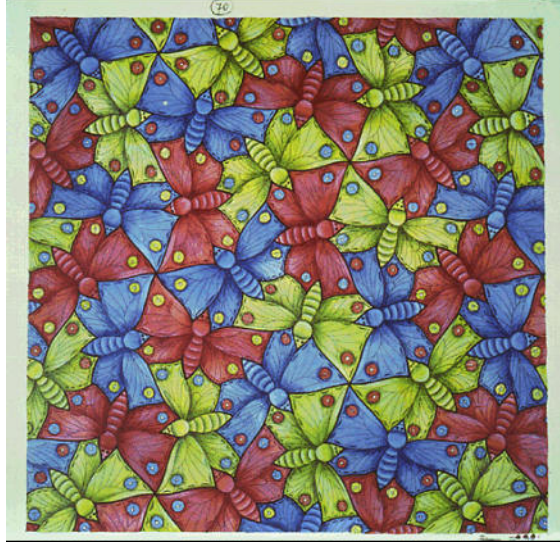
FIGURE 10. Pavages de type  $p1$  (M.C. Escher)FIGURE 11. Pavages de type  $p2$  (M.C. Escher)



FIGURE 12. Pavages de type  $p3$  (M.C. Escher)FIGURE 13. Pavages de type  $p4$  (M.C. Escher).

THÉORÈME 2.6. Soit  $G$  un groupe paveur et  $T_G = T(\Gamma)$  son sous-groupe des translations. Alors  $\Gamma$  est un réseau: il existe  $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ ,  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants tels que  $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \gamma_0 + \mathbb{Z} \cdot \gamma_1$ . En particulier  $\mathcal{P}$  est un pavage régulier.

FIGURE 14. Pavages de type  $p6$  (M.C. Escher).

PREUVE. Montrons que l'ensemble des vecteurs de translations  $\Gamma$  contient deux éléments  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants: on en déduira alors que  $\Gamma$  est un réseau en suivant la preuve du Théorème 2.3 et comme (cf. Remarque 5.1)

$$T(\Gamma) \subset G \subset G\mathcal{P}$$

on aura que  $\mathcal{P}$  est régulier.

Notons que  $G$  possède un nombre infini d'éléments: dans le cas contraire

$$\bigcup_{g \in G} g.\mathbf{P}$$

serait borné et ne pourrait recouvrir  $\mathbb{R}^2$ . On en déduit que  $G^+$  est également infini: si  $G \neq G^+$  la décomposition  $G = G^+ \sqcup s.G^+$  implique que  $G^+$  est infini si  $G$  l'est.

— Supposons que tous les éléments non-triviaux de  $G^+$  soient des rotations de même centre, alors  $G^+.\mathbf{P}$  est un ensemble de copies de  $\mathbf{P}$  tournant autour de ce centre (cf. Figure 5.1) et est entièrement contenu dans un disque et suivant (5.1),  $G.\mathbf{P}$  est soit contenu dans ce disque soit contenu dans l'union de ce disque et de son image par la symétrie  $s$ ; dans tous les cas  $G.\mathbf{P}$  est borné et ne peut recouvrir  $\mathbb{R}^2$ .

— On peut donc supposer que  $G^+$  contient deux rotations non-triviales,  $r$  et  $r'$ , de centres distincts  $z \neq z'$ . Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  leurs angles alors le commutateur de ces deux rotations

$$[r, r'] = rr'r^{-1}r'^{-1}$$

est une rotation d'angle  $[\alpha, \alpha'] = \alpha\alpha'\alpha^{-1}\alpha'^{-1} = 1$  et est donc une translation. Le vecteur de la translation est obtenu en calculant l'image d'un point: par exemple  $z'' = r'(z)$ :

$$[r, r'](r'(z)) = rr'r^{-1}(z) = r(r'(z))$$

et donc

$$[r, r'] = t_{r'(z)r(r'(z))}$$

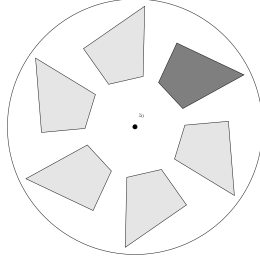


FIGURE 15.

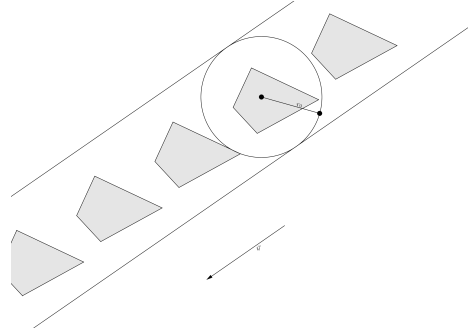


FIGURE 16.

Si le vecteur  $\gamma = \overrightarrow{r'(z)r(r'(z))}$  était nul,  $r'(z)$  serait un point fixe de  $r$  donc égal à son centre (qui vaut  $z$ ), et  $z$  serait un point fixe de  $r'$  donc égal à  $z'$ . Ainsi le vecteur  $\gamma = \overrightarrow{r'(z)r(r'(z))}$  est non-nul et la translation  $t_\gamma$  appartient à  $G$ . Ainsi  $T_G$  est non-trivial et même infini (contient  $T(\mathbb{Z}.\gamma) \simeq \mathbb{Z}.\gamma \simeq \mathbb{Z}$ ).

Montrons que  $T_G$  n'est pas contenu dans  $T(\mathbb{R}.\gamma)$  (le groupe des translations par des vecteurs colinéaires à  $\gamma$ ). On suppose donc que

$$T_G = T(\Gamma) \subset T(\mathbb{R}.\gamma)$$

et on va en déduire une contradiction.

— Si  $G^+ = T_G$ , c'est impossible car alors  $G^+.\mathbf{P}$  serait contenu dans une bande délimitée par deux droites parallèles à  $\gamma$  (cf. Figure 5.1) et alors  $G.\mathbf{P}$  serait contenu soit dans cette bande soit dans la réunion de cette bande avec son image par la symétrie  $s$  (cf. (5.1)). Dans tous les cas  $G.\mathbf{P}$  ne peut recouvrir  $\mathbb{R}^2$ .

On peut donc supposer qu'il existe une rotation affine

$$r = r_{\alpha,\nu} \in G^+$$

qui n'est pas contenue dans  $T(\mathbb{R}.\gamma)$ .

— Si son angle  $\alpha = 1$ ,  $r = t'_\gamma$  est une rotation et  $\gamma' \notin \mathbb{R}.\gamma$  et on a terminé.

— Autrement on a

$$(5.2) \quad r \circ t_\gamma \circ r^{-1} = t_{r_{\alpha,0}(\gamma)} \in T(\Gamma)$$

En effet (passant aux complexes)

$$r_\alpha \circ t_\gamma \circ r_\alpha^{-1}(z) = \alpha(\gamma + \alpha^{-1}z) = \alpha\gamma + z = t_{\alpha\gamma}(z).$$

Ainsi  $\gamma' = \alpha\gamma \in \Gamma$  et si  $\alpha \neq \pm 1$ , on a  $\gamma' \notin \mathbb{R}\gamma$  et on a termine.

— On est donc reduit au cas ou  $G^+$  n'est compose que de rotations affines d'angles  $\pm 1$ . On a exclu le cas ou  $G^+ = T_G$ , soit donc  $r = r_{-1,\nu}$  une rotation d'angle non trivial. Soit  $r' \in G^+$  alors son angle vaut  $\alpha' = \pm 1$ . Si  $\alpha' = 1$  alors  $r' \in T_G$ ; sinon  $r^{-1}.r'$  est d'angle  $(-1).(-1) = 1$  et appartient a  $T_G$ . On a donc montre que

$$G^+ \subset T_G \cup r.T_G$$

(on a en fait  $G^+ = T_G \sqcup r.T_G$ ). Il en resulte que  $G^+.\mathbf{P}$  est contenu dans la reunion de la bande contenant  $T(\mathbb{R}\gamma)(\mathbf{P})$  et de son image par  $r$  et que  $G.\mathbf{P}$  est soit contenu dans ces deux bandes soit dans la reunion de ces deux bandes et de leur image par  $s$  suivant le cas de (5.1).  $\square$

5.1.1. *Preuve du Theoreme 2.5.* Une fois qu'on a etabli que  $G$  contient un reseau de translation, la preuve suit exactement celle du Theoreme 2.2: la preuve n'utilise par le fait que  $G$  est le groupe des isometries d'un pavage; on etudie  $G_0^+ = \text{lin}(G^+)$  et on obtient 5 possibilites pour  $G_0^+$  dont on deduit 5 possibilites de classes d'isomorphismes pour  $G^+$ .

Il reste a montrer que  $G$  est d'indice fini dans  $G_{\mathcal{P}}$ . Pour cela on aura besoin du Lemme general suivant laisse (pour l'instant) en exercice.

LEMME 2.4. *Soit  $G$  un groupe et  $K \subset H \subset G$  des sous-groupes. Alors les conditions suivantes sont equivalentes:*

- (1)  $G/K$  est fini.
- (2)  $G/H$  et  $H/K$  sont finis.

deplus, on a la relation entre cardinaux

$$|G/K| = |G/H|. |H/K|.$$

On va utiliser ce Lemme pour montrer la proposition

PROPOSITION 2.5. *Soit  $\Gamma' \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^2$  deux reseaux contenus l'un dans l'autre, alors le groupe quotient ( $\Gamma$  est commutatif)  $\Gamma/\Gamma'$  est fini.*

PREUVE. Ecrivons  $\Gamma' = \mathbb{Z}\gamma'_0 + \mathbb{Z}\gamma'_1$  et  $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1$  avec  $(\gamma_0, \gamma_1)$  et  $(\gamma'_0, \gamma'_1)$   $\mathbb{R}$ -lineairement independants. Comme  $\gamma'_0, \gamma'_1$  sont contenus dans  $\Gamma$  on a

$$\gamma'_0 = a\gamma_0 + c\gamma_1, \quad \gamma'_1 = b\gamma_0 + d\gamma_1$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  mais comme  $(\gamma'_0, \gamma'_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible d'inverse

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et  $a', b', c', d' \in \mathbb{Q}$ . Posant  $\Delta = ad - bc$ , on a

$$\gamma_0 = \frac{d}{\Delta}\gamma'_0 + \frac{-c}{\Delta}\gamma'_1, \quad \gamma_1 = \frac{-b}{\Delta}\gamma'_0 + \frac{a}{\Delta}\gamma'_1.$$

Ainsi

$$\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma'' = \mathbb{Z}\frac{\gamma'_0}{\Delta} + \mathbb{Z}\frac{\gamma'_1}{\Delta}.$$

On peut alors reecrire  $\Gamma' = \Delta\Gamma''$  et posant pour  $i = 0, 1$

$$\gamma''_i = \Delta^{-1}\gamma'_i$$

on a

$$\Gamma' = \Delta\mathbb{Z}.\gamma''_0 + \Delta\mathbb{Z}.\gamma''_1 \subset \Gamma'' = \mathbb{Z}.\gamma''_0 + \mathbb{Z}.\gamma''_1.$$

L'application

$$(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto m.\gamma''_0 + n.\gamma''_1 \in \Gamma''$$

est un isomorphisme de groupe qui identifie  $(\Delta\mathbb{Z})^2$  a  $\Gamma'$ . On a donc que

$$\Gamma''/\Gamma' \simeq (\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^2$$

qui est fini d'ordre  $|\Delta|^2$ . Il en resulte par le Lemme 2.4 que  $\Gamma/\Gamma'$  est fini (d'ordre divisant et donc inferieur a  $|\Delta|^2$ ).  $\square$

On va maintenant montrer que  $G$  est d'indice fini dans  $G_{\mathcal{P}}$ : ie. que  $G_{\mathcal{P}}/G$  est fini.

On rappelle qu'on a pose  $T_G = T(\Gamma)$  avec  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  et qu'on a montrer que  $\Gamma$  est un reseau. Par ailleurs on pose  $T_{G_{\mathcal{P}}} = T(\Gamma_{\mathcal{P}})$  et on sait que  $\Gamma_{\mathcal{P}}$  est un reseau (car  $\mathcal{P}$  est regulier) contenant  $\Gamma$ . Par la Proposition 2.5 le quotient  $\Gamma_{\mathcal{P}}/\Gamma$  est fini et donc  $T_G$  est d'indice fini dans  $T_{G_{\mathcal{P}}}$ .

Notons que le quotient  $G_{\mathcal{P}}/T(\Gamma_{\mathcal{P}})$  est fini d'ordre  $\leq 12$ : en effet  $G_{\mathcal{P}}/G_{\mathcal{P}}^+$  est fini d'ordre 1 ou 2 et  $G_{\mathcal{P}}^+/T_{G_{\mathcal{P}}}$  est fini d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6 car il est isomorphe a  $G_{\mathcal{P},0}^+$ : l'application partie lineaire induit une application surjective

$$\text{lin} : G_{\mathcal{P}}^+ \mapsto G_{\mathcal{P},0}^+$$

dont le noyau est  $T_{G_{\mathcal{P}}}$  de sorte que (Thm. Noyau-Image)

$$G_{\mathcal{P}}^+/T_{G_{\mathcal{P}}} \simeq G_{\mathcal{P},0}^+.$$

Le lemme 2.4 permet alors de conclure que  $G_{\mathcal{P}}/T(\Gamma_{\mathcal{P}})$  est fini du cardinal indique (notons qu' on montre exactement de la meme maniere que  $G/T(G)$  est fini d'ordre  $\leq 12$ ).

Appliquant alors le Lemme 2.4 a la suite de groupes

$$T_G \subset T(\Gamma_{\mathcal{P}}) \subset G_{\mathcal{P}},$$

on en tire que  $G_{\mathcal{P}}/T_G$  est fini.

Appliquant encore le lemme a la suite

$$T_G \subset G \subset G_{\mathcal{P}}$$

on en tire que  $G_{\mathcal{P}}/G$  est fini.  $\square$



## CHAPITRE 3

# L'espace euclidien et ses isometries

### 1. Espaces affines

**DÉFINITION 3.1.** Soit  $G$  un groupe et  $X$  un  $G$ -ensemble.  $X$  est un espace principal homogène sous l'action de  $G$  si

- (1)  $G$  agit transitivement sur  $X$ : pour tout  $x \in X$ ,  $X = G.x$ .
- (2) Pour tout  $x \in X$ , le stabilisateur  $G_x$  est trivial.

**REMARQUE 1.1.** Si la première condition est vérifiée la seconde l'est des qu'il existe au moins un  $x$  tel que  $G_x$  est trivial: comme  $X$  est la seule orbite tous les stabilisateurs de ces éléments sont conjugués.

**PROPOSITION 3.1.** Soit  $X$  un espace principal homogène alors pour tout  $P_0 \in X$ , l'application

$$t_{\bullet}(P_0) : g \in G \mapsto g.P_0 \in X$$

est une bijection. En d'autres termes pour tout  $Q \in X$ , il existe un unique  $g \in G$  tel que

$$g.P_0 = Q.$$

L'application  $t_{\bullet}(P_0)$  est même un isomorphisme de  $G$ -ensemble pour  $G$  agissant sur lui-même par multiplication à gauche.

**Preuve:** C'est une application du Théorème orbite-stabilisateur. On a un isomorphisme de  $G$ -ensembles

$$G/G_{P_0} \simeq G.P_0$$

et  $G.P_0 = X$  car l'action est transitive alors que  $G_{P_0} = \{e_G\}$  et donc  $G/G_{P_0} = G$ . □

**PROPOSITION 3.2.** Soit  $X$  un espace principal homogène sous l'action de  $G$ . L'application

$$t_{\bullet} : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \text{Bij}(X) \\ g & \mapsto & t_g : P \rightarrow g.P \end{array}$$

est un morphisme de groupes injectif. Son image

$$t_G = T(G) \simeq G$$

est appelée le groupe des translations de  $X$  pour l'action de  $G$ .

**Preuve:** C'est un morphisme de groupes par définition d'une action de groupes. De plus, si  $t_g = \text{Id}_X$  alors pour  $P \in X$  on a  $g \in G_P = \{e_G\}$  par hypothèse. □

**DÉFINITION 3.2.** Soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $k$ ; un espace affine  $X$  sous  $V$  est un  $V$ -ensemble (quand on voit  $V$  comme le groupe additif  $(V, +)$ ) qui est un espace principal homogène; on dit que  $V$  est la direction de  $X$ . On notera cette action additivement:

$$\begin{array}{ccc} V \times X & \mapsto & X \\ (\vec{v}, P) & \mapsto & \vec{v} \oplus P \end{array}$$

Ainsi on a

$$(\vec{v} + \vec{w}) \oplus P = \vec{v} \oplus (\vec{w} \oplus P).$$

Dans cette egalite le premier "+" est la loi d'addition dans le group  $(V, +)$  et les trois " $\oplus$ " suivants sont relatifs a l'action.

- Le groupe des translations de  $X$  sous l'action de  $V$  sera note

$$T(V) = t_V = \{t_{\vec{v}} : P \in X \mapsto \vec{v} \oplus P \in X, \vec{v} \in V\} \subset \text{Bij}(X).$$

REMARQUE 1.2. Comme le groupe  $(V, +)$  est commutatif, l'action a gauche defini egale-ment une action a droite: en effet posont

$$P \oplus_d \vec{v} := \vec{v} \oplus P.$$

On a en effet pour tout  $P \in X, \vec{v}, \vec{w} \in V$

$$(P \oplus_d \vec{v}) \oplus_d \vec{w} = (\vec{v} \oplus P) \oplus_d \vec{w} = \vec{w} \oplus (\vec{v} \oplus P) = (\vec{w} + \vec{v}) \oplus P = (\vec{v} + \vec{w}) \oplus P = P \oplus_d (\vec{v} + \vec{w}).$$

On ecira donc indifferemment

$$P \oplus \vec{v} \text{ ou bien } \vec{v} \oplus P.$$

REMARQUE 1.3. Pour simplifier les notations, on ecira simplement "+" au lieu " $\oplus$ " pour designer l'action: on ecira par exemple

$$(\vec{v} + \vec{w}) + P = \vec{v} + (\vec{w} + P).$$

Dans cette egalite le premier "+" est la loi d'addition dans le group  $(V, +)$  et les trois "+" suivants sont relatifs a l'action. Au vu de la remarque precente on ecira donc

$$P + \vec{v} \text{ ou bien } \vec{v} + P.$$

DÉFINITION 3.3. Soit  $X$  un espace affine de direction  $V$ , on defini la dimension de  $X$  comme etant la dimension de  $V$ :

$$\dim(X) = \dim(V).$$

Un espace affine de dimension 0 est un point; de dimension 1 une droite; un espace affine de dimension 2 un plan.

EXEMPLE 1.1. (1) Un exemple evident d'espace affine  $X$  sous  $V$  est l'espace vectoriel  $V$  lui-meme !

(2) Dans  $k^3$ , l'ensemble des points de la forme

$$(x, y, 1), \quad x, y \in k$$

(le plan horizontal d'altitude 1) est un espace affine pour le plan horizontal

$$P_{z=0} = \{(x, y, 0), \quad x, y \in k\} = k\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2.$$

(3) Dans  $k^n$  on considere un systeme lineaire:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{l1}x_1 + \cdots + a_{ln}x_n &= y_l \end{aligned}$$



alors l'ensemble  $S$  des solutions de ce système (si il est non-vidé) est un espace affine de direction  $V$  le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène

$$V : (x_1, \dots, x_n) \in k^n \text{ tel que } \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & = & \dots \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{ln}x_n & = & 0 \end{array}$$

Tous ces exemples sont des exemples de *sous-espaces affines*

**DÉFINITION 3.4.** Soit  $X$  un espace affine de direction  $V$ ; un sous-espace affine de  $Y \subset X$  est un sous-ensemble de  $X$  qui est un espace affine de direction un sous-espace vectoriel de  $V$ ,  $W \subset V$ .

Par la Proposition 3.1 un sous-espace affine non-vidé est de la forme

$$Y = P_0 + W = \{P_0 + \vec{w}, \vec{w} \in W\}.$$

pour  $P_0 \in Y$ . En d'autre terme c'est l'orbite d'un point  $P_0$  sous l'action de  $W$  par translations. On dit que  $Y$  est le sous-espace affine de direction  $W$  passant par  $P$ .

On a  $\dim Y = \dim_k W$ .

Un sous-espace affine de dimension  $\dim Y = \dim X - 1$  est appelée *hyperplan affine*.

**1.1. Soustraction de points; notation de Chasles.** Un espace affine est donc un espace vectoriel dont on aurait "oublié" ou se trouve l'origine. En particulier on ne peut pas a priori "additionner" deux points d'un espace affine; en revanche on peut les "soustraire": étant donné  $P, Q \in X$  deux points, il existe un unique vecteur  $\vec{v} \in V$  qui envoie  $P$  sur  $Q$ , ie.  $P + \vec{v} = Q$  (cf. Prop. 3.1) et on note ce vecteur

$$Q - P \text{ ou plus traditionnellement } \overrightarrow{PQ}$$

et ainsi on a

$$P + \overrightarrow{PQ} = P + (Q - P) = Q.$$

On a alors la

**PROPOSITION 3.3** (Relation de Chasles). Pour tout  $P, Q, R \in X$  on a

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$

En particulier

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

**Preuve:** En effet  $\overrightarrow{PR}$  est caractérisé comme l'unique vecteur  $\vec{v}$  tel que

$$t_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v} = R;$$

mais comme on a une action de groupes

$$t_{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}}(P) = t_{\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ}}(P) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R.$$

□

**EXERCICE 3.1.** On dit que deux paires de points de  $X$ ,  $(P, Q)$ ,  $(R, S)$  sont équipolentes si

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}.$$

Montrer qu'alors

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}.$$

On dit alors que le quadruple  $[PQRS]$  forme un parallélogramme.

La construction precedente (prendre la "difference" de deux points pour former un vecteur) se generalise de la maniere suivante:

PROPOSITION 3.4. Soit  $n \geq 1$ ,  $P_1, \dots, P_n \in X$ ,  $n$  points et  $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$ ,  $n$  scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 0_k.$$

Alors etant donne  $P_0 \in X$  le vecteur

$$\sum_{i=1}^n \mu_i (P_i - P_0) = \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{P_0 P_i} \in V$$

ne depend pas du choix de  $P_0$ . On notera ce vecteur

$$\sum_{i=1}^n \mu_i P_i.$$

**Preuve:** Pour  $P'_0$  un autre point, calculons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_i (P_i - P'_0) - \sum_{i=1}^n \mu_i (P_i - P_0) &= \sum_{i=1}^n \mu_i ((P_i - P'_0) - (P_i - P_0)) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i (P_0 - P'_0) = \left( \sum_{i=1}^n \mu_i \right) (P_0 - P'_0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

□

REMARQUE 1.4. En prenant  $n = 2$ ,  $P_1 = P$ ,  $P_2 = Q$ ,  $\mu_1 = -1_k$ ,  $\mu_2 = 1_k$  on obtient la difference  $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ .

## 1.2. Barycentre; coordonnees barycentriques.

PROPOSITION 3.5. Soient  $X$  un espace affine,  $n \geq 1$ ,  $(P_1, \dots, P_n) \subset X^n$  un  $n$ -uple de points et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$  un  $n$ -uple de scalaires verifiant

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1_k.$$

Soit  $P_0 \in X$  un point de  $X$  alors le vecteur  $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - P_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i + (-1)P_0$  est bien defini et le point translate

$$P_0 + \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - P_0 \right) \in X$$

ne depend pas du choix de  $P_0$ . On l'appelle le barycentre (algebrique) des points  $(P_1, \dots, P_n)$  par rapport aux poids  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et on le note

$$\text{Bar}(P_1, \dots, P_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si tous les poids sont egaux ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$  de sorte que  $\sum_i \lambda_i = n \cdot \lambda_1 = 1_k$ ) on note ce barycentre

$$\text{Bar}(P_1, \dots, P_n).$$

REMARQUE 1.5. Si  $k = \mathbb{R}$  on demande souvent que les poids soient positifs ou nuls et on a la notion habituelle de barycentre; ici on travaille sur un corps general et il n'y a pas forcément de notion de positivite pour les "poids". Par exemple si  $k = \mathbb{R}$  et  $P, Q$  sont deux point du plan, l'ensemble des barycentres est l'ensemble

$$(PQ) = \{\lambda.P + (1 - \lambda).Q, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est la droite passant par  $P$  et  $Q$  (ou est reduite au point  $P$  si  $P = Q$ ). En revanche l'ensemble des barycentres a poids positifs ou nuls

$$\{\lambda.P + (1 - \lambda).Q, \lambda \geq 0, 1 - \lambda \geq 0\}$$

est le segment  $[PQ]$ .

**Preuve:** Soit  $P'_0$  un autre point; considerons la difference

$$P_0 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - P_0\right) - (P'_0 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - P'_0\right)).$$

Elle vaut

$$(P_0 - P'_0) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right) + (P'_0 - P_0) = \mathbf{0}$$

donc les deux points sont egaux. □

DÉFINITION 3.1. Soit  $X$  un espace affine de dimension  $d$  et de direction  $V$ ; un  $d+1$ -uplet de points

$$P_0, \dots, P_d \in X$$

est en position generale si les vecteurs

$$P_0\vec{P}_1, \dots, P_0\vec{P}_d \in V$$

forme une base de  $V$ . On dira que  $(P_0, \dots, P_d)$  forme une base affine de  $X$ .

DÉFINITION-PROPOSITION 3.1. Soient  $X$  un espace affine de dimension  $d$  et

$$P_0, \dots, P_d \in X$$

en position generale. Pour tout point  $P \in X$  il existe un unique  $d + 1$ -uplet

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in k^{d+1}$$

tel que

$$\lambda_0 + \dots + \lambda_d = 1$$

et

$$P = \text{Bar}(P_0, \dots, P_d; \lambda_0, \dots, \lambda_d).$$

Le  $d + 1$ -uplet  $(\lambda_0, \dots, \lambda_d)$  sont les coordonnees barycentriques de  $P$  dans la base affine  $(P_0, \dots, P_d)$ .

PREUVE. Exercice □

REMARQUE 1.6. Dans un espace affine reel de dimension 2, trois points  $P, Q, R$  sont en position general ssi ils forment un "vrai" triangle. tout point du plan peut etre realise comme un barycentre (a poids pas forcément positifs ou nuls). Les barycentres a poids positifs ou nuls sont precisement ceux contenus dans le "triangle plein".

1.2.1. *Sous-espace affine-bis.* Un sous-espace affine  $Y \subset X$  admet la définition équivalente suivante:

DÉFINITION 3.5. *Un sous-espace affine  $Y \subset X$  est un sous-ensemble de  $X$  obtenu comme l'ensemble de tous les barycentres possibles de  $n+1$  points de  $X$   $P_0, \dots, P_n \in X$  pour  $n \geq 0$  un entier:*

$$Y = \{ \text{Bar}(P_0, \dots, P_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \}.$$

On dira alors que  $Y$  est le sous-espace affine engendré par  $P_0, \dots, P_n$  ou encore passant par  $P_0, \dots, P_n$ .

REMARQUE 1.7. Avec cette définition, la direction de  $Y$  est le SEV

$$W = \langle P_0 \vec{P}_1, \dots, P_0 \vec{P}_n \rangle \subset V.$$

EXERCICE 3.2. (1) Montrer que les deux définitions 3.4 et 3.5 d'un sous-espace affine sont équivalentes.

(2) Soit  $d' = \dim W$ , montrer que de l'ensemble  $\{P_0, \dots, P_n\}$  on peut extraire un sous-ensemble  $\{P'_0, \dots, P'_d\} \subset \{P_0, \dots, P_n\}$  qui forme une base affine de  $Y$ .

### 1.3. Morphismes d'espaces affines.

DÉFINITION 3.2. *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces affines (de directions  $V$  et  $W$ ). Une application  $\varphi : X \rightarrow Y$  est dite affine si elle préserve les barycentres: pour tout  $(P_1, \dots, P_n) \subset X^n$  et tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$  vérifiant*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

on a

$$\varphi(\text{Bar}(P_1, \dots, P_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{Bar}(\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_n); \lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

On en déduit immédiatement la

PROPOSITION 3.6. *La composée de deux applications affines est affine; la réciproque d'une application affine bijective est affine.*

DÉFINITION 3.6. *On a les définitions suivantes*

– Un endomorphisme affine est une application affine d'un espace affine  $X$  sur lui-même.

– Un isomorphisme d'espaces affines est une application affine qui est bijective et dont l'application réciproque est encore affine.

– Un automorphisme affine est un isomorphisme affine d'un espace affine sur lui-même.

On l'appelle également transformation affine.

On note ses ensembles respectivement par

$$\text{Hom}_{\text{aff}}(X, Y) = A \text{Hom}(X, Y), \text{End}_{\text{aff}}(X) = A \text{End}(X), \text{Aut}_{\text{aff}}(X) = A \text{GL}(X).$$

En vertu de la proposition précédente, le dernier ensemble est un groupe appelé "groupe des automorphismes affines" ou "groupe linéaire affine".

On va maintenant discuter de la structure des applications affines:

THÉORÈME 3.1. Soit  $X, Y$  deux espace affines (de directions  $V$  et  $W$ ). Une application  $\varphi : X \rightarrow Y$  est affine si et seulement si pour  $P_0 \in X$  l'application définie par

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & W \\ \vec{v} & \mapsto & \varphi_0(\vec{v}) = \varphi(P_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0) \end{array}$$

est lineaire. Dans ce dernier cas l'application  $\varphi_0$  ne depend pas du choix du point  $P_0$ . On l'appelle la partie lineaire de  $\varphi$ . On a la formule suivante:

$$\forall P \in X, \vec{v} \in V, \varphi(P + \vec{v}) = \varphi(P) + \varphi_0(\vec{v}).$$

**Preuve:** Supposons que  $\varphi$  preserve les barycentres et montrons que l'application

$$\varphi_0(\vec{v}) = \varphi(P_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0)$$

est lineaire. On a deja  $\varphi_0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs et  $\lambda \in k$ , calculons

$$\varphi_0(\vec{u} + \lambda\vec{v}).$$

Pour cela posons  $P = P_0 + \vec{u}$ ,  $Q = P_0 + \vec{v}$  et  $\mu = 1 - (1 + \lambda)$  alors

$$\text{Bar}(P, Q, P_0; 1, \lambda, \mu) = P_0 + (P - P_0) + \lambda(Q - P_0) + \mu(P_0 - P_0) = P_0 + \vec{u} + \lambda\vec{v}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_0(\vec{u} + \lambda\vec{v}) &= \varphi(\text{Bar}(P, Q, P_0; 1, \lambda, \mu)) - \varphi(P_0) = \text{Bar}(\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(P_0); 1, \lambda, \mu) - \varphi(P_0) \\ &= (\varphi(P) + \lambda\varphi(Q) + \mu\varphi(P_0) - \varphi(P_0)) = (\varphi(P) - \varphi(P_0)) + \lambda(\varphi(Q) - \varphi(P_0)) \\ &= \varphi_0(\vec{u}) + \lambda\varphi_0(\vec{v}). \end{aligned}$$

Montrons que  $\varphi_0$  ne depend pas du choix du point  $P_0$ . Considerons  $P'_0 \in X$  et l'application

$$\varphi'_0 : \vec{v} \mapsto \varphi(P'_0 + \vec{v}) - \varphi(P'_0).$$

Montrons que  $\varphi'_0 = \varphi_0$ . On a  $P'_0 = P_0 + P_0\vec{P}'_0$  et donc

$$\begin{aligned} \varphi'_0(\vec{v}) &= \varphi(P_0 + P_0\vec{P}'_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0 + P_0\vec{P}'_0) = \varphi(P_0 + P_0\vec{P}'_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0) - (\varphi(P_0 + P_0\vec{P}'_0) - \varphi(P_0)) \\ &= \varphi_0(P_0\vec{P}'_0 + \vec{v}) - \varphi_0(P_0\vec{P}'_0) = \varphi_0(\vec{v}) + \varphi_0(P_0\vec{P}'_0) - \varphi_0(P_0\vec{P}'_0) = \varphi_0(\vec{v}) \end{aligned}$$

car l'application  $\varphi_0$  est lineaire. Ainsi comme  $\varphi_0$  ne depend pas du choix du point  $P_0$  en prenant un point  $P$  arbitraire on a

$$\varphi(P + \vec{v}) = \varphi(P) + \varphi_0(\vec{v}).$$

Supposons que  $\varphi$  verifie l'hypothese du theoreme et considerons l'image d'un barycentre:

$$\begin{aligned} \varphi(\text{Bar}(P_1, \dots, P_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)) &= \varphi(P_0 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - P_0\right)) = \varphi(P_0) + \varphi_0\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - P_0\right) \\ &= \varphi(P_0) + \varphi_0\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0)\right) = \varphi(P_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_0(P_i - P_0) \\ &= \varphi(P_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\varphi(P_i) - \varphi(P_0)) \\ &= \text{Bar}(\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_n); \lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Dans ce calcul on a utilise la linearite de  $\varphi_0$ . □

On a le corollaire suivant:

**COROLLAIRE 3.1.** *Soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel et  $\varphi$  un endomorphisme affine de  $V$  sur  $V$  alors  $\varphi$  se décompose de manière unique sous la forme*

$$\varphi = t_{\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi_0$$

ou  $\varphi_0$  est la partie linéaire.

**Preuve:** On a

$$\forall \vec{v} \in V, \varphi(\mathbf{0} + \vec{v}) = \varphi(\mathbf{0}) + \varphi_0(\vec{v}) = t_{\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi_0(\vec{v}).$$

□

**PROPOSITION 3.7** (Composition d'applications affines). *Soit  $X, Y, Z$  des espaces affines et  $\varphi : X \rightarrow Y$  et  $\psi : Y \rightarrow Z$  des applications affines alors  $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$  est affine et sa partie linéaire est*

$$(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0.$$

– Supposons que  $\varphi : X \rightarrow Y$  est bijective alors sa réciproque  $\varphi^{-1}$  est affine et

$$(\varphi^{-1})_0 = \varphi_0^{-1}.$$

**Preuve:** Le fait que la composée de deux applications affines est affine vient qu'elles préservent les barycentres et idem de leur composée. Calculons la partie linéaire: on a pour tout  $P_0 \in X$

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(P_0 + \vec{v}) &= \psi(\varphi(P_0) + \varphi_0(\vec{v})) \\ &= \psi(\varphi(P_0)) + \psi_0(\varphi_0(\vec{v})) = \psi \circ \varphi(P_0) + \psi_0 \circ \varphi_0(\vec{v}) \end{aligned}$$

Ainsi la partie linéaire de  $\psi \circ \varphi$  vaut

$$\vec{v} \mapsto (\psi \circ \varphi)_0(\vec{v}) = \psi_0(\varphi_0(\vec{v})).$$

Soit  $W$  la direction de  $Y$ . Supposons  $\varphi$  affine et bijective alors l'application

$$\varphi_0 : \vec{v} \mapsto \varphi(P_0 + \vec{v}) - \varphi(P_0)$$

est linéaire; elle est bijective car elle est composée de trois applications bijectives:  $\vec{v} \in V \mapsto P_0 + \vec{v} \in X$ ,  $\varphi : X \rightarrow Y$  et  $Q \in Y \mapsto Q - \varphi(P_0)$ . Comme  $\varphi_0$  est linéaire, sa réciproque  $\varphi_0^{-1}$  est linéaire et comme

$$\varphi_0(\varphi^{-1}(Q_0 + \vec{w}) - \varphi^{-1}(Q_0)) = \varphi(\varphi^{-1}(Q_0 + \vec{w})) - \varphi(\varphi^{-1}(Q_0)) = Q_0 + \vec{w} - Q_0 = \vec{w}$$

on a

$$\varphi_0^{-1}(\vec{w}) = \varphi^{-1}(Q_0 + \vec{w}) - \varphi^{-1}(Q_0)$$

soit

$$\varphi^{-1}(Q_0 + \vec{w}) = \varphi^{-1}(Q_0) + \varphi_0^{-1}(\vec{w})$$

est affine.

□

On déduit cette proposition le corollaire suivant concernant les isomorphismes affines:

**COROLLAIRE 3.2.** *L'application "partie linéaire"  $\text{lin} : \varphi \in \text{AGL}(X) \mapsto \varphi_0 \in \text{GL}(V)$  est un morphisme de groupe de noyau le groupe des translations  $T(V)$ . En particulier  $T(V)$  est distingué dans  $\text{AGL}(X)$ .*

**Preuve:** Par la proposition precedente appliquee a  $X = Y = Z$ ,  $\text{lin}$  est un morphisme de groupes. Comme

$$t_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u},$$

on a pour tout  $\vec{v} \in V$

$$\text{lin}(t_{\vec{u}})(\vec{v}) = \overrightarrow{t_{\vec{u}}(P_0)t_{\vec{u}}(P_0 + \vec{v})} = P_0 + \vec{v} + \vec{u} - (P_0 + \vec{u}) = \vec{v} = \text{Id}_V(\vec{v}).$$

Reciproquement si  $\text{lin}(\varphi) = \text{Id}$  on a

$$\varphi(P) = \varphi(P_0 + P - P_0) = \varphi(P_0) + \varphi_0(P - P_0) = \varphi(P_0) + P - P_0 = P + \varphi(P_0) - P_0 = P + \overrightarrow{P_0\varphi(P_0)}$$

et donc

$$\varphi = t_{\overrightarrow{P_0\varphi(P_0)}}$$

et  $\ker(\text{lin}) = T(V)$ . □

On utilisera egalement le

**LEMME 3.1.** *Deux applications affines  $\varphi, \varphi' : X \rightarrow Y$  de meme partie lineaire  $\varphi_0$  sont egales si et seulement si elles sont egales en un point.*

**Preuve:** Supposons que  $\varphi(P_0) = \varphi'(P_0)$  alors  $\forall x \in X$

$$\varphi(P) = \varphi(P_0) + \varphi_0(P - P_0) = \varphi'(P_0) + \varphi_0(P - P_0) = \varphi'(P_0) + \varphi'_0(P - P_0) = \varphi'(P).$$

□

#### 1.4. Sous-espaces associes a une application affine.

**COROLLAIRE 3.3.** *Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une application affine.*

- Son image  $Y' = \text{Im } \varphi$  est un sous-espace affine de  $Y$  sous l'action de  $W' = \text{Im } \varphi_0$ .
- Pour tout  $y \in Y$ , la preimage

$$\varphi^{-1}(\{y\}) = \{x \in X, \varphi(x) = y\}$$

est soit l'ensemble vide (si  $y \notin \text{Im}(\varphi)$ ) ou un sous-espace affine de  $X$  de direction  $\ker(\varphi_0)$ .

- On a la relation

$$\dim X = \dim V = \dim(\ker \varphi_0) + \dim(\text{Im } \varphi).$$

- Plus generalement, l'image et la preimage d'un sous-espace affine de  $X$  (resp.  $Y$ ) est un sous espace affine (eventuellement l'ensemble vide pour la preimage).

**Preuve:** soit  $P_0 \in X$  alors

$$X = P_0 + V = \{P_0 + \vec{v}, \vec{v} \in V\}$$

et on a

$$\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(P_0 + \vec{v}), \vec{v} \in V\} = \{\varphi(P_0) + \varphi_0(\vec{v}), \vec{v} \in V\} = \varphi(P_0) + \varphi_0(V) = \varphi(P_0) + \text{Im}(\varphi_0).$$

soit  $Q \in Y$ . Si  $Q \notin \text{Im } \varphi$  alors  $\varphi^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ . Sinon, il existe  $P_0 \in X$  tel que  $\varphi(P_0) = Q$  ; on a pour  $P \in X$

$$\varphi(P) = Q \iff \varphi(P) - \varphi(P_0) = \varphi_0(P - P_0) = \mathbf{0} \iff P - P_0 \in \ker(\varphi_0) \iff P \in P_0 + \ker(\varphi_0).$$

Le troisieme enonce resulte du theoreme noyau-image (d'algebre lineaire) et des definitions. Le dernier est similaire. □

REMARQUE 1.8. Ce corollaire a un contenu tres concret: considerons dans  $k^n$  un systeme lineaire

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\dots = \dots \\ a_{l1}x_1 + \cdots + a_{ln}x_n &= y_l \end{aligned}$$

La matrice  $(a_{ij})_{i \leq l, j \leq n}$  defini une application lineaire (donc affine) de  $k^n$  dans  $k^l$  et resoudre le systeme est equivalent a trouver la preimage du vecteur  $(y_1, \dots, y_l)$ . On sait que toute solution est la somme d'une solution particulier et d'une solution du systeme ou tous les  $y_i$  sont nuls (un element du noyau).

COROLLAIRE 3.4. Une application affine  $\varphi : X \rightarrow Y$  est

- injective si et seulement si  $\varphi_0$  l'est (c.a.d  $\ker \varphi_0 = \{0_V\}$ ).
- surjective si et seulement si  $\varphi_0$  l'est et donc ssi  $\ker \varphi_0 = \{0_V\}$ .
- surjective si et seulement si  $\dim \text{Im } \varphi = \dim Y$  et ssi  $\dim \text{Im}(\varphi_0) = \dim(W)$ .
- un isomorphisme affine si et seulement si  $\varphi_0$  est bijective.

**Preuve:** Notons  $V$  et  $W$  les directions de  $X$  et  $Y$ ;  $\varphi$  est injective si et seulement si pour tout  $Q \in Y$   $\varphi^{-1}(\{Q\})$  est vide ou possede 1 element. Supposons  $\varphi^{-1}(\{Q\})$  non-vide alors pour  $P_0$  un element de cet espace on a

$$\varphi^{-1}(\{Q\}) = P_0 + \ker \varphi_0$$

est reduit a un point si et seulement si  $\ker \varphi_0 = \{0_V\}$ .

On a

$$\varphi(X) = \varphi(P_0) + \text{Im}(\varphi_0) = Y \iff \text{Im}(\varphi_0) = W.$$

Le derniere enonce est une combinaison des deux precedents. □

## 2. L'espace euclidien

Soit  $n \geq 1$ , on considere l'espace vectoriel reel  $\mathbb{R}^n$ . C'est un espace affine par rapport a son action sur lui-meme par translation. Les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^n$  sont obtenus comme orbite d'un point sous l'action d'un sous-espace vectoriel.

Par exemple pour  $n = 3$  le cas principal de ce chapitre, on a

- les points (de dimension 0)  $P_0 = P_0 + \mathbf{0}$
- les droites affines (de dimension 1)

$$D(P_0, \vec{v}) = P_0 + \mathbb{R}.\vec{v} = \{P_0 + t\vec{v} = (x_0 + \lambda v_1, y_0 + \lambda v_2, z_0 + \lambda v_3), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

pour  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

- les plan affines (de dimension 2) de la forme

$$\begin{aligned} P(P_0, \vec{v}, \vec{w}) &= P_0 + \mathbb{R}.\vec{v} + \mathbb{R}.\vec{w} = \{P_0 + \lambda\vec{v} + \mu.\vec{w} \\ &= (x_0 + \lambda v_1 + \mu w_1, y_0 + \lambda v_2 + \mu w_2, z_0 + \lambda v_3 + \mu w_3), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

pour  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  deux vecteurs lineairement independents.

- L'espace affine  $\mathbb{R}^3 = \mathbf{0} + \mathbb{R}^3$ .

L'espace affine  $\mathbb{R}^n$  est dit *euclidien* quand on lui ajoute comme structure supplementaire:



### 2.1. La distance euclidienne.

DÉFINITION 3.7. La longueur euclidienne d'un vecteur  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$  est donnée par

$$\|\vec{u}\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

La distance euclidienne dans l'espace affine  $\mathbb{R}^n$  est la fonction

$$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$$

donnée pour  $P = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Q = (x'_1, \dots, x'_n)$  par

$$d(P, Q) = ((x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2)^{1/2} = \|\vec{PQ}\|.$$

THÉORÈME 3.2. La fonction longueur (resp. distance) a les propriétés suivantes

- Séparation des points: pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $P, Q \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \mathbf{0}, \quad d(P, Q) = 0 \iff P = Q.$$

- Inégalité du triangle:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \quad d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$$

avec égalité si et seulement si  $P, Q, R$  sont alignés (cad  $\vec{PQ}$  et  $\vec{PR}$  sont proportionnels) et que  $Q$  est "entre"  $P$  et  $R$  (ie contenu dans le segment

$$[P, R] = \{Q = \lambda.P + (1 - \lambda).R, \lambda \in [0, 1]\}.$$

- Homogénéité:

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|, \quad d(\lambda.P, \lambda.Q) = |\lambda|d(P, Q)$$

avec  $\lambda.P = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$  l'image de  $P$  par l'homothétie de centre  $\mathbf{0}$  et de rapport  $\lambda$ :  $\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ .

DÉFINITION 3.8. Étant donné  $P \in \mathbb{R}^n$  et  $r \geq 0$ , la sphère de centre  $P$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points de l'espace à distance  $r$  de  $P$

$$\mathcal{S}(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^n, d(P, Q) = r\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1 - x_{1,P})^2 + \dots + (x_n - x_{n,P})^2 = r^2\}.$$

La boule (ou sphère pleine) fermée de centre  $P$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points de l'espace à distance inférieure ou égale  $r$  de  $P$

$$\mathcal{B}(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^n, d(P, Q) \leq r\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1 - x_{1,P})^2 + \dots + (x_n - x_{n,P})^2 \leq r^2\}.$$

La boule (ou sphère pleine) ouverte de centre  $P$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points de l'espace à distance inférieure ou égale  $r$  de  $P$

$$\mathcal{B}(P, r)^\circ = \{Q \in \mathbb{R}^n, d(P, Q) < r\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1 - x_{1,P})^2 + \dots + (x_n - x_{n,P})^2 < r^2\}.$$

Dans le Théorème ci-dessus, le seul point non évident est l'inégalité du triangle. Elle peut être vérifiée "à la main" mais il est plus utile (notamment en vue de généralisations) de la démontrer en introduisant une structure supplémentaire:

**Produit scalaire.** Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{v} = (x'_1, \dots, x'_n)$  est donne par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n.$$

On a donc

$$(2.1) \quad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2.$$

Rappelons que le produit scalaire est

– symetrique:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle,$$

– bilineaire:

$$\langle \lambda \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\langle \vec{w}, \lambda \vec{u} + \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle.$$

– Defini-Positif:

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \text{ avec egalite ssi } \vec{u} = \mathbf{0}.$$

On deduit de (2.1), de la symetrie et de la bilinearite, les relations dites de *polarisation*

$$(2.2) \quad \|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$(2.3) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$(2.4) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

PROPOSITION 3.8 (Inegalite de Cauchy-Schwarz). *On a*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

avec egalite si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont proportionels:  $\vec{u} = \mathbf{0}$  et alors  $\vec{u} = 0 \cdot \vec{v}$  ou bien

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

PREUVE. On peut supposer  $\vec{u} \neq \mathbf{0}$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  considerons la fonction

$$P : \lambda \mapsto \|\lambda \vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\lambda \vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda^2 \|\vec{u}\|^2 + 2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.$$

C'est un polynome a coefficients reels de degre 2 (car  $\|\lambda \vec{u}\|^2 \neq 0$ ) et a valeurs positives ou nulles. La derivee de  $P$  s'annule en

$$\lambda_0 = -\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle / \|\vec{u}\|^2$$

et on a

$$0 \leq \|\lambda_0 \vec{u} + \vec{v}\|^2 = P(\lambda_0) = (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 - 2(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 / \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = -(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 / \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

d'où l'inegalite de Cauchy-Schwarz.

En cas d'egalite, on a

$$P(\lambda_0) = \|\lambda_0 \vec{u} + \vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \vec{v} = -\lambda_0 \vec{u}.$$

□

PREUVE. (de l'inegalite du triangle): soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , on a par l'inegalite de Cauchy-Schwarz

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$

□

2.1.1. *Espace affine euclidien.* Soit  $X$  un espace affine de direction  $V = \mathbb{R}^n$ . On defini une distance sur  $X$  en posant

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\|$$

(en rappelle que  $\vec{PQ}$  est l'unique vecteur de  $\mathbb{R}^n$  envoyant  $P$  sur  $Q$ ). Muni de cette application distance,  $X$  devient un espace (affine) euclidien .

EXERCICE 3.3. Montrer que

$$d(\cdot, \cdot) : X \times X \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (P, Q) \mapsto d(P, Q) = \|\vec{PQ}\|$$

est bien une distance sur  $X$ .

## 2.2. Orthogonalite.

DÉFINITION 3.9. Deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , sont dit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux ou perpendiculaires

PROPOSITION 3.9. Soient  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \in \mathbb{R}^n$   $m$  vecteurs non-nuls deux a deux perpendiculaires alors  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  est libre et en particulier  $m \leq n$ . Si  $m = n$  ces vecteurs forment une base.

**Preuve:** Supposons que

$$\vec{u} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{e}_m = \vec{0}.$$

Pour tout  $i$  on a

$$\langle \vec{u}, \mathbf{e}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 0$$

donc  $\lambda_i = 0$  (car  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle \neq 0$ ). Ainsi la famille est libre. □

DÉFINITION 3.10. Une telle famille  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  de vecteurs perpendiculaires est appelee famille orthogonale (ou famille de vecteurs orthogonaux).

- Si de plus les vecteurs sont tous de longueur 1 (unitaires) on dit que la famille est orthonormee.
- Si  $m = n$  cette famille est une base et est appelee base orthogonale (et est dite orthonormee si la famille est orthonormee)

EXEMPLE 2.1. La base canonique  $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{0,2}, \mathbf{e}_{0,3})$  est orthonormee.

REMARQUE 2.1. Une famille  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  est orthonormee si et seulement si

$$\forall i, j \leq m, \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

On rappelle que  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

L'interet d'une base orthonormee est que l'on a une formule explicite pour les coefficients de la decomposition de tout vecteur en combinaison lineaire de cette base:

PROPOSITION 3.10. Soit  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  la decomposition en combinaison lineaire de cette base s'ecrit

$$\vec{x} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n,$$

avec

$$(2.5) \quad \lambda_i = \frac{\langle \vec{x}, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle}, \quad i = 1, \dots, n.$$

En particulier si la base est orthonormee (ie.  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) on a la formule simplifiee

$$(2.6) \quad \lambda_i = \langle \vec{x}, \mathbf{e}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Preuve:** Par bilinearite du produit scalaire et orthogonalite des  $\mathbf{e}_i$ , on a

$$\langle \vec{x}, \mathbf{e}_i \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i \rangle + \dots + \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle$$

et  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle \neq 0$  car  $\mathbf{e}_i \neq 0$ . □

2.2.1. Le procede de Gramm-Schmidt.

PROPOSITION 3.11. Soit  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ , il existe une base orthonormee  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  telle que

$$\mathbb{R}\mathbf{e}_1 = \mathbb{R}\vec{u}_1, \quad \mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \mathbb{R}\mathbf{e}_2 = \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2, \dots, \mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{e}_n = \mathbb{R}\vec{u}_1 + \dots + \mathbb{R}\vec{u}_n = \mathbb{R}^n.$$

**Preuve:** Cf. le cours Algebre Lineaire Avancee. □

COROLLAIRE 3.5 (Completion en une base orthonormee). Soit  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  une famille orthonormee de  $\mathbb{R}^n$  alors il existe des vecteurs  $\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  tels que  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  soit base orthonormee de  $\mathbb{R}^n$ .

**Preuve:** La famille  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  est libre, on peut donc la completer en une base: il existe des vecteurs  $\vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_n$  tels que  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_n)$  forme une base de  $\mathbb{R}^n$ . On applique alors le procede de Gramm-Schmidt a la base ci-dessus et on obtient une base orthonormee  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ . Montrons par recurrence que pour tout  $i = 1, \dots, m$

$$(2.7) \quad \mathbf{e}'_i = \varepsilon_i \mathbf{e}_i \text{ avec } \varepsilon_i = \pm 1.$$

Pour  $i = 1$  on a

$$\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$$

et

$$\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1 \rangle = 1 = \lambda_1^2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \lambda_1^2 \implies \lambda_1 = \pm 1.$$

Supposons demontre la formule (2.7) pour tout  $1 \leq i' \leq i \leq m-1$  et montrons cette formule pour  $i+1$ : comme  $\mathbf{e}'_{i+1}$  appartient a l'espace vectoriel engendre par  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i+1}$  on a

$$(2.8) \quad \mathbf{e}'_{i+1} = \sum_{j=1}^{i+1} \lambda_{i+1,j} \mathbf{e}_j$$

avec la formule

$$\lambda_{i+1,j} = \langle \mathbf{e}'_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Comme la base  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  est orthonormee, on a

$$\langle \mathbf{e}'_{i+1}, \mathbf{e}'_j \rangle = 0, \quad j \leq i$$

et comme chaque  $\mathbf{e}_j$  est combinaison lineaire des  $\mathbf{e}'_{j'}$ ,  $j' \leq j$  on a

$$\langle \mathbf{e}'_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle = 0, \quad j \leq i$$

et donc (2.8) se reduit a

$$\mathbf{e}'_{i+1} = \lambda_{i+1,i+1} \mathbf{e}_{i+1}$$

et comme precedemment on conclut que  $\lambda_{i+1,i+1} = \pm 1$ . Ainsi on a une base orthonormee de la forme

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\varepsilon_1 \mathbf{e}_1, \dots, \varepsilon_m \mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_{m+1}, \dots, \mathbf{e}'_n)$$

mais si  $(\varepsilon_1 \mathbf{e}_1, \dots, \varepsilon_m \mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_{m+1}, \dots, \mathbf{e}'_n)$  est orthonormee alors  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_{m+1}, \dots, \mathbf{e}'_n)$  est orthonormee. □

### 3. La structure du groupe des isometries

**DÉFINITION 3.11.** *Une application  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une isometrie si elle preserve la distance euclidienne:*

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^n, \quad d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q).$$

– *On note*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \text{ telles que } \forall P, Q \in \mathbb{R}^n, \quad d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)\}$$

*l'ensemble des isometries.*

– *On note egalement*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_\mathbf{0} = \{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\},$$

*le sous-ensemble des isometries qui fixent le vecteur nul  $\mathbf{0}$ .*

**EXEMPLE 3.1.** *Toute translation est une isometrie; ainsi on a l'inclusion*

$$T(\mathbb{R}^n) \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n).$$

En effet pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$d(P + \vec{v}, Q + \vec{v}) = \|\overrightarrow{P + \vec{v}, Q + \vec{v}}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q).$$

**THÉORÈME 3.3.** *Une isometrie  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  est une transformation affine (une application affine bijective). Ainsi on a la inclusions*

$$T(\mathbb{R}^n), \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_\mathbf{0} \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \subset AGL(\mathbb{R}^n)$$

*( $AGL(\mathbb{R}^n)$  etant le groupe des transformations affines).*

– *En fait  $T(\mathbb{R}^n), \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_\mathbf{0}, \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  sont des sous groupes de  $AGL(\mathbb{R}^n)$  et  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_\mathbf{0}$  est un sous-groupe du groupe  $GL(\mathbb{R}^n)$  des applications lineaires inversibles.*

– *Le sous-groupe  $T(\mathbb{R}^n)$  est distingue dans  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  et  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  est engendre par ses deux sous-groupes,*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(\mathbb{R}^n) \circ \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_\mathbf{0}.$$

*Plus precisement, toute isometrie  $\varphi$  se decompose de maniere unique sous la forme*

$$\varphi = t \circ \varphi_0, \quad t = t_{\varphi(\mathbf{0})} \in T(\mathbb{R}^n), \quad \varphi_0 = t_{-\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_\mathbf{0}$$

*ou  $\varphi_0$  est la partie lineaire de  $\varphi$ .*

Le resultat intermediaire suivant est tout aussi important:

**THÉORÈME 3.4.** *Les isometries fixant l'origine  $\mathbf{0}$  sont des applications lineaires sur  $\mathbb{R}^n$ : si  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$  on a pour tout  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{v} = (x'_1, \dots, x'_n)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

*Ces applications sont bijectives:*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}} \subset \text{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Le theoreme precedent induit la definition suivante:

**DÉFINITION 3.12.** *L'ensemble  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$  s'appelle l'ensemble des isometries lineaires de l'espace. Par opposition un element general de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  sera appele "isometrie affine".*

La preuve de ce theoreme repose sur la

**PROPOSITION 3.12.** *Soit  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ , alors  $\varphi$  preserve la longueur des vecteurs ainsi que leur produit scalaire:*

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|, \langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

**PREUVE.** Soit  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ , et  $\vec{v} = \mathbf{0}\vec{P}$  un vecteur, on a

$$\|\varphi(\vec{v})\| = d(\mathbf{0}, \varphi(P)) = d(\varphi(\mathbf{0}), \varphi(P)) = d(\mathbf{0}, P) = \|\vec{v}\|.$$

On a pour  $\vec{w} = \mathbf{0}\vec{Q}$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \rangle &= \frac{1}{2}(\|\varphi(\vec{v})\|^2 + \|\varphi(\vec{w})\|^2 - \|\varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{w})\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - d(\varphi(P), \varphi(Q))^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - d(P, Q)^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle. \end{aligned}$$

□

**Preuve du Theoreme 3.4.** Soit  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \|\varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v}) - (\lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}))\|^2 &= \|\varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v})\|^2 + \|\lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})\|^2 \\ &\quad - 2\langle \varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v}), \lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) \rangle \\ &= \|\lambda\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \lambda^2\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\lambda\langle \lambda\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} \rangle - 2\langle \lambda\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2\lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\lambda\vec{u} + \vec{v} - (\lambda\vec{u} + \vec{v})\|^2 = 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

De plus  $\varphi$  est bijective car elle est injective: soient  $P, Q \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(P) = \varphi(Q) \Rightarrow d(\varphi(P), \varphi(Q)) = 0 = d(P, Q) \Rightarrow P = Q$$

et une application lineaire entre espace vectoriels de meme dimension qui est injective est surjective. □

**Preuve du Theoreme 3.3.** – L'identite  $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  est une isometrie.

– Les translations sont des isometries:

$$d(P + \vec{v}, Q + \vec{v}) = \|\overrightarrow{P + \vec{v}Q + \vec{v}}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q)$$

et donc  $T(\mathbb{R}^n) \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ .

– Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des isometries alors

$$\forall P, Q, d(\varphi \circ \psi(P), \varphi \circ \psi(Q)) = d(\psi(P), \psi(Q)) = d(P, Q)$$

donc  $\varphi \circ \psi$  est une isometrie et l'ensemble des isometries est stable par composition.

– Une isometrie est bijective et sa reciproque est une isometrie: soit  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  et  $\vec{v} = \varphi(\mathbf{0})$  alors

$$t_{-\vec{v}} \circ \varphi(\mathbf{0}) = t_{-\vec{v}}(\vec{v}) = \mathbf{0}$$

ainsi  $\varphi_0 = t_{-\vec{v}} \circ \varphi$  est une isometrie fixant l'origine; elle est donc lineaire et bijective: ainsi  $\varphi = t_{\vec{v}} \circ \varphi_0$  est bijective. Son application reciproque est une isometrie:

$$\forall P, Q, d(\varphi^{-1}P, \varphi^{-1}Q) = d(\varphi \circ \varphi^{-1}P, \varphi \circ \varphi^{-1}Q) = d(P, Q).$$

Par ailleurs  $\varphi$  est affine car composee de deux applications affines.

Ainsi  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  est un sous-groupe du groupe des transformations  $AGL(\mathbb{R}^n)$  et comme  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  est le stabilisateur de  $\mathbf{0}$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  c'est un sous-groupe ainsi que le groupe des translations  $T(\mathbb{R}^n)$ . Par ailleurs le groupe  $T(\mathbb{R}^n)$  est distingue dans  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  car il l'est dans  $AGL(\mathbb{R}^n)$  (voir ci-dessous pour une repetition de la preuve de ce dernier fait.)

On a pour tout  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\varphi = t_{\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi_0$$

avec  $\varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  et la decomposition de  $\varphi$  en une translation et une isometrie lineaire est unique car

$$T(\mathbb{R}^n) \cap \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 = \{\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\}$$

(en effet  $T(\mathbb{R}^n) \cap \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0 \subset T(\mathbb{R}^n) \cap GL(\mathbb{R}^n) = \{\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\}$ ) et donc, si

$$t \circ \varphi_0 = t' \circ \varphi'_0 \Rightarrow t'^{-1} \circ t = \varphi'_0 \circ \varphi_0^{-1} \Rightarrow t'^{-1} \circ t = \varphi'_0 \circ \varphi_0^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

□

On deduit de cette decomposition le corollaire suivant qui est tres utile:

**COROLLAIRE 3.6.** *L'application*

$$\text{lin} : \cdot_0 : \begin{array}{ccc} \text{Isom}(\mathbb{R}^n) & \mapsto & \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 \\ \varphi & \mapsto & \varphi_0 \end{array}$$

*qui a une isometrie associe sa partie lineaire est un morphisme de groupes dont le noyau est le groupe (distingue) des translations  $T(\mathbb{R}^n)$*

**Preuve:** Soit

$$\varphi = t \circ \varphi_0, \psi = t' \circ \psi_0$$

alors

$$\varphi \circ \psi = (t \circ \varphi_0 \circ t' \circ \psi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ \psi_0).$$

Notons que  $\varphi_0 \circ t' \circ \psi_0^{-1} = \text{Ad}(\varphi_0)(t')$  est encore une translation: soit  $t' = t_{\vec{u}'}$ , on a

$$\varphi_0 \circ t' \circ \psi_0^{-1}(P) = \varphi_0(\varphi_0^{-1}(P) + \vec{u}') = \varphi_0(\varphi_0^{-1}(P)) + \varphi_0(\vec{u}') = P + \varphi_0(\vec{u}') = t_{\varphi_0(\vec{u}')} (P)$$

(on a utilise le fait que  $\varphi_0$  est lineaire.) Ainsi

$$\varphi \circ \psi = t \circ t_{\varphi_0(\vec{u}')} \circ \varphi_0 \circ \psi_0$$

est decomposee en une translation et une isometrie lineaire  $\varphi_0 \circ \psi_0$ . Par unicite c'est la partie lineaire de  $\varphi \circ \psi$ . Toujours par unicite  $\varphi$  est de partie lineaire triviale si et seulement si  $\varphi$  est une translation.  $\square$

Ainsi, grace a ce corollaire, si on doit identifier une isometrie affine qui est un produits d'isometries connues, on obtient sa partie lineaire en composant les parties lineaires de ses constituants. On peut calculer ensuite la partie translation.

#### 4. Le groupe des isometries lineaires et des matrices orthogonales

**THÉORÈME 3.5.** *Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application lineaire. Alors  $\varphi$  est une isometrie ssi l'un des conditions suivantes est satisfaite:*

- (1)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ .
- (2)  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ .
- (3)  $\varphi$  est inversible et  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle$ .
- (4)  $\varphi$  transforme la base canonique  $(\mathbf{e}_i^0)_{i \leq n}$  en une base orthonormee  $(\varphi(\mathbf{e}_i^0))_{i \leq n}$ .
- (5)  $\varphi$  transforme toute base orthonormee  $(\mathbf{e}_i)_{i \leq n}$  en une base orthonormee  $(\varphi(\mathbf{e}_i))_{i \leq n}$ .

**PREUVE.** On a deja vu que si  $\varphi$  est une isometrie fixant l'origine alors  $\varphi$  preserve le produit scalaire et la longueur. Supposons que  $\varphi$  preserve la longueur alors comme  $\varphi$  est lineaire

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^n, d(\varphi(P), \varphi(Q)) = \|\varphi(Q) - \varphi(P)\| = \|\varphi(Q - P)\| = \|Q - P\| = d(P, Q)$$

et  $\varphi$  est une isometrie (et donc preserve le produit scalaire).

Montrons l'equivalence avec (3): si  $\varphi$  est une isometrie lineaire on a vu que  $\varphi$  est inversible et  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\varphi^{-1}(\vec{v})) \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle.$$

Reciproquement si (3) est verifiee, on a

$$\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\varphi(\vec{v})) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Soit  $\varphi$  isometrie lineaire et  $(\mathbf{e}_i)_{i \leq n}$  un base orthonormee, on a pour  $i, j \leq n$

$$\langle \varphi(\mathbf{e}_i), \varphi(\mathbf{e}_j) \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{i=j}$$

est orthonormee. Reciproquement si transforme une base orthonormee  $(\mathbf{e}_i)_{i \leq n}$  en une base orthonormee  $(\varphi(\mathbf{e}_i))_{i \leq n}$  pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , on peut decomposer ce vecteur dans cette base  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i$  et on a (par linearite de  $\varphi$  et bilinearite du produit scalaire)

$$\begin{aligned} \|\varphi(\vec{v})\|^2 &= \langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\mathbf{e}_i), \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(\mathbf{e}_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle \varphi(\mathbf{e}_i), \varphi(\mathbf{e}_j) \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

et donc  $\varphi$  est une isometrie.  $\square$



**4.1. Matrices des isometries lineaires.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application lineaire. On note  $M_\varphi$  sa matrice dans la base canonique:

$$M_\varphi = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

avec pour  $1 \leq j \leq n$

$$\varphi(\mathbf{e}_j^0) = \sum_{i=1}^n x_{i,j} \mathbf{e}_i^0.$$

On va donner des condition necessaires et suffisantes sur  $M_\varphi$  pour que  $\varphi$  soit une isometrie.

Notons que  $\varphi$  etant bijective,  $M$  est inversible et son inverse  $M^{-1}$  est la matrice de  $\varphi^{-1}$ . Par ailleurs, rappelons que etant donne une matrice  $M = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  sa transposee est la matrice

$${}^tM = ({}^t x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (x_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

obtenue en effectuant une symetrie par rapport a la premiere diagonale sur les coefficients.

**THÉOREME 3.6.** *L'application lineaire  $\varphi$  est une isometrie ssi*

$$(4.1) \quad M_\varphi \cdot {}^tM_\varphi = {}^tM_\varphi \cdot M_\varphi = \text{Id}_n.$$

*En d'autres termes*

$$M^{-1} = {}^tM.$$

*Si  $M_\varphi$  est de cette forme on a alors*

$$\det(M) = \pm 1.$$

**Preuve:** Ce resultat est valable plus generalement pour la matrice de  $\varphi$  calculee dans une base orthonormee quelconque. Soit  $(\mathbf{e}_j)_{j \leq n}$  une base orthonormee,  $M$  la matrice de  $\varphi$  dans cette base et  ${}^tM$  la transposee. Pour tout  $j = 1, \dots, n$ , on a

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = x_{1j} \mathbf{e}_1 + \cdots + x_{nj} \mathbf{e}_n.$$

Puisque  $(\varphi(\mathbf{e}_j))_{j \leq n}$  est orthonormee on a pour  $j, k \leq n$

$$\langle \varphi(\mathbf{e}_j), \varphi(\mathbf{e}_k) \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}.$$

On a

$$\langle \varphi(\mathbf{e}_j), \varphi(\mathbf{e}_k) \rangle = \langle x_{1j} \mathbf{e}_1 + \cdots + x_{nj} \mathbf{e}_n, x_{1k} \mathbf{e}_1 + \cdots + x_{nk} \mathbf{e}_n \rangle = \sum_{i,i' \leq n} x_{ij} x_{i'k} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i'} \rangle = \sum_{i \leq n} x_{ij} x_{ik}$$

car

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i'} \rangle = \delta_{ii'}.$$

Mais  $x_{ij} = {}^t x_{ji}$  et donc

$$\sum_{i \leq n} x_{ij} x_{ik} = \sum_{i \leq n} {}^t x_{ji} x_{ik} = \delta_{jk}.$$

Mais cette dernière somme est le coefficient  $(j, k)$  de la matrice produit  ${}^tM.M$ . Le fait que ce coefficient vaille  $\delta_{jk}$  dit exactement que

$${}^tM.M = \text{Id}_n$$

et donc que l'inverse de la matrice  $M$  est  ${}^tM$ ; cela implique que l'on a également

$$M.{}^tM = \text{Id}_n.$$

Reciproquement, soit  $\varphi$  une application linéaire inversible de matrice  $M$  dans une base orthonormée  $(\mathbf{e}_j)_{j \leq n}$ . Le calcul précédent pris à rebours dit précisément que

$${}^tM.M = \text{Id}_n \iff (\varphi(\mathbf{e}_j))_{j \leq n} = \left( \sum_{i \leq n} x_{ij} \mathbf{e}_i \right)$$
 est orthonormée

et donc que  $\varphi$  transforme une base orthonormée en une base orthonormée et est donc une isométrie.

Supposons que (4.1) soit vérifiée, on a

$$\det(M.{}^tM) = \det(\text{Id}_n) = 1 = \det(M). \det({}^tM) = \det(M)^2$$

(car  $\det({}^tM) = \det(M)$  pour toute matrice  $M$ ) et donc  $\det(M) = \pm 1$ .  $\square$

**DÉFINITION 3.13.** Une matrice  $M$  vérifiant (4.1) est appelée matrice orthogonale. Si  $\det M = +1$  cette matrice est dite spéciale et si  $\det M = -1$  cette matrice est dite non-spéciale.

On note respectivement

$$\text{O}_n(\mathbb{R}), \text{O}_n(\mathbb{R})^+ = \text{SO}_n(\mathbb{R}), \text{O}_n(\mathbb{R})^- \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

l'ensemble des matrices orthogonales, orthogonales spéciales et orthogonales non-spéciales.

la matrice diagonale  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1)$  est orthogonale et de déterminant  $-1$  (c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  d'équation  $x_n = 0$ ).

**DÉFINITION 3.14.** Une isométrie linéaire  $\varphi$  sera dite spéciale ou non-spéciale suivant que sa matrice  $M_\varphi$  dans la base canonique est spéciale ou non-spéciale.

On note respectivement

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ = \text{SO}(\mathbb{R}^n), \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^- \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$$

l'ensemble des isométries spéciales ou non-spéciales.

**THÉORÈME 3.7.** L'ensemble des matrices orthogonales  $\text{O}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  isomorphe à  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$ .

L'ensemble des matrices orthogonales spéciales  $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \text{O}_n(\mathbb{R})^+$  est un sous-groupe distingué de  $\text{O}_n(\mathbb{R})$  d'indice 2 et  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$  est un sous-groupe distingué d'indice isomorphe.

L'ensemble des matrices orthogonales non-spéciales  $\text{O}_n(\mathbb{R})^-$  est une orbite de  $\text{O}_n(\mathbb{R})^+$  et de même  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^-$  est une orbite de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+$ .

On a pour toute matrice non-spéciale  $M^- \in \text{O}_3(\mathbb{R})^-$  (toute isométrie non-spéciale)  $\sigma \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^-$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{O}_n(\mathbb{R})^- &= M^- . \text{O}_n(\mathbb{R})^+ = \text{O}_n(\mathbb{R})^+ . M^-, \\ \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^- &= \sigma . \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}^+ . \sigma \end{aligned}$$

et

$$\text{O}_n(\mathbb{R}) = \text{O}_n(\mathbb{R})^+ \sqcup M^- . \text{O}_n(\mathbb{R})^+,$$

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+ \sqcup \sigma \cdot \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+.$$

**Preuve:** Rappelons que l'application

$$(4.3) \quad \varphi \in \text{GL}(\mathbb{R}^n) \mapsto M_\varphi \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

qui a une application lineaire inversible associe sa matrice dans la base canonique (ou sa matrice dans toute base fixee a l'avance) est un isomorphisme de groupes. Comme  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  est un sous-groupe de  $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ , son image  $O_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

L'ensemble des matrices speciales orthogonales  $O_n(\mathbb{R})^+$  est le noyau du morphisme de groupe determinant (restreint a  $O_n(\mathbb{R})$ ),

$$\det : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

C'est donc un sous-groupe distingue et sa preimage par (4.3),  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+$  est donc un sous-groupe distingue de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  isomorphe. Notons que l'application determinant est surjective:  $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$ , en effet la matrice diagonale  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1)$  est orthogonale et de determinant  $-1$  (c'est la symetrie orthogonale par rapport a l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  d'equation  $x_n = 0$ ). Ainsi (Thm. Noyau-Image)  $O_n(\mathbb{R})^+$  et  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+$  sont d'indice 2 dans leurs groupes respectifs. Les sous-ensembles  $O_n(\mathbb{R})^-$  et  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^-$  sont les complements de  $O_n(\mathbb{R})^+$  et  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+$  et en utilisant le fait que  $\det$  est un morphisme on montre facilement les egalites (4.2)

□

**4.2. Interpretation en terme d'applications adjointe.** Soit  $V$  un espace vectoriel reel (de dimension finie  $n \geq 1$ ) muni d'un produit scalaire c'est a dire une forme bilineaire

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

qui est de plus symetrique et definie positive.

Soit  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  une base orthonormee de  $V$  (une telle base existe par le procede de Gramm-Schmidt).

**THEOREME 3.8.** *Soit  $\varphi : V \rightarrow V$  une application lineaire, alors il existe une unique application lineaire  $\varphi^* : V \rightarrow V$  qui verifie:*

$$(4.4) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^*(\vec{v}) \rangle.$$

*Cette application est l'application adjointe. Si  $M$  est la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  alors la matrice de  $\varphi^*$  est donnee par la transposee  ${}^tM$ .*

PREUVE. Exercice. □

Dans le cours d'algebre lineaire II, vous avez defini une application autoadjointe comme etant une application lineaire verifiant

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi(\vec{v}) \rangle.$$

En d'autres termes c'est une application verifiant

$$\varphi^* = \varphi,$$

ou encore en terme de matrices

$${}^tM_\varphi = M_\varphi.$$

Ce qu'on vient de voir est qu'une application lineaire est une isometrie ssi  $\varphi$  est inversible et que son inverse est l'adjointe

$$\varphi^* = \varphi^{-1},$$

ou encore en terme de matrices

$${}^tM_\varphi = M_\varphi^{-1}.$$

Les applications autoadjointes et les isometries appartiennent a une classe plus generale d'applications lineaires:

**DÉFINITION 3.15.** *Une application lineaire  $\varphi$  est normale si elle commute avec son adjointe:*

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$$

ou encore en terme de matrices

$$M_\varphi \cdot {}^tM_\varphi = {}^tM_\varphi \cdot M_\varphi.$$

#### 4.3. Orientation. Soit

$$\mathcal{BO}_n = \{(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{i=j}\}$$

l'espace de toutes les bases orthonormees (BO) de  $\mathbb{R}^n$  (on fera attention que l'ordre de numerotation compte, le base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  est differente de la base  $(\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_1)$ ).

Soit  $\varphi$  une isometrie, et  $(\mathbf{e}_i)_i$  une BO alors  $(\varphi(\mathbf{e}_i))_i$  est encore une BO. Ainsi le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  et ses sous-groupes agissent sur l'espace des BOs.

**PROPOSITION 3.13.** *Le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  agit simplement transitivement  $\mathcal{BO}_n$ : soit  $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1}, \dots, \mathbf{e}_{0,n})$  la base canonique, on a*

$$\mathcal{BO}_n = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 \cdot \mathcal{B}_0.$$

*Le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+$  agit avec deux orbites,*

$$\mathcal{BO}_n^+ = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+ \cdot \mathcal{B}_0 = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+ \cdot (\mathbf{e}_{0,1}, \dots, \mathbf{e}_{0,n}) \text{ et } \mathcal{BO}_n^- = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^- \cdot (-\mathbf{e}_{0,1}, \dots, \mathbf{e}_{0,n}).$$

**Preuve:** Exercice. □

**DÉFINITION 3.16.** *L'orbite  $\mathcal{BO}^+$  est l'ensemble des bases orientees positivement (ou simplement des bases orientees); l'autre orbite L'orbite  $\mathcal{BO}^-$  est l'ensemble des bases orientees negativement. On utilisera les acronymes BOO et BOON pour designer de telles bases orientees positivement ou negativement.*

**PROPOSITION 3.14.** *Soit  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  une BO et  $M_{\mathcal{B}}$  la matrice des vecteurs colonnes de  $\mathcal{B}$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$  alors l'orientation de  $\mathcal{B}$  est donnee par*

$$\det(M_{\mathcal{B}}) \in \{\pm 1\}.$$

**REMARQUE 4.1.** Quand  $n = 3$ , la regle des "trois doigts" en physique est un moyen mnemotechnique pour determiner l'orientation d'une base : elle est justifiee par le fait demontre si dessous que les elements de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0^+$  sont des "rotations" de l'espace.

#### 4.4. Proprietes spectrales des isometries lineaires.

**PROPOSITION 3.15.** *Soit  $\varphi$  une isometrie lineaire sur  $\mathbb{R}^n$  alors toute valeur propre reelle si elle existe vaut  $\pm 1$ .*

**Preuve:** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre reelle et  $\vec{v} \neq \mathbf{0}$  le vecteur propre associe. On a donc  $\varphi(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ . On a donc

$$\lambda^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

et comme  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$  on a

$$\lambda^2 = 1.$$

□

Nous montrons qu'en rang impair une telle valeur propre existe toujours

**PROPOSITION 3.16.** *Supposons  $n$  impair et soit  $\varphi$  une isometrie lineaire alors  $\varphi$  possede une valeur propre reelle et un vecteur propre de longueur 1: il existe  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|\mathbf{e}\| = 1$  et  $\lambda = \pm 1$  avec*

$$\varphi(\mathbf{e}) = \lambda \cdot \mathbf{e}.$$

De plus si  $\varphi$  est speciale  $\det M_\varphi = +1$  alors  $+1$  est valeur propre.

**Preuve:** Il suffit de montrer que  $\varphi$  admet un vecteur propre (non-nul) de valeur propre  $\pm 1$ : si  $\vec{v} \neq \vec{0}$  est un tel vecteur alors  $\mathbf{e} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$  a les proprietes requises.

Pour cela, on considere le polynome caracteristique de  $M = M_\varphi$ ,

$$\begin{aligned} P_M(X) &= \det(X \cdot \text{Id}_n - M) = \det \begin{pmatrix} X - x_{11} & \cdots & -x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_{n1} & \cdots & X - x_{nn} \end{pmatrix} \\ &= X^n - (x_{11} + \cdots + x_{nn})X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M) \end{aligned}$$

C'est un polynome a coefficient reels de degre  $n$ ; comme  $n$  est impair, on a donc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \pm\infty$ ; par le theoreme des valeurs intermediaires  $P_M(x)$  admet une racine  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; comme  $\lambda \text{Id}_n - M$  n'est pas inversible il existe  $\vec{v} \neq \mathbf{0}$  tel que

$$\lambda \vec{v} - M \cdot \vec{v} = \mathbf{0}.$$

Ainsi  $\varphi(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ . On a vu que  $\lambda = \pm 1$ . On a

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \langle \varphi \mathbf{e}, \varphi \mathbf{e} \rangle = \langle \lambda \mathbf{e}, \lambda \mathbf{e} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$$

et  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \neq 0$  donc  $1 = \lambda^2$  et  $\lambda = \pm 1$ .

Supposons que  $\det(M) = +1$  alors le polynome caracteristique verifie

$$P_M(0) = -\det(M) = -1$$

et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_M(x) = +\infty$ ,  $P_M(X)$  s'annule sur  $]0, +\infty[$  donc en  $+1$ . □

**EXERCICE 3.4.** Montrer que si  $n$  est pair et que  $\varphi$  est une isometrie lineaire non-speciale alors  $\varphi$  admet  $1$  et  $-1$  comme valeurs propres et que les vecteurs propres associes sont perpendiculaires entre eux.

#### 4.5. Reduction des isometries.

**THÉORÈME 3.9.** *Soit  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  une isometrie lineaire et  $W \subset \mathbb{R}^n$  un sous-espace qui est stable par  $\varphi$ :*

$$\varphi(W) \subset W.$$

Soit

$$W^\perp = \{\vec{w}' \in \mathbb{R}^n, \forall \vec{w} \in W, \langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle = 0\}$$

l'orthogonal de  $W$  alors  $W^\perp$  est un SEV stable par  $\varphi$  et on a une decomposition en somme speciale (orthogonale)

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp.$$

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r, \vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_{r'})$  un base orthonormee formee d'une BO de  $W$  et de  $W^\perp$  alors la matrice de  $\varphi$  dans cette base est une matrice blocs

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} M_{\varphi, \mathcal{B}_W} & 0 \\ 0 & M_{\varphi, \mathcal{B}_{W^\perp}} \end{pmatrix}$$

ou

$$M_{\varphi, \mathcal{B}_W} \in O_r(\mathbb{R}), \quad M_{\varphi, \mathcal{B}_{W^\perp}} \in O_{r'}(\mathbb{R})$$

sont des matrices orthogonales. En particulier on a

$$\det(M_{\varphi, \mathcal{B}}) = \det(M_{\varphi, \mathcal{B}_W}) \det(M_{\varphi, \mathcal{B}_{W^\perp}})$$

**Preuve:** Comme le produit scalaire est bilinéaire il est clair que pour tout  $\vec{w} \in W$ , l'application

$$\vec{w}' \mapsto \langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle \in \mathbb{R}$$

est une forme lineaire et dire que  $\langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle = 0$  est equivalent a dire que  $\vec{w}'$  appartient au noyau de cette forme: ainsi  $W^\perp$  est une intersection de noyaux de formes lineaires et est donc un SEV. Soit

$$\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r, \vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_{r'})$$

une BO dont les  $r = \dim W$  premiers vecteurs forment une BO de  $W$  (une telle base existe par Gramm-Schmidt) alors par definition  $\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_{r'}$  forment une famille libre de  $W^\perp$ . C'est une base: soit  $\vec{w}' \in W^\perp$  on dans la base  $\mathcal{B}$

$$\vec{w}' = \sum_{i=1}^r \langle \vec{w}', \vec{w}_i \rangle \vec{w}_i + \sum_{j=1}^{r'} \langle \vec{w}', \vec{w}'_j \rangle \vec{w}'_j = \sum_{j=1}^{r'} \langle \vec{w}', \vec{w}'_j \rangle \vec{w}'_j$$

car  $\langle \vec{w}', \vec{w}_i \rangle = 0$  (car  $\vec{w}'$  est dans l'orthogonal de  $W$ ) donc la famille est generatrice.

Soit  $\vec{w}' \in W^\perp$ , on a pour tout  $\vec{w} \in W$

$$\langle \varphi(\vec{w}'), \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}', \varphi^{-1}(\vec{w}) \rangle = 0$$

car  $\varphi^{-1}(\vec{w}) \in W$  donc  $\varphi(\vec{w}') \in W^\perp$ .

Ainsi  $\varphi$  laisse  $W^\perp$  stable et sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est une matrice blocs. Deplus  $\varphi$  definit des isometries sur  $W$  et  $W^\perp$  qui transforment les BOs  $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r)$  et  $(\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_{r'})$  en des BOs et par la preuve du Thm 3.6 les matrices (des restrictions) de  $\varphi$  dans ces bases sont orthogonales.  $\square$

**4.6. La matrice d'une isometrie de rang impair.** On va appliquer les resultats precedents aux isometries de rang impair.

**THÉOREME 3.10.** Soit  $n \geq 1$  un entier impair et  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$  une isometrie lineaire; il existe une base orthonormee que l'on peut supposer orientee  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  telle que  $M_{\varphi, \mathcal{B}}$  est de la forme

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1} \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R}) \text{ avec } M_{n-1} \in O_{n-1}(\mathbb{R})$$

la matrice d'une isometrie. On a

$$\det(M_{\varphi, \mathcal{B}}) = (\pm 1) \det(M_{n-1}).$$

Si de plus  $\varphi$  est speciale alors on peut supposer que la matrice est de la forme

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1} \end{pmatrix} \in \text{SO}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } M_{n-1} \in \text{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$$

**Preuve:** Par la Proposition 3.16,  $\varphi$  admet un vecteur propre  $\mathbf{e}$  de longueur 1 et de valeur propre  $\pm 1$ . On applique alors le Theoreme 3.9 au sous-espace stable  $W = \mathbb{R}\mathbf{e}$  et a son orthogonal. Notons que si la base obtenue  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  n'était pas orientee alors la BO  $(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  l'est. On peut donc toujours supposer que la base est orientee.

Si  $\varphi$  est speciale, on applique egalement la seconde partie de la Proposition 3.16.  $\square$

En particulier si  $n = 3$  on obtient

**COROLLAIRE 3.7.** *Soit  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0$  une isometrie lineaire; il existe une base orthonormee  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  telle que  $M_{\varphi, \mathcal{B}}$  est de la forme*

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \in \text{O}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{O}_2(\mathbb{R})$$

une matrice orthogonale. Si de plus  $M_2 \in \text{O}_2(\mathbb{R})^-$  est une matrice de symetrie alors (quitte a modifier  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ), on peut supposer que

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si enfin  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0^+$  est speciale, on peut prendre la matrice  $M_{\varphi, \mathcal{B}}$  de la forme

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$$

une matrice de rotation.

**Preuve:** Le seul point a preciser est le cas ou  $M_2$  est une matrices non-speciale: on sait par le cours du semestre precedent que  $M_2$  admet  $+1$  et  $-1$  comme valeurs propres et que les sous-espaces propres (l'axe de la symetrie et l'axe perpendiculaire) sont perpendiculaires.  $\square$

## 5. Les isometries affines

On decrit maintenant les diverses possibilites pour les isometries generales (dites affines), c'est a dire les isometries composees d'une isometrie lineaire et d'une translation:

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0, \quad \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0.$$

On rappelle que toute isometrie se decompose de maniere unique sous cette forme avec

$$\vec{u} = \varphi(\mathbf{0})$$

et

$$\varphi_0 = t_{\varphi(\mathbf{0})} \circ \varphi = \text{lin}(\varphi)$$

est la partie lineaire de  $\varphi$ .

### 5.1. Deplacements, anti-deplacements.

**DÉFINITION 3.17.** *L'ensemble des isometries*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n), \varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^+\} = \{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n), \det(\varphi_0) = +1\}$$

dont la partie lineaire est une speciale est s'appelle groupe des deplacements affines; son complementaire dans  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des anti-deplacements affines

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = \{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n), \varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0^-\} = \{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n), \det(\varphi_0) = -1\}.$$

**THÉORÈME 3.11.** *L'ensemble des déplacements affines  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$  forme un sous-groupe distingué de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  d'indice 2; l'ensemble des anti-déplacements est la seconde des deux orbites pour l'action de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$  sur  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  par multiplication: on a pour tout  $s \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^-$*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = s. \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+.s$$

et

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^- = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup s. \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \sqcup \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+.s$$

**Preuve:** En effet  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$  est le noyau du morphisme de groupes

$$\det \circ \text{lin} : \varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \mapsto \varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0 \mapsto \det(\varphi_0) \in \{\pm 1\}.$$

C'est donc un sous-groupe distingué. De plus ce morphisme est surjectif (car l'identité s'envoie sur 1 et toute isométrie linéaire non-spéciale sur  $-1$ ); par le théorème noyau-image appliqué à  $\det \circ \text{lin}$  on a l'isomorphisme de groupes

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) / \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+ \simeq \{\pm 1\}.$$

Pour l'action de multiplication à droite  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$  a deux orbites dans  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ : celle de l'identité qui est  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$  et le complément (nécessairement  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)^-$ ) qui vaut  $s \circ \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$  pour tout  $s \notin \text{Isom}(\mathbb{R}^n)^+$ .

Le même argument vaut pour la multiplication à gauche.  $\square$

## 5.2. Décomposition des des isométries affines.

**THÉORÈME 3.12.** *Soit  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  une isométrie affine de partie linéaire  $\varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ . L'isométrie  $\varphi$  se décompose de manière unique sous la forme*

$$\varphi = t_{\vec{v}} \circ \varphi' \text{ avec } \varphi' = t_{\vec{w}} \circ \varphi_0$$

avec  $\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \text{Id})$  et  $\vec{w} \in \text{Im}(\varphi_0 - \text{Id})$ . On a les propriétés suivantes

- (1) Les sous-espaces  $\ker(\varphi_0 - \text{Id})$  et  $\text{Im}(\varphi_0 - \text{Id})$  sont perpendiculaires et en particulier supplémentaires.
- (2)  $\varphi'$  commute avec  $t_{\vec{v}}$ :

$$t_{\vec{v}} \circ \varphi' = \varphi' \circ t_{\vec{v}},$$

- (3) L'ensemble des points fixes de  $\varphi'$  est non-vide et un espace affine de direction  $\ker(\varphi_0 - \text{Id})$ : plus précisément soit  $\vec{z}$  tel que

$$\vec{w} = \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z}$$

alors

$$\text{Fix}(\varphi') = \{x \in \mathbb{R}^3, \varphi'(x) = x\} = -\vec{z} + \ker(\varphi_0 - \text{Id}).$$

- (4) L'isométrie  $\varphi$  admet des points fixes si et seulement si  $\vec{v} = \mathbf{0}$  c'est à dire si et seulement si  $\varphi = \varphi'$ .

Pour montrer ce théorème on commencera par montrer les trois propositions suivantes:

**PROPOSITION 3.17.** *Soit  $\varphi_0$  une isométrie linéaire et  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ . L'isométrie  $\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$  admet un point fixe ssi  $\vec{u} \in \text{Im}(\varphi_0 - \text{Id})$  et alors l'ensemble des points fixes est un espace affine de direction  $\ker(\varphi_0 - \text{Id})$ : soit  $\vec{z}$  tel que  $\vec{u} = (\varphi_0 - \text{Id})(\vec{z})$  alors*

$$\text{Fix}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^3, \varphi(x) = x\} = -\vec{z} + \ker(\varphi_0 - \text{Id}).$$



**Preuve:** Si un point fixe  $x$  existe on a

$$\varphi(x) = x \iff \vec{v} + \varphi_0(x) = x \iff \vec{v} = (\varphi_0 - \text{Id})(-x) \iff \vec{v} \in \text{Im}(\varphi_0 - \text{Id}).$$

si  $x$  et  $x_0$  sont deux points fixes alors on a

$$(\varphi_0 - \text{Id})(x) = (\varphi_0 - \text{Id})(x_0) = -\vec{v}$$

et donc

$$(\varphi_0 - \text{Id})(x - x_0) = \mathbf{0} \iff x \in x_0 + \ker(\varphi_0 - \text{Id})$$

et on a equalite. Il reste a montrer que si  $\vec{z}$  est tel que  $(\varphi_0 - \text{Id})(\vec{z}) = \vec{u}$  alors  $-\vec{z}$  est un point fixe:

$$\varphi(-\vec{z}) = \vec{u} + \varphi_0(-\vec{z}) = \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} - \varphi_0(\vec{z}) = -\vec{z}.$$

□

REMARQUE 5.1. Cette proposition utilise seulement le fait que  $\varphi$  est une application affine; pas que c'est une isometrie. Ce n'est plus le cas de la proposition qui suit.

PROPOSITION 3.18. Soit  $\varphi_0$  une isometrie lineaire; on a la decomposition en somme directe orthogonale

$$\mathbb{R}^n = \ker(\varphi_0 - \text{Id}) \oplus^\perp \text{Im}(\varphi_0 - \text{Id}).$$

**Preuve:** Soit  $\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \text{Id})$  et  $\vec{w} = \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} \in \text{Im}(\varphi_0 - \text{Id})$ . On a  $(\varphi_0(\vec{v}) = \vec{v})$

$$\langle \vec{v}, \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} \rangle = \langle \vec{v}, \varphi_0(\vec{z}) \rangle - \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle = \langle \varphi_0(\vec{v}), \varphi_0(\vec{z}) \rangle - \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle = 0.$$

Ainsi  $\ker(\varphi_0 - \text{Id})$  et  $\text{Im}(\varphi_0 - \text{Id})$  sont orthogonaux et de dimension complementaire: ils sont donc supplementaires orthogonaux. □

PROPOSITION 3.19. Soit  $\varphi$  affine alors  $t_{\vec{v}}$  commute avec  $\varphi$  si et seulement si  $\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \text{Id})$ .

**Preuve:** Pour montrer que

$$t_{\vec{v}} \cdot \varphi \cdot t_{-\vec{v}} = \varphi$$

il faut et il suffit de montrer que  $t_{\vec{v}} \cdot \varphi_0 \cdot t_{-\vec{v}} = \varphi_0$  (car les translations commutent entre elles). Pour montrer cette egalite de deux application affines de meme partie lineaire il suffit de montrer l'egalite en un point quelconque: en  $\vec{v}$

$$t_{\vec{v}} \cdot \varphi_0 \cdot t_{-\vec{v}}(\vec{v}) = \vec{v}$$

qui vaut  $\varphi_0(\vec{v})$  si et seulement si

$$\vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \text{Id}).$$

□

**Preuve:** (du Theoreme 3.12) Soit  $\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$ ; on a par la Proposition 3.18

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

avec  $\vec{v}$  est la composante de  $\vec{u}$  sur  $\ker(\varphi_0 - \text{Id})$  et  $\vec{w} \in \vec{v}^\perp$  est le complement orthogonal qui appartient a  $\text{Im}(\varphi_0 - \text{Id})$  et posons

$$\varphi' = t_{\vec{w}} \circ \varphi_0.$$

Cette decomposition est unique car la somme est directe et par la proposition 3.17 l'ensemble des points fixes  $\text{Fix}(\varphi')$  est un sous-espace affine (non-vide) de direction  $\ker(\varphi_0 - \text{Id})$ ; par la meme proposition  $\varphi$  admet un point fixe ssi  $\vec{v} = \mathbf{0}$  c'est a dire  $\varphi' = \varphi$ . Par la proposition 3.19,  $t_{\vec{v}}$  et  $\varphi'$  commutent. □

## 6. Classification et nomenclature des isometries quand $n = 3$

**6.1. Les isometries lineaires.** Soit  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0$  une isometrie lineaire qui n'est pas l'identite.

6.1.1. *Rotations.* Supposons que dans une base orthonormee  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  convenable la matrice de  $\varphi$  soit de la forme

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}),$$

$$c^2 + s^2 = 1, \quad c = \cos(\theta), \quad s = \sin(\theta)$$

alors  $\varphi$  laisse les points de l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$  invariant et realise une rotation dans le plan orthogonal  $\mathbf{e}_1^\perp = \mathbb{R}\mathbf{e}_2 + \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ . On dit que  $\varphi$  est la *rotation* d'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$  et d'angle  $\theta \pmod{2\pi}$  (ou le parametre complexe  $c + is$ ). Si  $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$  (ie.  $M_2$  n'est pas l'identite) l'ensemble des points fixes de  $\varphi$  est la droite lineaire  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ .

REMARQUE 6.1. On insiste sur le fait que la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  doit etre orientee pour pouvoir definir l'angle  $\theta \pmod{2\pi}$  de la rotation sans ambiguite. Par exemple, si on remplace la base par  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3)$  qui a l'orientation opposee, la matrice devient  $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$  l'angle qu'on trouve devient  $-\theta$ . La plupart du temps on s'interessera a l'angle de la rotation "au signe pres", c'est a dire  $c \pm is$  ou  $\pm\theta$ .

REMARQUE 6.2. Si parametre complexe est  $-1$  (l'angle de la rotation en radians est  $\pi$ ) alors  $\varphi$  est la reflexion orthogonale par rapport a l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ . On parle egalement de symetrie axiale.

Si on a determine que  $\varphi$  est une rotation, le cosinus de son angle est donne par la formule suivante:

PROPOSITION 3.20. *Soit  $M_\varphi$  la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique<sup>1</sup> (pas forcement dans la base  $\mathcal{B}$ ), on a*

$$c = \frac{1}{2}(\text{tr}(M_\varphi) - 1)$$

ou  $\text{tr}$  est la trace de la matrice (la somme des coefficients diagonaux).

**Preuve:** Notons que cette formule est vraie pour la matrice  $M_{\varphi, \mathcal{B}}$ . Soit  $M_{\mathcal{B}}$  la matrice donnant les coordonnees de  $\mathcal{B}$  dans la base canonique, alors on a par la formule de changement de base

$$M_\varphi = M_{\mathcal{B}} \cdot M_{\varphi, \mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{-1}$$

et

$$\text{tr}(M_\varphi) = \text{tr}(M_{\mathcal{B}} \cdot M_{\varphi, \mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{-1}) = \text{tr}(M_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}} \cdot M_{\varphi, \mathcal{B}}) = \text{tr}(M_{\varphi, \mathcal{B}}).$$

□

<sup>1</sup>en fait dans n'importe quelle base

6.1.2. *Symetrie orthogonale ou reflexion (par rapport a un plan).* Supposons que la matrice de  $\varphi$  soit de la forme

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})^- \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})^-$$

alors  $\varphi$  laisse les points de l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$  invariant et realise une symetrie dans le plan orthogonal  $\mathbf{e}_1^\perp = \mathbb{R}\mathbf{e}_2 + \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ . Soit  $\mathbf{e}'_2$  un vecteur unitaire appartenant a l'axe cette symetrie (dans ce plan) et  $\mathbf{e}'_3$  un vecteur perpendiculaire a  $\mathbf{e}'_2$  (dans ce meme plan) alors  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  est un base orthonormee (qu'on peut orienter si on le souhaite) et la matrice de  $\varphi$  dans cette base est de la forme

$$M_{\varphi, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'isometrie  $\varphi$  est la *symetrie orthogonale* par rapport au plan  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \mathbb{R}\mathbf{e}'_2$  et son ensemble de point fixe est exactement ce plan.

6.1.3. *Anti-rotations.* Le dernier cas est celui d'une matrice de la forme

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})^- \text{ avec } M_2 = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}),$$

$$c^2 + s^2 = 1, \quad c = \cos(\theta), \quad s = \sin(\theta)$$

alors  $\varphi$  laisse l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$  globalement invariant (mais transforme  $\mathbf{e}_1$  en  $-\mathbf{e}_1$ ) et realise une rotation dans le plan orthogonal  $\mathbf{e}_1^\perp = \mathbb{R}\mathbf{e}_2 + \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ . Si la base est orientee on dit que  $\varphi$  est une *anti-rotation* d'axe  $\mathbf{e}_1$  et d'angle  $\theta \pmod{2\pi}$  (ou de parametre complexe  $c + is$ ). Si on ne s'interesse pas a l'orientation de la base l'angle est  $\pm\theta$  ou  $c \pm is$

Si la rotation est triviale (d'angle 0) on obtient la symetrie orthogonale par rapport au plan  $\mathbb{R}\mathbf{e}_2 + \mathbb{R}\mathbf{e}_3$  et l'ensemble des points fixes est ce plan. Sinon le seul point fixe est  $\mathbf{0}$ .

REMARQUE 6.3. Les anti-rotations d'angle 0 sont exactement les symetries par rapport a un plan: leur matrice s'ecrit

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a la symetrie par rapport au plan  $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ .

REMARQUE 6.4. Une anti-rotation d'angle  $\pi$  admet dans une BO convenable la matrice

$$M_{\varphi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

c'est donc l'application lineaire  $-\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  qui est encore la symetrie par rapport au centre  $\mathbf{0}$ .

A nouveau, si on a determine que  $\varphi$  est une anti-rotation, le cosinus de son angle est donne par la formule suivante:

PROPOSITION 3.21. Soit  $M_\varphi$  la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique<sup>2</sup> (pas forcément dans la base  $\mathcal{B}$ ), on a

$$c = \frac{1}{2}(\text{tr}(M_\varphi) + 1)$$

ou  $\text{tr}$  est la trace de la matrice (la somme des coefficients diagonaux).

On deduit de cette discussion le

COROLLAIRE 3.8. Toute isometrie lineaire est la composee au plus 3 symetries orthogonales.

**Preuve:** Exercice □

EXERCICE 3.5. Montrer qu'une isometrie lineaire  $\varphi$  est une symetrie orthogonale (par rapport a l'origine, a une droite ou un plan) si et seulement si sa matrice dans la base canonique est symetrique:

$${}^tM = M.$$

**Preuve:** On notera que si  $\varphi$  est une symetrie alors  $\varphi^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . □

**6.2. Les isometries affines quand  $n = 3$ .** Considerons une isometrie affine  $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ . D'apres le Theoreme de Decomposition 3.12 on peut ecrire  $\varphi$  sous la forme

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0 = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ \varphi_0$$

avec

$$\vec{u} = \varphi(\mathbf{0}) = \vec{v} + \vec{w}, \quad \vec{v} \in \ker(\varphi_0 - \text{Id}) \text{ et } \vec{w} \in \ker(\varphi_0 - \text{Id})^\perp = \text{Im}(\varphi_0 - \text{Id}).$$

6.2.1. *Deplacement affines.* Supposons que la partie lineaire  $\varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0^+$  est une rotation. On a les cas suivants:

- (1) Si  $\varphi_0 = \text{Id}$ :  $\varphi$  est une *translation* et n'a pas de points fixes.
- (2) Si  $\varphi_0$  est une rotation non-triviale autour d'un axe

$$D_0 = \ker(\varphi_0 - \text{Id}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3, \varphi_0(\vec{v}) = \vec{v}\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_1.$$

Si  $\vec{v} = \mathbf{0}$  (le vecteur  $\vec{u} = \vec{w}$  est perpendiculaire a l'axe  $D_0$ ), l'ensemble des points fixes

$$D_\varphi = -\vec{z} + D_0 =, \quad \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{w}$$

est une droite affine de direction,  $D_0$  et  $\varphi$  est une *rotation* autour de cette droite affine. Dans le cas ou l'angle de la rotation vaut  $\pi$ ,  $\varphi$  est la *symetrie orthogonale par rapport a l'axe  $D_\varphi$* .

- (3) Si  $\varphi_0$  est une rotation non-triviale autour d'un axe

$$D_0 = \ker(\varphi_0 - \text{Id}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3, \varphi_0(\vec{v}) = \vec{v}\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_1.$$

et si  $\vec{v} \neq \mathbf{0}$  ( $\vec{u}$  nest pas perpendiculaire a  $D_0$ ) alors  $\varphi$  n'a pas de point fixes et  $\varphi$  est la composee de la rotation affine  $\varphi'$  d'axe

$$D_{\varphi'} = -\vec{z} + D_0, \quad \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{w},$$

suivie de la translation par le vecteur  $\vec{v}$  (qui est contenu dans  $D_0$ ): on dit que  $\varphi$  est un *Vissage* le long de l'axe .

---

<sup>2</sup>en fait dans n'importe quelle base

6.2.2. *Anti-déplacement affines.* Si  $\varphi_0 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0^-$  on a les cas suivants:

- (1)  $\varphi_0 = -\text{Id}$ :  $\ker(\varphi_0 - \text{Id}) = \{\mathbf{0}\}$  (et  $\text{Im}(\varphi_0 - \text{Id}) = \mathbb{R}^3$ ) et donc  $\vec{u} = \vec{w}$  est forcément perpendiculaire à  $\ker(\varphi_0 - \text{Id})$ . On a donc  $\varphi = \varphi'$  qui possède un unique point fixe:

$$p_\varphi = -\vec{z}, \quad \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{u}$$

et  $\varphi$  est la *reflexion ou symétrie centrale* par rapport à ce point:

$$\varphi(\vec{x}) = p_\varphi - (\vec{x} - p_\varphi).$$

- (2)  $\varphi_0$  est une symétrie par rapport au plan

$$PL_0 = \ker(\varphi_0 - \text{Id}).$$

Si  $\vec{v} = \mathbf{0}$  (ie. si  $\vec{u} = \vec{w}$  est perpendiculaire à  $PL_0$ ) on a  $\varphi = \varphi'$  et l'ensemble des points fixes est un plan affine parallèle à  $PL_0$ :

$$PL_\varphi = -\vec{z} + PL_0, \quad \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{u}.$$

Ainsi  $\varphi$  est la *reflexion ou symétrie* par rapport au plan affine  $PL_\varphi$ .

- (3)  $\varphi_0$  est une symétrie par rapport à un plan vectoriel

$$PL_0 = \ker(\varphi_0 - \text{Id}).$$

Si  $\vec{v} \neq \mathbf{0}$  (ie si  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  n'est pas perpendiculaire à  $PL_0$ )  $\varphi$  n'a pas de point fixe;  $\varphi$  est la composée de la symétrie  $\varphi'$  par rapport au plan affine (parallèle au plan de  $\varphi_0$ )

$$PL_{\varphi'} = -\vec{z} + PL_0, \quad \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{w}$$

et de la translation  $t_{\vec{v}}$  de vecteur  $\vec{v}$  (appartenant au plan  $PL_0$ ):  $\varphi$  est une *symétrie plane glissée*.

- (4)  $\varphi_0$  est une anti-rotation d'axe

$$D_0 = \ker(\varphi_0 + \text{Id}) = \mathbb{R}\mathbf{e}_1$$

et d'angle complexe  $\neq 1$  (ou  $0 \pmod{2\pi}$  radians). On a

$$\ker(\varphi_0 - \text{Id}) = \{\mathbf{0}\} \text{ et } \text{Im}(\varphi_0 - \text{Id}) = \mathbb{R}^3$$

et  $\vec{u} = \vec{w}$ . ainsi  $\varphi$  a exactement un point fixe

$$p_\varphi = -\vec{z}, \quad \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{u}.$$

$\varphi$  est l'*anti-rotation* affine autour de l'axe affine

$$D_\varphi = -\vec{z} + D_0, \quad \varphi_0(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{u}$$

et de direction  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ .

### 6.3. La sphere de $\mathbb{R}^3$ .

**THÉORÈME 3.13.** *Le groupe des déplacements linéaires  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)_0 \simeq \text{SO}_2(\mathbb{R})$  agit transitivement sur la sphere  $S^2$ . Soit  $\mathbf{e}_1 \in S^2$  un point de la sphere, son stabilisateur  $\text{SO}_3(\mathbb{R})_{\mathbf{e}_1}$  est le groupe des rotations autour de l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$  (qui intersecte la sphere aux points  $\mathbf{e}_1$  et  $-\mathbf{e}_1$ ). Ce groupe est isomorphe à  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ , l'isomorphisme est donné par*

$$\varphi \in \text{SO}_3(\mathbb{R})_{\mathbf{e}_1} \mapsto M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$$

ou  $M_\varphi$  est la matrice de  $\varphi$  dans une BOO  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  contenant  $\mathbf{e}_1$  comme premier vecteur.

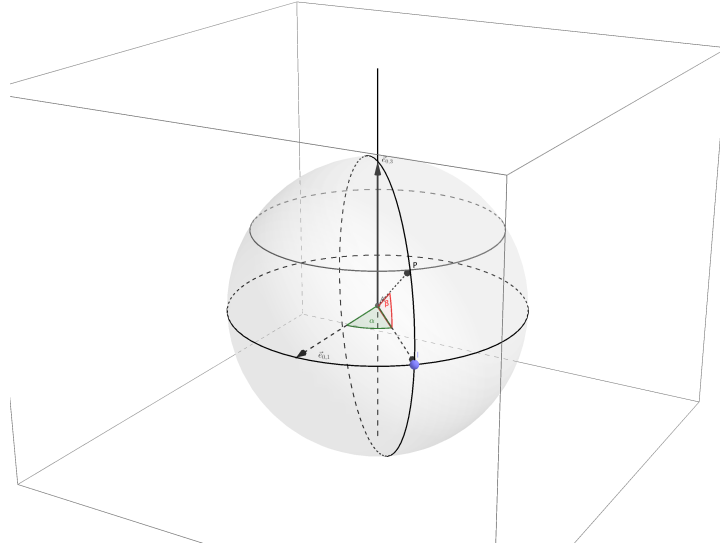


FIGURE 1. Coordonnees spheriques

**Preuve:** Exercice □

On raffine ce resultat, pour donner le systeme bien connu des coordonnees (spheriques) d'un point sur la sphere de rayon 1: soit  $(\mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{0,2}, \mathbf{e}_{0,3})$  la base canonique; tout point  $P \in S$  peut s'ecrire de maniere unique sous la forme

$$P = r'_{2,\beta} \circ r_{3,\alpha}(\mathbf{e}_{0,1})$$

ou  $r_{3,\alpha}$  est une rotation d'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_{0,3}$  et d'angle  $\alpha \in [0, 2\pi[$  et  $r'_{2,\beta}$  est une rotation d'axe  $\mathbb{R}.r_{3,\alpha}(\mathbf{e}_{0,2})$  et d'angle  $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Cela la donne lieu a la terminologie geographique bien connue.

- L'angle  $\alpha$  est la *longitude* de  $P$ .
- L'angle  $\beta$  est la *latitude* de  $P$ .
- Les points de la sphere de longitude donnee sont les *meridiens*: ce sont des cercles de rayon 1 centres en  $\mathbf{0}$  et passant par  $P$ .
- Les points de sphere de latitude donnee sont les *paralleles*: ce sont des cercles dont le centre est sur l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{e}_{0,3}$  et obtenu comme intersection de  $S^2$  et d'un plan affine de direction le plan  $\mathbf{e}_{0,3}^\perp$ .
- On appelle le point  $\mathbf{e}_{0,3}$  "pole nord" et le point  $-\mathbf{e}_{0,3}$  "pole sud". Le meridien passant par  $\mathbf{e}_{0,1}$  est le "meridien de Greenwich".

REMARQUE 6.5. Meridiens et paralleles sont des orbites de points de la sphere sous l'action de sous-groupes de la forme  $\text{SO}_3(\mathbb{R})_{\mathbf{e}}$  avec  $\mathbf{e} \in \mathbf{e}_{0,3}^\perp$  ou  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{0,3}$ .

Ces coordonnees permettent egalement de finir les coordonnees spheriques de tout point  $P \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ : on repere un point par le triplet

$$(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi[ \times [-\pi/2, \pi/2]$$

son altitude

$$r(P) = d(\mathbf{0}, P) = \|\vec{\mathbf{0}P}\|$$

et  $(\alpha, \beta)$  sont la longitude et latitude du vecteur unitaire  $\overrightarrow{\mathbf{0P}}/r(P)$ .





## CHAPITRE 4

### Groupes finis d'isometries et solides platoniciens

On va maintenant classifier les sous-groupes finis d'isometries de l'espace  $\mathbb{R}^x$ ; on rappelle que les groupes fini d'isometrie du plan sont

- (1) des groupes cycliques de la forme  $r^{\mathbb{Z}}$  ou  $r$  est une rotation possedant une seul point fixe (sauf si  $r = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  et le groupe est trivial),
- (2) des groupes dihedraux de la forme  $\langle r, s \rangle = r^{\mathbb{Z}} \sqcup s.r^{\mathbb{Z}}$  ou  $r$  est une rotation et  $s$  une symetrie (non-glissee) dont l'axe par par le centre de  $r$ .

#### 1. Enonce du Theoreme de classification

On peut faire la meme chose pour les isometries de l'espace; le cas principal est celui des sous-groupes finis de rotations. On aura besoin de la definition suivante

DÉFINITION 4.1. Soit  $n \geq 1$  et  $\mathfrak{S}_n = \text{Bij}(\{1, \dots, n\})$  le groupe symetrique de  $n$  elements. On rappelle que le groupe  $\mathfrak{S}_n$  admet un morphisme (de groupe) a valeurs dans le groupe multiplicatif  $\{\pm 1\}$  (la "signature") qui est non-trivial:

$$\text{sign} : \sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

Le noyau de  $\text{sign}$  est appelle groupe alterne et est note  $\mathfrak{A}_n$ :

$$\mathfrak{A}_n = \ker(\text{sign}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \text{sign}(\sigma) = \det(\varphi_\sigma) = +1\}.$$

Comme  $\text{sign}$  est non-trivial, c'est un morphisme surjectif et on a

$$\mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n \simeq \{\pm 1\};$$

ainsi  $\mathfrak{A}_n$  est d'indice 2 dans  $\mathfrak{S}_n$  ou de maniere equivalente d'ordre  $n!/2$ .

REMARQUE 1.1. On peut montrer le resultat d'unicite suivant :

THÉORÈME 4.1. La signature est le seul morphisme non-trivial de  $\mathfrak{S}_n$  a valeurs dans  $\{\pm 1\}$  et  $\mathfrak{A}_n$  est le seul sous-groupe d'indice 2 de  $\mathfrak{S}_n$ .

Ceci etant fait nous pouvons enoncer deux theoremes de classification des groupe finis d'isometrie

THÉORÈME 4.2. Soit  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^3)^+$  un groupe fini d'isometries speciales, alors en tant que groupe abstrait  $G$  est isomorphe a l'un des groupes suivant:

- (1) Un groupe cyclique.
- (2) Un groupe dihedral.
- (3) Le groupe alterne alterne  $\mathfrak{A}_4$  (d'ordre 12.)
- (4) Le groupe symetrique  $\mathfrak{S}_4$  (d'ordre 24.)
- (5) Le groupe alterne  $\mathfrak{A}_5$  (d'ordre 60.)

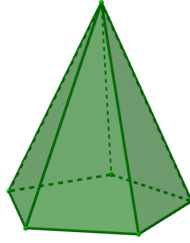


FIGURE 1. Cone de base un pentagone regulier: groupe d'isometries cyclique d'ordre 5.

et chacun des groupes ci-dessus peut-etre realise comme groupe fini d'isometries lineaires speciales de  $\mathbb{R}^3$ . Par ailleurs tout groupe fini d'isometries speciales est conjugué a l'un de ces groupes par une isometrie speciale.

Il y a differentes manieres de realiser (on dit plutot representer) les groupes abstraits ci-dessus comme des groupes d'isometries: une des ces maniere est de les identifiees comme groupes d'isometries speciales preservant une "figure" de  $\mathbb{R}^3$ . Ces figures seront des polytopes (compacts et convexes) de l'espace.

**THÉOREME 4.3.** *Soit  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^3)^+$  un groupe fini d'isometries speciales d'ordre  $n \geq 3$ , alors  $G$  est le groupe des isometries speciales preservant l'une des sou-ensembles de  $\mathbb{R}^3$  suivant:*

- (1) *Si  $G$  est cyclique d'ordre  $n \geq 3$  alors  $G$  est realisable comme le groupe des isometries speciales preservant un cone polyhedral convexe a  $n + 1$  sommets dont la base est un polygone regulier a  $n$  sommets et dont le dernier sommet est sur l'axe perpendiculaire au plan du polygone et passant par son centre. Si  $n = 3$ , on suppose que les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce cone n'est PAS un tetraedre regulier.*
- (2) *Si  $G$  est dihedral d'ordre  $2n \geq 6$  alors  $G$  est le groupe des isometries speciales d'un double-cone obtenu comme la reunion d'un cone de base un polygone regulier a  $n$  cotes comme ci-dessus et de son symetrique par rapport au plan de la base du cone. Si  $n = 4$ , on suppose, de plus, que les aretes ne sont pas toutes de meme longueur: ie. que ce double cone n'est PAS un octaedre regulier.*
- (3) *Si  $G$  est isomorphe au groupe alterne  $\mathfrak{A}_4$  alors  $G$  est le groupe des isometries speciales d'un tetraedre regulier.*
- (4) *Si  $G$  est isomorphe au groupe symetrique  $\mathfrak{S}_4$  alors  $G$  est le groupe des isometries speciales d'un cube (ainsi que d'un octaedre regulier).*
- (5) *Si  $G$  est isomorphe au groupe alterne  $\mathfrak{A}_5$  alors  $G$  est le groupe des isometries speciales d'un dodecaedre regulier (et d'un l'icosaedre regulier).*

1.0.1. *Cas des groupes d'isometrie generaux.* On considere le cas d'un groupe fini d'isometries quelconques. Tout le travail a pratiquement ete deja fait car il n'y a pas de grande difference entre un groupe fini d'isometries et son sous-groupe d'isometries speciales.

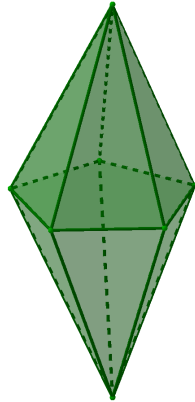


FIGURE 2. Double-cone de base un pentagone regulier: groupe d'isometries dihedral d'ordre 10.

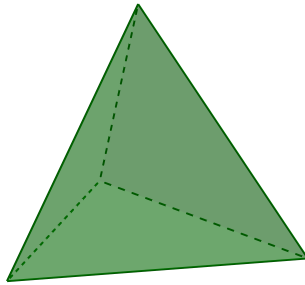


FIGURE 3. Tetraedre regulier.

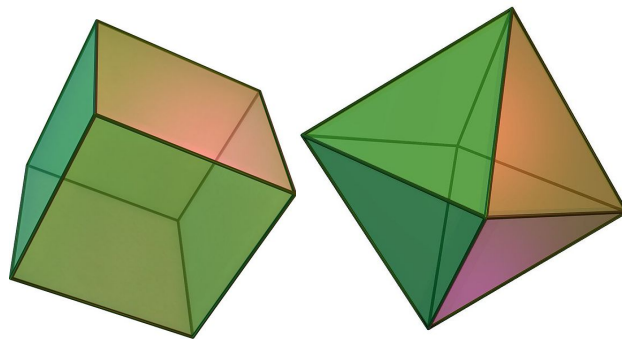


FIGURE 4. Hexaedre regulier (Cube) et Octaedre regulier

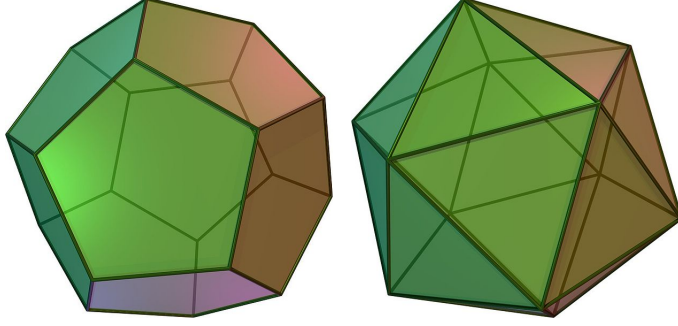


FIGURE 5. Dodecaedre regulier et Icosaedre regulier

THÉOREME 4.4. Soit  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  un groupe fini d'isometries et  $G^+ = G \cap \text{Isom}(\mathbb{R}^3)^+$  son sous-groupe d'isometries speciales (classifie dans la section precedente). Alors si  $G^+ \neq G$ ,  $G^+$  agit sur  $G$  avec deux orbites ( $G^+$  est d'indice  $G$ ),  $G^+$  et  $G^- = G \cap \text{Isom}(\mathbb{R}^3)^-$  l'ensemble des isometries non-speciales de  $G$  et  $G^+$  est un sous-groupe distingue de  $G$ . Soit  $\phi^- \in G - G^+$  alors

$$G^- = G^+ \cdot \phi^- = \phi^- \cdot G^+$$

$$G = G^+ \sqcup G^- = G^+ \sqcup G^+ \cdot \phi^- = G^+ \sqcup \phi^- \cdot G^+.$$

**Preuve:** On a deja fait un raisonnement similaire plusieurs fois. Si  $G^+ \neq G$ , ensemble  $G^+$  est le noyau de l'application

$$\det : \begin{array}{ccc} G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^3) & \mapsto & \{\pm 1\} \\ \varphi & \mapsto & \det \varphi \end{array}$$

c'est donc un sous-groupe distingue et (Thm Noyau-Image) on a

$$G/G^+ \simeq \text{Im det} \subset \{\pm 1\}, \quad |G/G^+| = |\text{Im det}|.$$

On a alors  $\text{Im det} = \{\pm 1\}$  et  $|G/G^+| = 2$ . Une des orbites de  $G$  sous l'action (par multiplication a droite ou a gauche) de  $G^+$  est  $G^+$  et l'autre son complement qui est necessairement  $G^-$ . Comme  $G^-$  est une orbite, on a pour tout  $\phi^- \in G^-$

$$G^- = G^+ \cdot \phi^- = \phi^- \cdot G^+.$$

□

Il reste a classifier les differentes classes d'isomorphisme de groupes  $G$  qu'on peut obtenir. Nous ne le ferons pas ici.

## 2. Classification des groupes d'isometries speciales

Pour montrer ce theoreme on commence par le resultat suivant

PROPOSITION 4.1. Soit  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  un groupe fini d'isometries; il existe  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  qui est un point fixe de tout element de  $G$ .

**Preuve:** Soit  $P \in \mathbb{R}^3$  et  $G.P$  son orbite; c'est un ensemble fini de points et soit  $\mathbf{e} = \text{Bar}(G.P)$  leur barycentre. On a donc

$$\mathbf{e} = \mathbf{0} + \left( \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} g.P - \mathbf{0} \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(P).$$

On va montrer que  $\mathbf{e}$  est un point fixe de tout  $g' \in G$ : comme  $g'$  est affine,  $g'$  preserve le barycentre et

$$g'(\mathbf{e}) = g'(Bar(G.P)) = Bar(g'(P))$$

et

$$g'(\mathbf{e}) = Bar(g'(P)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(g'(P)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \circ g')(P) = \frac{1}{|G|} \sum_{g'' \in G} g''(P) = \mathbf{e}$$

(en faisant le changement de variable  $g'' = g \circ g'$ .)  $\square$

**COROLLAIRE 4.1.** *Soit  $G$  un groupe fini d'isometries affines alors il existe une translation  $t$  tel que le conjugué*

$$Ad(t)(G) = t \circ G \circ t^{-1} \subset Isom(\mathbb{R}^3)_0$$

*est forme d'isometries lineaires.*

**Preuve:** Soit  $\mathbf{e}$  un point fixe pour tous les elements de  $G$  alors  $\mathbf{0}$  est un point fixe de tous les elements de  $t_{-\mathbf{e}} \circ G \circ t_{\mathbf{e}}$ : soit  $\varphi \in G$  on a

$$t_{-\mathbf{e}} \circ \varphi \circ t_{\mathbf{e}}(\mathbf{0}) = t_{-\mathbf{e}} \circ \varphi(\mathbf{e}) = t_{-\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}.$$

$\square$

**2.1. Application de la formule de Burnside.** Soit  $G \subset Isom(\mathbb{R}^3)^+$  un groupe d'isometries speciales affines; quitte a remplace  $G$  par son conjugué  $Ad(t_{-\mathbf{e}})(G)$  on peut supposer que  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  et donc que  $G \subset Isom(\mathbb{R}^3)_0$ .

On va appliquer la formule de Burside au groupe  $G$  agissant sur un ensemble  $X$  qu'on va maintenant definir. Pour cela on a besoin de la definition suivante:

**DÉFINITION 4.2.** *Soit  $g \in Isom(\mathbb{R}^3)_0$  une rotation non triviale ( $g \neq Id_{\mathbb{R}^3}$ ). Les poles de  $g$  sont les deux points (symetriques par rapport a l'origine) a l'intersection de la sphere unite*

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$$

*et de l'axe (des points fixes) de  $g$ :*

$$\{P_g, -P_g\} = \text{Fix}(g) \cap S^2.$$

Soit  $G$  non -trivial et soit  $X$  l'ensemble (fini) des poles des elements non-triviaux de  $G$ :

$$X = \bigcup_{g \in G} \text{Fix}(g) \cap S^2.$$

Le groupe  $G$  agit sur  $X$ : si  $P$  est un point fixe de  $g \in G - \{Id\}$ , alors  $g'.P$  est un point fixe de  $Ad(g')(g) = g' \circ g \circ g'^{-1} \in G$  et si  $P$  est sur la sphere  $S^2$  (est un pole de  $g$ ) alors  $g.P$  est egalement sur la sphere.

On considere la decomposition de  $X$  en differentes orbites. Pour chaque orbite

$$\mathcal{O}_i, \quad i = 1, \dots, o,$$

on choisit un point  $x_i$ ; on note  $G_{x_i}$  le stabilisateur de ce point et  $s_i = |G_{x_i}|$  son cardinal (on rappelle que tous les stabilisateurs des points d'une meme orbite sont conjugué donc ont meme cardinal). On suppose que les orbites sont numerotes de sorte la suite  $(s_i)_{i \leq o}$  soit croissante: on a

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_o.$$

PROPOSITION 4.2. *Le  $G$ -ensemble  $X$  n'a que deux ou trois orbites et les seules possibilités sont les suivantes:*

$o$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$ G $	$ \mathcal{O}_1 $	$ \mathcal{O}_2 $	$ \mathcal{O}_3 $	$ X $
2	$n$	$n$		$n$	1	1		2
3	2	2	$n$	$2n$	$n$	$n$	2	$2n + 2$
3	2	3	3	12	6	4	4	14
3	2	3	4	24	12	8	6	26
3	2	3	5	60	30	20	12	62

**Preuve:** Par la formule de Burside, le nombre d'orbites vaut

$$o = |G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} (|X^{\text{Id}}| + \sum_{g \in G - \{\text{Id}\}} |X^g|).$$

On a  $|X^{\text{Id}}| = |X|$  et pour  $g \neq \text{Id}$  on a  $|X^g| = 2$  ainsi on a

$$(2.1) \quad o = \sum_{i=1 \dots o} 1 = \frac{|X|}{|G|} + \frac{2}{|G|} (|G| - 1).$$

On rappelle que pour chaque orbite  $\mathcal{O}_i$ , on a

$$(2.2) \quad |\mathcal{O}_i| = |G|/s_i.$$

Ainsi, par la formule des classes, on a

$$|X| = \sum_{i=1 \dots o} |\mathcal{O}_i| = \sum_{i=1 \dots o} \frac{|G|}{s_i}$$

et donc

$$(2.3) \quad \frac{|X|}{|G|} = \sum_{i=1 \dots o} \frac{1}{s_i}.$$

Finalement combinant les deux formules on obtient

$$\sum_{i=1 \dots o} 1 - \frac{1}{s_i} = 2 - \frac{2}{|G|}.$$

Comme  $1 - \frac{1}{s_i} < 1$  (car  $s_i > 0$ ) et que  $|G| \geq 2$ , on a

$$1 \leq 2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{i=1 \dots o} 1 - \frac{1}{s_i} < o \implies o \geq 2.$$

D'autre part pour chaque orbite  $\mathcal{O}_i$ , on a

$$s_i \geq 2;$$

en effet, par définition,  $x_i$  est invariant par  $\text{Id}$  et par un élément  $g_i$  non-trivial. Ainsi  $1 - \frac{1}{s_i} \geq 1/2$  et

$$\frac{1}{2}o \leq \sum_{i=1 \dots o} 1 - \frac{1}{s_i} = 2 - \frac{2}{|G|} < 2 \implies o < 4.$$

Ainsi le nombre d'orbites possible est 2 ou 3.

– Supposons qu'on soit dans le premier cas, alors par (2.1)

$$\frac{|X|}{|G|} = \frac{2}{|G|} \implies |X| = 2$$

et necessairement  $X$  est de la forme

$$X = \{x, -x\}$$

(car une rotation non-triviale a deux points fixes sur la sphere unite) et tous les elements de  $G$  sont des rotations d'axe  $(-xx)$ ; ainsi les deux orbites sont  $\{x\}$  et  $\{-x\}$  et  $G$  est le stabilisateur de chacun de ces deux points.

– Si on a trois orbites  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ ; rappelons qu'elles sont numerotees de sorte que

$$|\mathcal{O}_1| = |G|/s_1, |\mathcal{O}_2| = |G|/s_2, |\mathcal{O}_3| = |G|/s_3$$

avec

$$2 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3.$$

Par par (2.1) on a

$$|X| = |G| + 2$$

et par (2.3) on a

$$(2.4) \quad \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1 + \frac{2}{|G|} > 1.$$

On a necessairement  $s_1 = 2$ : si  $s_1 \geq 3$  on aurait  $s_2, s_3 \geq 3$  et

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \leq 1.$$

Ainsi  $s_1 = 2$  et

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{|G|} > \frac{1}{2}.$$

Par le meme raisonnement on ne peut avoir  $s_2 \geq 4$  et donc  $s_2 = 2$  ou  $3$ .

Si  $s_2 = 2$ , on obtient

$$s_3 = |G|/2.$$

Ainsi  $|G|$  est pair (disons  $|G| = 2n$ ) et on a

$$s_1 = s_2 = 2, s_3 = n \text{ et } |\mathcal{O}_1| = n, |\mathcal{O}_2| = n, |\mathcal{O}_3| = 2.$$

Si  $s_2 = 3$  on a

$$\frac{1}{s_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{|G|} > \frac{1}{6}$$

et necessairement  $s_3 = 3, 4$  ou  $5$ . On remplit alors les trois dernieres lignes du tableau en utilisant (2.2) et (2.4).

□

### 3. Identification des different groupes possibles

PROPOSITION 4.3. *Supposons qu'on soit dans le premier cas*

$$|X| = 2, o = 2, s_1 = n, s_2 = n, |G| = n, |X| = 2$$

alors  $X = \{P, -P\}$  et  $G$  est un groupe cyclique de rotations autour de l'axe  $\mathbb{R} \cdot \vec{P} = (-P, P)$ .

**Preuve:** L'ensemble  $X$  est symétrique par rapport à l'origine donc nécessairement  $X = \{P, -P\}$  pour  $P \in S^2$ . Toutes les rotations de  $G$  sont donc d'axe  $\mathbb{R}.P = (-P, P)$ . Les rotations de  $G$  sont complètement déterminées par leur restriction au plan  $(-P, P)^\perp$  orthogonal à cet axe : en effet ces rotations agissent trivialement sur l'axe  $(-P, P)$  et le plan et son axe perpendiculaire engendrent  $\mathbb{R}^3$ ; en d'autres termes l'application qui à une rotation de  $G$  associe sa restriction au plan orthogonal à l'axe  $(-P, P)$

$$\text{res}_{(-P, P)^\perp} : r \in G \mapsto r|_{(-P, P)^\perp}.$$

est un morphisme de groupes allant de  $G$  à valeurs dans le groupe des isométries spéciales du plan  $(-P, P)^\perp$ . Ce morphisme est injectif, ie. son noyau est réduit à  $\text{Id}$ : en effet si  $\text{res}_{(-P, P)^\perp}(r) = \text{Id}_{(-P, P)^\perp}$  alors  $r$  agit trivialement sur  $\mathbb{R}.P$  et sur  $(\mathbb{R}.P)^\perp$  et donc trivialement sur  $\mathbb{R}^3$  car  $r$  est linéaire et que  $\mathbb{R}.P$  et  $(\mathbb{R}.P)^\perp$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

Ainsi l'image de cette restriction est un groupe fini de rotations du plan. Le groupe  $G$  qui lui est isomorphe est donc cyclique.  $\square$

Dans cette preuve on a utilisé le Lemme suivant qu'on utilisera dans toute la suite sans en faire toujours mention explicite:

LEMME 4.1. *Soit  $G$  un groupe fini non-trivial de rotations ayant toutes le même axe, alors  $G$  est cyclique.*

PROPOSITION 4.4. *Supposons qu'on soit dans le deuxième cas*

$$o = 3, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = n \geq 2, \quad |G| = 2n, \quad |X| = 2n + 2.$$

Alors  $\mathcal{O}_3 = \{-P_3, P_3\}$  et  $G$  est un groupe diédral formé de  $n$  rotations autour de l'axe  $(-P_3, P_3)$  et de  $n$  rotations d'angle  $\pi$  dont les axes, contenus dans le plan  $P_3^\perp$ , passent par les éléments des orbites  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ . L'orbite  $\mathcal{O}_2$  (ainsi que l'orbite  $\mathcal{O}_1$ ) forme un polygone régulier à  $n$  côtés (situé dans le plan  $P_3^\perp$ ). Si  $n$  est impair on a  $\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_2$  et si  $n$  est pair  $\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_1$ . Par ailleurs, l'orbite  $\mathcal{O}_1$  est formée par les intersections de la sphère avec les axes passant par les milieux des côtés du polygone  $\mathcal{O}_2$  et est obtenue à partir de celle-ci par une rotation d'angle  $k\frac{\pi}{n}$  (rad) pour  $k$  impair.

**Preuve:** Considérons la troisième orbite  $\mathcal{O}_3 = \{P_3, P'_3\}$  et  $G_3$  le stabilisateur de  $P_3$ . Comme  $G_3$  est d'indice 2 dans  $G$  il est distingué et comme le stabilisateur de  $P'_3$  est conjugué à  $G_3$  c'est également  $G_3$ . Il en résulte que  $P'_3 = -P_3$  et  $\mathcal{O}_3 = \{P_3, -P_3\}$ .

Comme ci-dessus,  $G_3 = r_3^{\mathbb{Z}}$  est cyclique d'ordre  $n$  et les orbites de  $P_1$  et  $P_2$  (qui sont distincts de  $\pm P_3$ ) sous l'action de ce groupe sont d'ordre  $n$  et sont contenus dans des plans perpendiculaires à  $(P_3, -P_3)$ . Soit  $r_2$  l'élément non-trivial de  $G_2$  ( $r_2$  est d'ordre 2) alors  $r_2$  ne fixe pas  $P_3$  et donc envoie  $P_3$  sur  $-P_3$ . Comme  $G_2$  fixe  $P_2$ ,  $P_2$  est équidistant de  $P_3$  et  $-P_3$ :  $r_2$  est une isométrie donc on a

$$d(P_2, -P_3) = d(r_2(P_2), r_2(P_3)) = d(P_2, P_3)$$

Ainsi  $\mathcal{O}_2$  est contenu dans le plan perpendiculaire à  $(P_3, -P_3)$  passant par l'origine et idem pour  $\mathcal{O}_1$ .

Si  $n$  est pair, alors  $r_3^{n/2}$  est une rotation d'ordre 2 exactement qui envoie donc  $P_2$  sur  $-P_2$ : ainsi  $-P_2 \in \mathcal{O}_2$  et on a donc  $-\mathcal{O}_2 = -\mathcal{O}_2$ ; de même  $\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_1$ .

Si  $n$  est impair alors  $-P_2$  n'appartient pas à  $G_3.P_2 = r_3^{\mathbb{Z}}.P_2$  qui est d'ordre  $n$  et appartient donc à  $\mathcal{O}_1$  et donc

$$\mathcal{O}_1 = G_3.P_2 = -G_3.P_2 = -\mathcal{O}_1.$$

$\square$



REMARQUE 3.1. Le groupe est  $G$  le groupe des isometries d'un double cone dont les sommets sont  $\{P_3, -P_3\}$  et dont la base est un polygone regulier a  $n$  cotes de sommets une des deux orbites restantes (disons  $\mathcal{O}_2$ ) et dont l'autre orbite (disons  $\mathcal{O}_1$ ) est formee par les intersections de la sphere avec les 1/2-droites passant par l'origine et les milieux des cotes de ce polygone.

PROPOSITION 4.5. *Supposons que l'on soit dans le troisieme cas*

$$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 3, |G| = 12, |X| = 14$$

alors les 4 points de la deuxieme et de la troisieme orbite  $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$  forment chacun un tetraedre regulier (4 sommets, 6 aretes, 4 faces) dont  $G$  est le groupe d'isometries; ces deux orbites sont images l'une de l'autre par la symetrie centrale par rapport a  $\mathbf{0}$ . Le groupe  $G$  est isomorphe au groupe alterne  $\mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{S}_4$ .

**Preuve:** Notons la troisieme orbite  $\mathcal{O}_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ . Le stabilisateur  $G_{P_1}$ ,  $P_1$  est un groupe cyclique d'ordre 3 (Lemme 4.1). Considerons le point  $P_2$ : on a  $P_2 \neq -P_3$  car sinon le generateur  $G_{P_1}$  fixerait  $P_1$  et  $P_2$  et devrait echanger les deux point restant  $P_3$  et  $P_4$  mais ce n'est pas possible car ce generateur est d'ordre impair. Ainsi l'orbite de  $P_2$  sous l'action de ce groupe est d'ordre 3 exactement, forme un triangle equilateral dans un plan orthogonal a l'axe  $(P_1, -P_1)$  et est contenu dans  $\{P_2, P_3, P_4\}$ : ainsi  $\{P_2, P_3, P_4\}$  est l'orbite de  $P_2$  sous l'action de ce sous-groupe. Si  $r_{P_1}$  est une generateur de  $G_{P_1}$  on a pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$|P_1 P_2| = |r_{P_1}^k(P_1) r_{P_1}^k(P_2)| = |P_1 r_{P_1}^k(P_2)|$$

et donc

$$|P_1 P_2| = |P_1 P_3| = |P_1 P_4|$$

et par ailleurs

$$|P_2 P_3| = |P_2 P_4| = |P_3 P_4|$$

puisque  $P_2 P_3 P_4$  est equilateral. Repetant le meme raisonnement avec  $P_2$  et  $P_3$  on voit que

$$|P_1 P_2| = |P_1 P_3| = |P_1 P_4| = |P_2 P_3| = |P_2 P_4| = |P_3 P_4|$$

et (sachant que tous ces points sont sur la sphere unite) cela determine de maniere unique la hauteur du plan affine defini par  $P_2, P_3, P_4$  (disons que  $P_1 = (0, 0, 1)$  est place au pole nord). En effet, soit  $r$  le rayon du triangle  $[P_2, P_3, P_4]$  et

$$\ell = |P_1 P_2| = |P_1 P_3| = |P_1 P_4| = |P_2 P_3| = |P_2 P_4| = |P_3 P_4|$$

la longueur d'une arete et  $d$  la distance de  $P_1$  au plan defini par  $\{P_2, P_3, P_4\}$ : en placant  $P_1$  au pole nord, ce plan a pour equation

$$z = 1 - d.$$

On a

$$r = \frac{\ell}{2 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{\ell}{\sqrt{3}}, \quad d = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \ell \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \ell \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Si on note  $2\alpha$  l'angle  $\widehat{P_1 \mathbf{0} P_2}$ ; on a  $\ell = 2 \sin \alpha$  et

$$r^2 = \ell^2 \cos^2 \alpha = \ell^2 \left(1 - \frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{\ell^2}{3}$$

et donc

$$1 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} \implies \ell = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad d = 8/3.$$

et finalement  $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

On obtient ainsi un tetraedre regulier.

De plus pour tout point  $P_i$  de  $\mathcal{O}_3$  le point oppose  $-P_i$  est le second point fixe de stabilisateur de  $P_i$  donc  $-\mathcal{O}_3 \in X$  et forme une orbite (par linearite des isometries). Il ne peut s'agir que de  $\mathcal{O}_2$ . On a donc

$$\mathcal{O}_2 = -\mathcal{O}_3$$

est egalement un tetraedre regulier.

Comme les quatre points ne sont pas coplanaires, le groupe  $G$  agit fidelement sur les 4 points (si une isometrie laisse fixe ces 4 points elle doit etre l'identite), ainsi  $G$  s'identifie a un sous-groupe du groupe  $\mathfrak{S}_4$ . Comme le groupe  $\mathfrak{S}_4$  ne possede qu'un seul sous-groupe d'indice 2 c'est donc le groupe alterne  $\mathfrak{A}_4$ .  $\square$

REMARQUE 3.2. Par ailleurs on verifie que la premiere orbite est formee par les intersections de la sphere avec les axes joignant les milieux opposes des 6 cotes de ces deux tetraedres et le stabilisateur d'un point de cette orbite est engendre par la rotation d'angle  $\pi$  d'axe passant par ce point et son oppose.

PROPOSITION 4.6. *Supposons que l'on soit dans le quatrieme cas*

$$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 4, |G| = 24, |X| = 26$$

alors les 6 points de la troisieme orbite  $\mathcal{O}_3$  forment un octaedre regulier et les 8 points de la seconde  $\mathcal{O}_2$  forment un cube et  $G$  est le groupe d'isometries de ces deux polytopes reguliers et est isomorphe au groupe symetrique  $\mathfrak{S}_4$ . On a

$$\mathcal{O}_2 = -\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3 = -\mathcal{O}_3.$$

La premiere orbite  $\mathcal{O}_1$  d'ordre 12 verifie

$$\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_1$$

et est formee des intersections de la sphere avec les droites passant par les milieux des 12 aretes du cube (ou des 12 aretes de l'octahedre) et le milieu oppose. Le stabilisateur d'un de ces elements est engendre par la rotation d'angle  $\pi$  et d'axe le point et son oppose.

**Preuve:** On remarque que les stabilisateurs d'orbites distinctes sont de tailles distinctes.

L'orbite  $\mathcal{O}_3$  contient 6 elements  $\{P_0, \dots, P_5\}$ ; considerons  $P_0$ ; son stabilisateur est cyclique d'ordre 4; d'autre part  $-P_0$  appartient aussi a  $X$  et son stabilisateur est aussi d'ordre 4. Comme les stabilisateurs des points des autres orbites sont d'ordre 2 ou 3, on en deduit que  $-P_0$  appartient aussi a  $\mathcal{O}_3$ . On a donc  $\mathcal{O}_3 = -\mathcal{O}_3$ . Disons que

$$-P_0 = P_5, P_3 = -P_1, P_4 = -P_2.$$

Par le meme raisonnement, chacune des deux autres orbites est invariante par la symetrie centrale  $P \mapsto -P$ .

Le stabilisateur de  $P_0$ ,  $G_0$  est cyclique d'ordre 4, engendre par une rotation d'angle  $\pi/2$ , qui fixe  $P_0$  et  $P_5 = -P_0$ . L'orbite d'un point par un tel groupe, si ce point n'est pas sur l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{O}P_0$  est l'ensemble des sommets d'un carre contenu dans un plan affine perpendiculaire a  $(P_0P_5)$  et passant par ce point. Ainsi  $G_0$  agit sur les 4 autres points  $\{P_1, P_2, P_4 = -P_1, P_3 = -P_2\}$  avec une seule orbite a l'intersection de  $S^2$  et d'un plan perpendiculaire a  $(P_0P_5)$ . Ces quatre points forment un carre et compte-tenu de l'invariance

de l'orbite par symetrie centrale, le plan contenant ce carre or passe necessairement par l'origine et sa diagonale est de longueur 2. On a

$$|P_1P_2| = |P_2P_4| = |P_4P_3| = |P_1P_3| = \sqrt{2}.$$

Reprenant le raisonnement precedent avec les point  $P_1, P_4$  on voit que

$$\{P_0, P_2, P_5 = -P_0, P_3 = -P_2\}$$

forment un carree et

$$|P_0P_2| = |P_2P_5| = |P_5P_3| = |P_0P_3| = \sqrt{2}.$$

On voit ensuite que ces 6 points forment un octaedre regulier. Quitte a faire une rotation adequate on peu supposer que  $P_0 = (0, 0, 1)$  et  $P_1 = (1, 0, 0)$  et on a alors

$$P_5 = (0, 0, -1), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (-1, 0, 0), P_4 = (0, -1, 0).$$

La seconde orbite  $\mathcal{O}_2$  comporte 8 elements tous distincts de  $\mathcal{O}_3$ . Ainsi l'action de  $G_0$  sur cette orbite se decompose en deux sous-orbites  $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$  et  $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$  de taille 4 qui sont les sommets des carres situes dans des plans perpendiculaires a l'axe  $(P_0P_5)$ . De plus le stabilisateur d'un de ces points, disons  $Q_1$  est d'ordre trois et decompose l'orbite  $\mathcal{O}_3$  en deux sous-orbites qui sont des triangles equilateraux perpendiculaires a l'axe  $(Q_1, -Q_1)$  et symetriques par rapport a l'origine: l'axe  $(Q_1, -Q_1)$  est celui passant par les centres de ces deux triangles. Par exemple pour le triangle  $(P_0, P_1, P_2)$  on obtient le point  $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  dont l'orbite sous  $G_0$  est donnee par les points de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, 1)$$

et on a donc

$$R_1 = -Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$$

dont l'orbite sous  $G_0$  est donnee par les points de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, -1).$$

Ainsi  $\mathcal{O}_2$  est l'ensemble des sommets d'un cube de sommets ont pour coordonnees

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Pour montrer que le groupe  $G$  est isomorphe a  $\mathfrak{S}_4$ , on note qu'il agit sur l'ensemble des 4 "grandes diagonales" du cube (les axes passant par  $\pm Q_1, \pm Q_2, \pm Q_3, \pm Q_4$ ). On va montrer qu'une rotation  $r \in G$  qui laisse globalement invariant chacune de ces diagonales est l'identite: pour tout choix

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}$$

on doit avoir

$$r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \pm(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Ces vecteurs sont donc tous vecteurs propres pour  $r$ . Si  $r \neq \text{Id}$  alors l'un de ces vecteurs doit etre de valeur propre  $-1$ : disons

$$r(\varepsilon) = -\varepsilon$$

alors  $r$  serait une rotation d'angle  $\pi$  et son axe (le sous-espace propre de valeur propre 1 qui est de dimension 1) devrait etre situe dans le plan perpendiculaire a l'axe  $\mathbb{R}\varepsilon$  et

comme on dispose d'une base de  $\mathbb{R}^3$  formée uniquement de vecteur propres, un de ceux-ci doivent avoir 1 pour valeur propre. Mais aucun vecteur de la forme  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  n'est perpendiculaire à  $\varepsilon$  (la somme d'un nombre impair de  $\pm 1$  est impaire et donc non-nulle). On en déduit que  $r = \text{Id}$ . A travers cette action, obtient donc un morphisme injectif de  $G$  dans  $\text{Bij}(4 \text{ "grandes diagonales"})$  qui est bijectif par cardinalité.  $\square$

PROPOSITION 4.7. *Supposons que l'on soit dans le dernier cas*

$$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 5, |G| = 60, |X| = 62$$

alors les 12 points de la troisième orbite forment un icosaèdre régulier (possédant 20 faces et 30 arêtes) et les 20 points de la seconde forment un dodécaèdre régulier (possédant 12 faces et 30 arêtes) et les centres de chacune des 20 faces de cet icosaèdre est aligné avec un des 12 sommets du dodécaèdre (et vice-versa pour les centres des 12 faces du dodécaèdre). Les 30 points de la première orbite sont alignés avec les milieux des arêtes de chacun de ces deux polyèdres. Le groupe  $G$  est le groupe d'isométries de ces deux polyèdres réguliers et est isomorphe au groupe alterne  $\mathfrak{A}_5$ .

**Preuve:** Comme précédemment on voit que chaque orbite est invariante par la symétrie centrale  $P \mapsto -P$  (les taille des stabilisateur des éléments de chacune des orbites sont distinctes). Considérons l'orbite  $\mathcal{O}_3$  qui contient 12 points. Pour  $P_0 \in \mathcal{O}_3$ , le groupe  $G_0$  est cyclique d'ordre 5 (qui est premier), fixe  $P_0$  et  $P'_0 = -P_0$  et agit donc sur les 10 points restant de  $\mathcal{O}_3$  sans point fixe. Ces 10 points se décomposent donc sous l'action de  $G_0$  en deux orbites

$$\{P_1, \dots, P_5\}, \{P'_1 = -P_1, \dots, P'_5 = -P_5\}$$

qui forment des pentagones réguliers qui sont de plus symétriques par rapport à  $\mathbf{0}$  (ces orbites sont symétriques l'une de l'autre : en effet une rotation qui enverrait  $P_1$  sur  $-P_1$  devrait être d'ordre 2 et 5 est impair).

Les plans contenant ces pentagones sont soit distincts (parallèles et symétriques) soit confondus (et donc égaux au plan  $(P_0, -P_0)^\perp$ ).

On supposera que  $P_1$  est tel que

$$|P_0 P_1| \leq |P_0 P'_1|$$

On a

$$|P_0 P_i| = |P'_0 P'_i|, \quad i = 2, 3, 4, 5.$$

Notons  $\ell = |P_0 P_1|$  cette distance et  $r$  le rayon des deux pentagones et  $d$  la distance du plan contenant  $\{P_1, \dots, P_5\}$  à  $P_0$  (on a donc  $d \leq 1$ ). Notons que  $r$  et  $d$  sont déterminées par la longueur  $\ell$ : en effet on a (cf. Figure 7)

$$(3.1) \quad r = \frac{\ell}{2 \sin(\pi/5)}, \quad d = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \ell \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2(\pi/5)}}.$$

Notons que

$$4 \sin^2(\pi/5) = 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

et que  $2 \cos(\frac{2\pi}{5}) = \omega_5 + \omega_5^{-1}$  est racine du polynôme  $X^2 + X - 1$  car

$$(\omega_5 + \omega_5^{-1})^2 + \omega_5 + \omega_5^{-1} - 1 = \omega_5^2 + \omega_5^{-2} + \omega_5 + \omega_5^{-1} + 1 = 0.$$

Ainsi

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

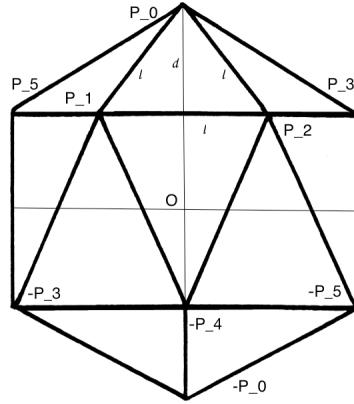


FIGURE 6.

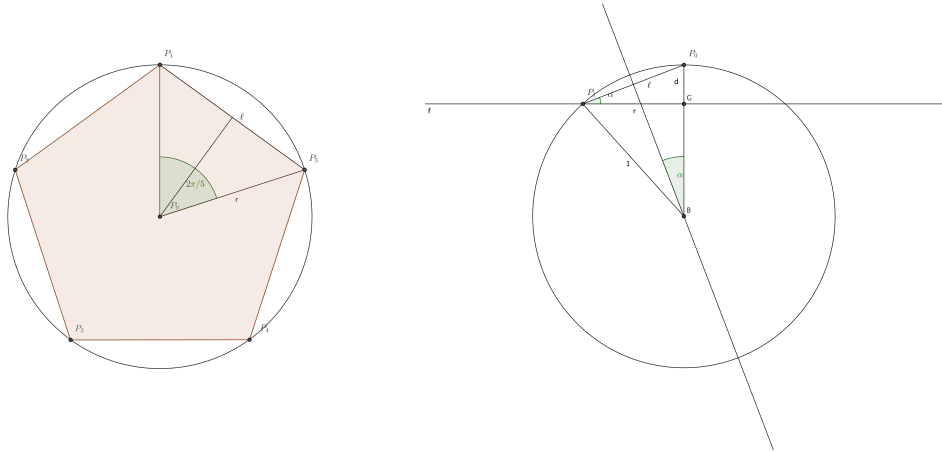


FIGURE 7. Calculs de  $r$  et  $d$ .

et

$$4 \sin^2(\pi/5) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Considerons l'action du groupe  $G_1$  d'ordre 5 des rotations laissant fixe  $P_1$ . Il admet deux orbites, celle de  $P_0, \{Q_1 = P_0, \dots, Q_5\}$  et celle de  $P'_0, \{Q'_1 = -P_0, \dots, Q'_5 = -Q_5\}$  qui forment a nouveau deux pentagones reguliers, symetriques par rapport a l'origine et situe de part et d'autre et paralleles au plan  $\overrightarrow{OP_1}^\perp$ . On a par le meme raisonnement

$$|P_1Q_i| = |P'_1Q'_i| = |P_0P_i| = |P'_0P'_i|, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

De plus  $\{Q_1 = P_0, \dots, Q_5\}$  contient necessairement au moins un element de  $\{P_2, P_3, P_4, P_5\}$  (disons  $P_2$ ) et un element de  $\{P'_2, P'_3, P'_4, P'_5\}$  mais ce dernier ne peut etre  $P'_2 = -P_2$ , disons donc qu'il s'agit de  $P'_4 = -P_4$ . Par symetrie  $\{Q'_1 = P'_0, \dots, Q'_5\}$  contient donc  $P'_2 = -P_2$  et  $-P'_4 = P_4$ .

En particulier on a

$$|P_0P_2| = |P_0P_1| = |P_1P_2| = \ell$$

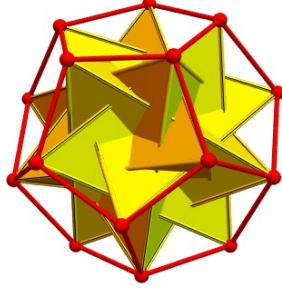


FIGURE 8. 5 Tetraedres reguliers dans un dodecahedre (Greg Egan).

et  $P_0P_1P_2$  forment un triangle equilateral et cela determine uniquement la valeur  $|P_0P_1|$ : soit  $2\alpha$  l'angle  $\widehat{P_0OP_1}$ , on a

$$\ell = 2 \sin \alpha$$

et (par (3.1))

$$r^2 = \ell^2 \cos^2 \alpha = \ell^2 \left(1 - \frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{\ell^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{5}} \text{ ainsi } 1 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{5}}$$

et

$$\ell^2 = 4 \left(1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{5}}\right) = 4 \left(1 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right) = 2 \frac{5 - \sqrt{5}}{5} \implies \ell = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Notons que comme  $\ell < \sqrt{2}$  le plan contenant  $\{P_1, \dots, P_5\}$  est pas le plan vectoriel perpendiculaire a l'axe  $(-P_0P_0)$ . On doit alors verifier qu'avec cette valeur de  $\ell$  tout ce recolle bien et que  $\mathcal{O}_3$  est l'ensemble des sommets d'un icosaedre regulier ou les aretes relient un point  $P_0 \in \mathcal{O}_3$  aux points de l'orbite de  $G_0$  qui (n'est pas  $\{P_0\}$  et qui) est la plus proche de  $P_0$ .

On montre alors que  $\mathcal{O}_2$  est forme des poles des rotations laissant invariant les triangles equilateraux formant les 20 faces de l'icosaedre de sommets  $\mathcal{O}_3$ .

On va "montrer" que  $G \simeq \mathfrak{A}_5$ . Pour cela on note qu'il existe 4 sommet du dodecahedre qui forment un tetrahedre regulier (il y a 5 manieres de realiser le tetrahedre regulier parmi les sommets du dodecahedre, cf figure 3). choisissons un de ces tetrahedres: par ce que nous avons discute le sous-groupe de  $H \subset G$  preservant ce tetrahedre (le sous-groupe engendre par les rotations d'ordre 3 d'axe passant chacun des 4 sommet est isomorphe groupe alterne  $\mathfrak{A}_4$  qui est d'ordre 12).

Le groupe  $G$  agit sur le quotient  $G/H$  par translation et cette action est en fait fidele<sup>1</sup>. On a donc un morphisme injectif

$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G/H) \simeq \mathfrak{S}_5$$

car  $|G/H| = 60/12 = 5$ . Ainsi  $G$  est isomorphe a un sous-groupe d'indice 2 de  $\mathfrak{S}_5$  et doit donc etre isomorphe a  $\mathfrak{A}_5$  par le Theoreme 4.1. □

<sup>1</sup>Il faut le demontrer et ce n'est pas completement evident.

#### 4. Presentation des solides platoniciens

Ainsi les trois dernieres familles sont (a conjugaison pres) limitees a un seul groupe. Ces trois groupes sont les groupes d'isometries speciales des *cinq solides platoniciens*: le tetraedre regulier, hexaedre regulier (ou cube), octaedre regulier, dodecaedre regulier et l'icosaedre regulier. Ces cinq solides sont exactement les cinq *polytopes reguliers* de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Dans cette section nous allons definir et discuter cette notion.

##### 4.1. Polytopes.

DÉFINITION 4.3. *Un demi-espace (affine) ferme  $d\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^\times$  est l'ensemble des points de satisfaisant la condition suivante*

$$d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_{\vec{w},h} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^\times, \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leq h\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^\times, ax + by + cz - h \leq 0\}$$

avec  $\vec{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^\times$ ,  $h \in \mathbb{R}$ . C'est un ferme non-borne de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontiere est le plan affine d'equation

$$P_{\vec{w},h} : ax + by + cz = h.$$

DÉFINITION 4.4. *Un polytope  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$  est un sous-ensemble compact d'interieur non-vide obtenu comme intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermes de  $\mathbb{R}^3$ :*

$$\mathbf{P} = \bigcap_{i=1}^t d\mathbf{E}_i$$

avec

$$d\mathbf{E}_i = \{P \in \mathbb{R}^\times, \langle P, \vec{w}_i \rangle - h_i \leq 0\}$$

avec  $\vec{w}_i \in \mathbb{R}^\times$  et  $h_i \in \mathbb{R}$ .

Rappelons que

DÉFINITION 4.5. *Un ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est convexe si et seulement si*

$$\forall P, P' \in \Omega, \text{ le segment } [P, P'] \text{ est contenu dans } \Omega.$$

EXEMPLE 4.1. – Un demi-espace  $d\mathbf{E}$  est convexe.

- Une boule est convexe.
- Une intersection de convexes est convexe.
- Un polytope est donc convexe.

DÉFINITION 4.6. *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ensemble quelconque. L'enveloppe convexe de  $\Omega$ ,  $\text{Conv}(\Omega) \supset \Omega$  est le plus petit convexe contenant  $\Omega$ .*

REMARQUE 4.1. Un tel "plus petit" convexe existe bien: c'est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant  $\Omega$  ( $\mathbb{R}^3$  est convexe et contient  $\Omega$  donc cette intersection est non-vide).

On a la caracterisation suivante qui peut etre utile:

PROPOSITION 4.8. *L'enveloppe convexe  $\text{Conv}(\Omega)$  est la reunion de tous les barycentres d'elements de  $\Omega$  de poids positifs ou nuls :*

$$\text{Conv}(\Omega) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, n \geq 1, x_1, \dots, x_n \in \Omega, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

PREUVE. Exercice. □

EXERCICE 4.1. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ensemble. Montrer que si  $\Omega$  est ouvert (resp. ferme) alors  $\text{Conv}(\Omega)$  est ouvert (resp. ferme).

4.1.1. *Faces, aretes, sommets.* Nous allons maintenant definir les faces, aretes et sommets d'un polytope.

THÉORÈME 4.5. *Soit un polytope de la forme*

$$\mathbf{P} = \bigcap_{i=1}^f d\mathbf{E}_i.$$

*Supposons que dans l'écriture précédente le nombre  $f$  de demi-espaces dont  $\mathbf{P}$  est l'intersection, est minimal.*

(1) *les demi-espaces*

$$\{d\mathbf{E}_i, i = 1, \dots, f\}$$

*et les plans associés  $\{P_i, i = 1, \dots, f\}$  sont uniquement définis par  $\mathbf{P}$ .*

(2) *Pour chaque  $i = 1, \dots, f$ , l'intersection  $\mathbf{F}_i = P_i \cap \mathbf{P}$  est un polygone compact convexe d'intérieur non-vidé<sup>2</sup> et est contenu dans la frontière  $\partial\mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P}^\circ$ . On l'appelle la  $i$ -ème face de  $\mathbf{P}$ .*

(3) *La frontière est la réunion des faces de  $\mathbf{P}$*

$$\partial\mathbf{P} = \bigcup_{i=1}^f \mathbf{F}_i.$$

PREUVE. Nous utiliserons la remarque suivante: étant donné une fonction de la forme

$$l_{\vec{w}, h} : P \mapsto \langle P, \vec{w} \rangle - h.$$

C'est une fonction affine et sa restriction à toute droite  $D \subset \mathbb{R}^3$  est une fonction linéaire (quand on paramétrise la droite linéairement) et en particulier elle est constante ou strictement monotone.

Notons que pour tout  $i$ ,  $\mathbf{F}_i$  est compacte (car intersection d'un compact et d'un fermé), convexe (car intersection des convexes  $\mathbf{P}$  et  $P_i$ ) et que dans le plan  $P_i$ ,  $\mathbf{F}_i$  est l'intersection des demi-plans d'équation

$$\langle P, \vec{w}_j \rangle - h_j \leq 0, j \neq i, \langle P, \vec{w}_i \rangle - h_i = 0.$$

Ainsi, si on montre que  $\mathbf{F}_i$  est d'intérieur non-vidé, on aura que  $\mathbf{F}_i$  est un polygone convexe.

Notons également que

$$\mathbf{P}^\circ = \bigcap_{i=1}^f d\mathbf{E}_i^\circ = \{P \in \mathbb{R}^3, \langle \vec{v}, \vec{w}_i \rangle - h_i < 0\} \neq \emptyset.$$

En particulier,  $\mathbf{F}_i = P_i \cap \mathbf{P}$  est contenue dans  $\mathbf{P}$  mais pas dans l'intérieur et est donc contenue dans la frontière  $\partial\mathbf{P}$ ; réciproquement, pour tout point  $P \in \partial\mathbf{P}$  on doit avoir  $\langle P, \vec{w}_i \rangle - h_i \leq 0$  pour au moins un  $i$  et donc  $P$  est contenu dans au moins une des  $\mathbf{F}_i$ . On a donc

$$\partial\mathbf{P} = \bigcup_{i=1}^f \mathbf{F}_i.$$

---

<sup>2</sup>Pour la topologie restreinte au plan.



Montrons que  $\mathbf{F}_i$  d'intérieur non-vide. Posons

$$\mathbf{P}_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^f d\mathbf{E}_j.$$

Par minimalité de  $f$  il existe  $P_i \in \mathbf{P}_i - \mathbf{P}$  et donc

$$\langle P_i, \vec{w}_i \rangle - h_i > 0.$$

Soit  $P_0$  contenu dans l'intérieur de  $\mathbf{P}$  alors pour tout  $j = 1, \dots, f$  on a

$$\langle P_0, \vec{w}_j \rangle - h_j > 0.$$

Considérons le segment  $[P_0, P_i]$ : la fonction

$$P \in [P_0, P_i] \rightarrow \langle P, \vec{w}_i \rangle - h_i$$

est strictement négative en  $P_0$  et strictement positive en  $P_i$ . Elle s'annule donc en un point  $Q_i \in \mathbf{P}_i \cap \mathbf{P} = \mathbf{F}_i$ .

De plus les autres fonctions  $\langle P, \vec{w}_j \rangle - h_j, j \neq i$  sont toutes strictement négatives en  $P_0$  et négatives ou nulles en  $P_i$  donc elles sont strictement négatives en  $Q_i$  (car  $Q_i \neq P_i$ ). Ces fonctions sont donc strictement négatives dans un voisinage de  $Q_i$  et donc  $\mathbf{F}_i$  est d'intérieur non-vide.

Ainsi chaque face détermine de manière unique le plan qui la contient ainsi que le demi-espace correspondant (le demi-espace délimité par le plan et contenant le point  $P_0$ ) et pour des  $i$  distincts les demi-plans sont distincts par minimalité de  $f$ . Ainsi les demi-espaces, plan et faces sont uniquement définis (à numération près).  $\square$

On notera

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{F}_i, i = 1, \dots, f\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$$

l'ensemble des faces de  $\mathbf{P}$ .

On montre par le même raisonnement, le résultat suivant concernant la structure des faces

**THÉORÈME 4.6.** *Chaque face  $\mathbf{F}_i \in \mathbf{F}(\mathbf{P})$ , est un polygone convexe compact d'intérieur non-vide contenu dans le plan  $\mathbf{P}_i : l_i(P) = 0$ . L'intérieur est donné par*

$$\mathbf{F}_i^\circ = \{P \in \mathbb{R}^3, l_i(P) = 0, \forall j \neq i, l_j(P) < 0\}.$$

Soit  $I(\mathbf{F}_i) \subset \{1, \dots, f\} - \{i\}$  un ensemble d'indices de taille minimal, tel que  $\mathbf{F}_i$  est définie par les conditions

$$\mathbf{F}_i = \{P \in \mathbf{P}, l_i(P) = 0, \forall j \in I(\mathbf{F}_i) l_j(P) \leq 0, \}$$

alors  $I(\mathbf{F}_i)$  est unique et la frontière de  $\mathbf{F}_i$  est constituée d'une réunion finie de segments d'intérieurs non-vides

$$\partial\mathbf{F}_i = \bigcup_{j \in I(\mathbf{F}_i)} \mathbf{A}_{i,j}$$

données par

$$\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{F}_i \cap \mathbf{P}_j = \{P \in \mathbb{R}^3, l_i(P) = l_j(P) = 0, \forall j' \in I(\mathbf{F}_i) - \{j\} l_{j'}(P) \leq 0\}.$$

Ses segments sont appelés arêtes de  $\mathbf{F}_i$  et l'ensemble de ces arêtes est noté  $A(\mathbf{F}_i)$ . Pour chaque arête, il existe exactement deux  $k, l \in I(\mathbf{F}_i) - \{j\}$  distincts tels que les deux extrémités de  $\mathbf{A}_{i,j}$   $P_k, P_l$ , appelées sommets, sont définies par

$$l_i(P_k) = l_j(P_k) = l_k(P_k) = 0, l_i(P_l) = l_j(P_l) = l_l(P_l) = 0$$

La reunion de ces extremités est l'ensemble des sommets de la face  $\mathbf{F}_i$  et est note  $S(\mathbf{F}_i)$ .

L'ensemble des aretes de  $\mathbf{P}$  (les aretes de toutes les faces) est note

$$A(\mathbf{P}) = \{\mathbf{A}_{i,j}, i = 1, \dots, f, j \in I(\mathbf{F}_i)\} \subset \text{Segments de } \mathbb{R}^3$$

et l'ensemble des sommet de  $\mathbf{P}$  (la reunion des sommets de toutes les faces) est note

$$S(\mathbf{P}) = \{P_{k,l} \text{ sommets de l'arete } \mathbf{A}_{i,j}, i = 1, \dots, f, j \in I(\mathbf{F}_i)\} \subset \text{Points de } \mathbb{R}^3.$$

#### 4.1.2. Caractéristique d'Euler.

DÉFINITION 4.7. Soit  $s(\mathbf{P}), a(\mathbf{P}), f(\mathbf{P})$  le nombre de sommets, d'aretes et de faces de  $\mathbf{P}$ . La caractéristique d'Euler de  $\mathbf{P}$  est la somme alternee

$$\chi(\mathbf{P}) = s(\mathbf{P}) - a(\mathbf{P}) + f(\mathbf{P}).$$

THÉORÈME 4.7 (Euler). On a

$$\chi(\mathbf{P}) = 2.$$

4.1.3. Relations d'incidence. Les faces aretes et sommets ont les proprietés d'incidence suivantes:

PROPOSITION 4.9. Deux aretes distinctes ne s'intersectent que si elle appartiennent a une meme face; leur intersection est un sommet commun. Deux faces distinctes s'intersectent soit en un sommet, soit le long d'une arete commune. Dans ce dernier cas on dit que les faces sont adjacentes.

**Preuve:** Soient deux faces distinctes  $\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j$ ,  $i \neq j$  d'intersection non-vide et  $l_i, l_j$  les fonctions affines definissant les plans contenant ces faces. Soit  $P$  dans l'intersection: on a donc  $l_i(P) = l_j(P) = 0$  et par la caracterisation de l'interieur d'une face (??) on a necessairement que  $P \subset \partial\mathbf{F}_i \cap \partial\mathbf{F}_j$ : on a donc

$$\mathbf{F}_i \cap \mathbf{F}_j = \partial\mathbf{F}_i \cap \partial\mathbf{F}_j.$$

Les plans correspondant s'intersectent en une droite et l'intersection des deux faces est un convexe compact de la droite: c'est soit un point soit un segment.  $\square$

DÉFINITION 4.8. Deux sommets appartenant a une meme arete sont dit adjacents. Deux faces possedant une arete commune a une sont dites adjacentes.

PROPOSITION 4.10. Un polytope est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses sommets.

## 4.2. Dualite.

DÉFINITION 4.9. Soit  $\mathbf{P}$  un polytope. On suppose que  $\mathbf{0} \in \mathbf{P}^\circ$ . Le dual de  $\mathbf{P}$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$  defini par

$$\widehat{\mathbf{P}} = \{Q \in \mathbb{R}^3, \forall P \in \mathbf{P}, \langle P, Q \rangle \leq 1\}.$$

REMARQUE 4.2. On peut toujours supposer que  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ , quitte a effectuer une translation. Dans ce cas, les  $h_i$  sont tous  $\neq 0$ .

THÉORÈME 4.8. Le dual d'un polytope tel que  $\mathbf{0} \in \mathbf{P}^\circ$  est un polytope d'interieur non-vide tel que  $\mathbf{0} \in \widehat{\mathbf{P}}^\circ$  et defini comme l'intersection de  $s(\mathbf{P})$  demi-espaces

$$\widehat{\mathbf{P}} = \{Q \in \mathbb{R}^3, \forall P \in S(\mathbf{P}), \langle P, Q \rangle - 1 \leq 0\}.$$

Les ensembles suivants sont en bijection

- $S(\mathbf{P})$  et  $F(\widehat{\mathbf{P}})$ .
- $F(\mathbf{P})$  et  $S(\widehat{\mathbf{P}})$ .
- $A(\mathbf{P})$  et  $A(\widehat{\mathbf{P}})$ .

De plus ces bijections preservent les relations d'incidence.

#### 4.2.1. Groupes d'isometries.

DÉFINITION 4.10. *Le groupe d'isometries (resp. speciales) d'un polytope  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{P}}$  (resp.  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{P}}^+$ ) est l'ensemble des isometries  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  (resp.  $\in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{P}}^+$ ) telles que*

$$\varphi(\mathbf{P}) = \mathbf{P}.$$

PROPOSITION 4.11. *Le groupe des isometrie d'un polytope est un groupe fini. En particulier tout element de ce groupe admet un point fixe et n'est ni un vissage ni une symetrie glissee.*

En effet une telle isometrie induit une permutation de l'ensemble des sommets et le morphisme

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathfrak{S}(S(\mathbf{P}))$$

est injectif.

PROPOSITION 4.12. *La dualite preserve le groupe d'isometries: on a*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{P}} = \text{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\widehat{\mathbf{P}}}.$$

### 4.3. Polytopes reguliers/ Solides platoniciens.

DÉFINITION 4.11. *soit  $\mathbf{P}$  un polytope; un drapeau de  $\mathbf{P}$  est la donnee d'un triplet*

$$D = (\mathbf{S}, \mathbf{A}, \mathbf{F}) \in S(\mathbf{P}) \times A(\mathbf{P}) \times F(\mathbf{P})$$

tel que

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{P}.$$

On note  $D(\mathbf{P})$  l'ensemble des drapeaux de  $\mathbf{P}$

DÉFINITION 4.12. *Un polytope est regulier si son groupe d'isometries agit transitivement sur l'espace des drapeaux  $D(\mathbf{P})$ . Un polytope regulier est appelle solide platonicien.*

En particulier les faces, aretes et sommets d'un polytope regulier ont –entre autre– les proprietes suivantes:

- Les aretes sont toutes de meme longueur.
- Les faces sont toutes isometriques et forment un polygone regulier plein.
- Les angles (diedres) entre deux faces sont tous egaux.
- Chaque sommet est l'extremite d'un meme nombre d'aretes.

THÉORÈME 4.9. *A isometrie et homothetie pres, les seuls polytopes reguliers sont le tetraedre (regulier), l'hexaedre (regulier) encore appelle "cube", l'octaedre regulier et l'icosaedre (regulier)*

Dans la suite, on va donner leur caracteristiques principales ainsi que leur groupe d'isometries speciales.

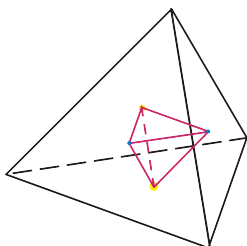


FIGURE 9. Tetraedre regulier en dualite avec lui-meme

#### 4.4. Le tetraedre regulier.

- (1) Il possede 4 faces (triangulaires), 6 aretes, 4 sommets.
- (2) Son groupe de rotations est d'ordre 12, est isomorphe au groupe alterne  $\mathfrak{A}_4$  et est constitue de
  - L'identite.
  - $2 \times 4$  rotations d'ordre 3 d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposee.
  - $1 \times 3$  rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieu d'une paire d'aretes opposees.
- (3) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe symetrique  $\mathfrak{S}_4$ .
- (4) Le polytope dual du tetraedre regulier est un tetraedre regulier.
- (5) Les points de coordonnees

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$$

forment les sommet d'un tetraedre regulier centre a l'origine et inscrit dans la sphere unite (en fait le tetraedre est inscrit dans un cube –cf. ci-dessous–).

#### 4.5. L'hexaedre regulier (ou cube).

- (1) Il possede 6 faces (carres), 12 aretes, 8 sommets.
- (2) Son groupe de rotations est d'ordre 24, est isomorphe au groupe symetrique  $\mathfrak{S}_4$  et est constitue de
  - L'identite.
  - $2 \times 4$  rotations d'ordre 3 d'axe passant par les 4 paires de sommets opposes.
  - $2 \times 3$  rotations d'ordre 4 d'axe passant par les centres des 3 paires de faces opposees.
  - $1 \times 3$  rotations d'ordre 2 d'axe passant par les centres des 3 paires de faces opposees.
  - $1 \times 6$  rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux des 6 paires d'aretes opposees.
- (3) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe produit  $\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$ .
- (4) Le polytope dual de l'hexaedre regulier est un octaedre regulier.

- (5) Les points de coordonnees

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

forment les sommet d'un cube centre a l'origine et inscrit dans la sphere unite (et contenant le tetraedre precedent).

#### 4.6. L' octaedre regulier.

- (1) Il possede 8 faces (triangulaires), 12 aretes, 6 sommets. Les barycentres des six faces est l'ensemble des sommets d'un cube inscrit.
- (2) Son groupe de rotations est d'ordre 24, est isomorphe au groupe symetrique  $\mathfrak{S}_4$  et est constitue des memes rotations que le cube inscrit
  - L'identite.
  - $2 \times 4$  rotations d'ordre 3 d'axe passant par les centres des 4 paires de faces opposees.
  - $2 \times 3$  rotations d'ordre 4 d'axe passant par les 3 paires de sommets opposes.
  - $1 \times 3$  rotations d'ordre 2 d'axe passant par les 3 paires de sommets opposes.
  - $1 \times 6$  rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux des 6 paires d'aretes opposees.
- (3) Le polytope dual de l'octaedre regulier est un hexaedre regulier.
- (4) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe produit  $\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$ .
- (5) Les points de coordonnees

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$$

sont les sommets d'un octaedre regulier centre a l'origine et inscrit dans la sphere unite.

#### 4.7. Le dodecaedre regulier.

- (1) Il possede 12 faces (pentagonales), 30 aretes, 20 sommets. L'ensemble des centres des 12 faces est l'ensemble des sommets d'un icosaedre regulier inscrit dans le dodecaedre.
- (2) Son groupe de rotations est d'ordre 60, est isomorphe au groupe alterne  $\mathfrak{A}_5$  et est constitue de
  - L'identite.
  - $4 \times 6$  rotations d'ordre 5 d'axe passant par les centres des 6 paires de faces opposees.
  - $2 \times 10$  rotations d'ordre 3 d'axe passant par les 10 paires de sommets opposes.
  - $1 \times 15$  rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux des 15 paires d'aretes opposees.
- (3) Le polytope dual du dodecaedre regulier est un icosaedre regulier.
- (4) Son groupe d'isometries complet (speciales et non-speciales) est isomorphe au groupe produit  $\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$ .
- (5) Soit

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

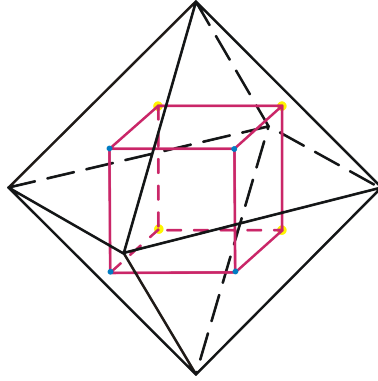


FIGURE 10. Cube et Octaèdre en dualité (source wikicommons)

les points de coordonnées

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1),$$

$$(0, \pm(1 + \varphi^{-1}), \pm(1 - \varphi^{-2})), (0, \pm(1 + \varphi^{-1}), \pm(1 - \varphi^{-2})), (0, \pm(1 + \varphi^{-1}), \pm(1 - \varphi^{-2}))$$

est l'ensemble des sommets d'un dodécaèdre régulier centre à l'origine et inscrit dans la sphère unité.

#### 4.8. L'icosaèdre régulier.

- (1) Il possède 20 faces (triangulaires), 30 arêtes, 12 sommets. L'ensemble des centres des 20 faces est l'ensemble des sommets d'un dodécaèdre régulier inscrit dans l'icosaèdre.
- (2) Son groupe de rotations est d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterne  $\mathfrak{A}_5$  et est constitué des mêmes rotations que pour le dodécaèdre:
  - L'identité.
  - $4 \times 6$  rotations d'ordre 5 d'axe passant par les 6 paires de sommets opposées.
  - $2 \times 10$  rotations d'ordre 3 d'axe passant par les centres des 10 paires de faces opposées.
  - $1 \times 15$  rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux des 15 paires d'arêtes opposées.
- (3) Le polytope dual de l'icosaèdre régulier est un dodécaèdre régulier.
- (4) Son groupe d'isométries complet (spéciales et non-spéciales) est isomorphe au groupe produit  $\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$ .
- (5) Pour  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  les points de coordonnées

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(0, \pm 1, \pm \varphi), \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(\pm 1, \pm \varphi, 0), \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(\pm \varphi, 0, \pm 1)$$

est l'ensemble des sommets d'un icosaèdre régulier centre à l'origine.

La table suivante résume certaines des propriétés rencontrées ci-dessus:  $|S|$  est le nombre de sommets,  $|A|$  est le nombre d'arêtes,  $|F|$  est le nombre de faces,  $\chi$  est la caractéristique d'Euler (définie par  $\chi = |S| - |A| + |F|$ ; le fait qu'elle vaille constamment 2 est vrai pour tout

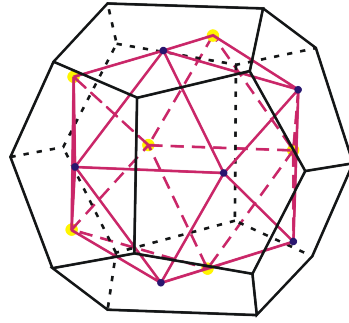


FIGURE 11. Dodecaedre et Icosaedre (en dualite source wikicommons)

polytope convexe et a ete demontre par Euler),  $G^+$  est le groupe des isometries speciales du polytope,  $G$  est le groupe de toutes les isometries.

<b>P</b>	$\widehat{\mathbf{P}}$	$ S $	$ A $	$ F $	$\chi$	$G^+$	$G$
<i>Tetraedre</i>	<i>Tetraedre</i>	4	6	4	2	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{S}_4$
<i>Hexaedre</i>	<i>Octaedre</i>	8	12	6	2	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$
<i>Octaedre</i>	<i>Hexaedre</i>	6	12	8	2	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$
<i>Dodecaedre</i>	<i>Icosaedre</i>	20	30	12	2	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$
<i>Icosaedre</i>	<i>Dodecaedre</i>	12	30	20	2	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$

### 5. Les groupes symetriques et alternes

Dans cette section on demontre le theoreme 4.1.

THÉOREME 4.10. *Soit  $n \geq 2$  le groupe symetrique  $\mathfrak{S}_n$  admet un unique morphisme de groupes non-trivial a valeur dans  $\{\pm 1\}$ : on l'appelle "signature" et on la note*

$$\text{sign} : \begin{array}{l} \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\} \\ \sigma \mapsto \text{sign}(\sigma) \end{array}$$

*Son noyau s'appelle groupe alterne et est note  $\mathfrak{A}_n$ . C'est l'unique sous-groupe d'indice 2 de  $\mathfrak{S}_n$ .*

**Preuve:** Montrons qu'un tel morphisme sign si il existe est unique. Notons que le groupe  $\mathfrak{S}_n$  est engendre par les transpositions  $(ij)$  pour  $i \neq j$  ou  $(ij)$  est la permutation

$$(ij) : i \mapsto j, j \mapsto i, k \mapsto k \text{ si } k \neq i, j.$$

Pour le voir, comme toute permutation est composee de permutations cycliques, il suffit de montrer que toute permutation cyclique est un produit de transpositions: par exemple

$$(123 \cdots (n-1)n) = (12)(13) \cdots (1(n-1))(1n).$$

De plus pour tout  $i \neq j$ , la transposition  $(ij)$  est conjuguee a  $(12)$ : prendre la permutation qui echange 1 et  $i$  et qui echange 2 et  $j$ . Ainsi (comme  $\{\pm 1\}$  est un groupe commutatif) sign prend la meme valeur pour toute transposition

$$\text{sign}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)\text{sign}(\sigma)^{-1} = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma)^{-1}\text{sign}(\tau) = \text{sign}(\tau)$$

et necessairement sign vaut  $-1$  pour toute transposition; ceci determine sign entierement.

Rappelons maintenant la definition de la signature. Pour  $n \geq 1$  considerons l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  muni d'une base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  (par exemple la base canonique) et soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation

$$\sigma : i \in \{1, \dots, n\} \mapsto \sigma(i) \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit  $\varphi_\sigma$ , unique application  $\mathbb{R}$ -lineaire telle que

$$\forall i = 1, \dots, n, \varphi_\sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\sigma(i)}$$

en d'autres termes pour  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i$

$$\varphi_\sigma(x) = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_{\sigma(i)}.$$

Cette application transforme une base en une base, elle est donc inversible et son inverse est  $\varphi_{\sigma^{-1}}$ . De meme

$$\forall i, \varphi_{\sigma\sigma^{-1}}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\sigma\sigma^{-1}(i)} = \varphi_\sigma \circ \varphi_{\sigma^{-1}}(\mathbf{e}_i)$$

et donc

$$\varphi_{\sigma\sigma^{-1}} = \varphi_\sigma \circ \varphi_{\sigma^{-1}}.$$

Ainsi l'application

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n \rightarrow \varphi_\sigma \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$$

est un morphisme de groupe qui est de plus injectif car

$$\varphi_\sigma = \text{Id} \iff \forall i, \varphi_\sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \iff \forall i, \sigma(i) = i \iff \sigma = \text{Id}.$$

Considerons le morphisme de groupes

$$\text{sign} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \mapsto & \mathbb{R}^\times \\ \sigma & \mapsto & \det(\varphi_\sigma) \end{array}$$

On a (par le theoreme de Lagrange)

$$\text{sign}(\sigma^{n!}) = \text{sign}(\sigma)^{n!} = 1$$

ainsi  $\text{sign}(\sigma)$  est une racine de l'unite qui est reelle, la seule possibilite est  $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ . On voit que  $\det(\varphi_{(12)}) = -1$  et donc de meme pour toute transposition de sorte que  $\text{sign}$  est un morphisme non-trivial.

**LEMME 4.2.** *Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe d'indice 2 alors  $H$  est distingue dans  $G$  et  $H$  est le noyau d'un morphisme de groupes nontrivial  $G \mapsto \{\pm 1\}$ .*

**Preuve:** Pour  $g \in G$  considerons les orbites  $gH$  et  $Hg$ : elles sont egales a  $H$  ssi  $g \in H$  et si  $g \notin H$  elles sont disjointes de  $H$ . Comme  $G/H$  et  $H \setminus G$  sont de cardinal 2 ces orbites sont  $H$  et  $G - H$ . On a que  $sH = Hs = H$  ssi  $s \in H$  et sinon  $sH = Hs = G - H$ . On a donc toujours  $sH = Hs$ . Considerons pour  $s \in G$  le sous-groupe conjugue

$$sHs^{-1} = (sH)s^{-1} = (Hs)s^{-1} = H.$$

donc  $H$  est distingue et  $G/H$  est un groupe d'ordre 2 donc isomorphe au groupe multiplicatif  $\{\pm 1\}$ .

On a donc un morphisme de groupe surjectif (donc non-trivial) sur  $G/H$  de noyau  $H$

$$G \mapsto G/H \simeq \{\pm 1\}.$$

□



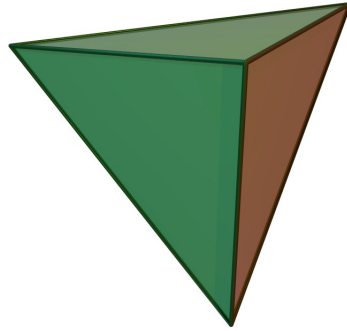


FIGURE 12. Tetraedre regulier

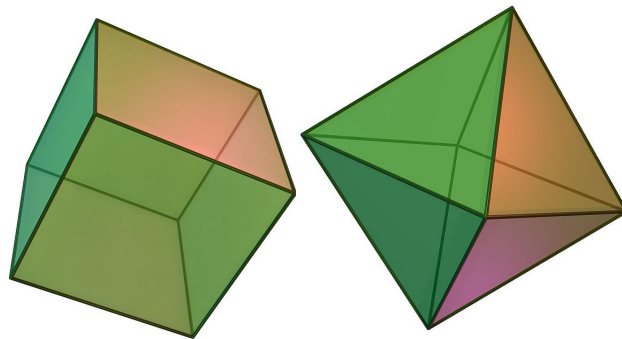


FIGURE 13. Hexaedre regulier (Cube) et Octaedre regulier

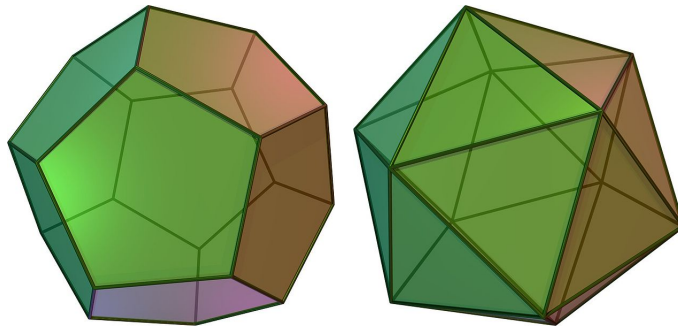


FIGURE 14. Dodecaedre regulier et Icosaedre regulier

Soit maintenant  $H$  un sous-groupe d'indice 2 de  $\mathfrak{S}_n$  alors  $H = \ker \varphi$  avec  $\varphi : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}$  un morphisme de groupe non-trivial. On a vu que necessairement  $\varphi = \text{sign}$  et donc  $H = \mathfrak{A}_n$ .  $\square$

### 6. Appendice: Une definition intrinseque du determinant.

Pour que le raisonnement precedent ne soit pas circulaire il faut que nous donnions une definition du determinant d'une matrice (ou d'un endomorphisme lineaire) qui ne depende

pas de la notion de signature. Cette definition intriseque provient de la definition suivante et du theoreme ci-dessous:

DÉFINITION 4.13. *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $k$  et  $n \geq 1$  un entier. Une forme  $n$ -lineaire alternee est une application:*

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} V^n & \mapsto & k \\ (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) & \mapsto & \Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \end{array}$$

telle que

- (1)  $\Lambda$  est lineaire en chacune des variables: pour tout  $i = 1, \dots, n$ , pour tout  $\vec{x}_i, \vec{x}'_i \in V$ ,  $\lambda \in k$ , et  $\vec{x}_j \in V$ ,  $j \neq i$ , on a

$$\Lambda(\vec{x}_1, \dots, \lambda \vec{x}_i + \vec{x}'_i, \dots, \vec{x}_n) = \lambda \Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) + \Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}'_i, \dots, \vec{x}_n).$$

- (2)  $\Lambda$  est alternee, c'est a dire anti-invariante par permutation des variables: pour tout  $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$  et tout  $\vec{x}_i \in V$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = -\Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n);$$

(en particulier si  $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ , on a

$$\Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = -\Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = 0.)$$

On note

$$\Lambda^n(V) = \{\Lambda : V^n \rightarrow k, n\text{-lineaire alternee}\}$$

cet ensemble.

THÉORÈME 4.11. *L'ensemble  $\Lambda^n(V)$  est un espace vectoriel de dimension egale a*

$$\dim_k \Lambda^n(V) = \begin{cases} C_d^n = \frac{d!}{n!(d-n)!} & \text{si } 1 \leq n \leq d, \\ 0 & \text{si } n > d. \end{cases}$$

En particulier, l'espace  $\Lambda^d(V)$  des formes  $d$ -lineaires alternees ( $d = \dim_k V$ ) est un espace vectoriel de dimension 1: en d'autres termes

COROLLAIRE 4.2. *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $d$  et  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$  une base de  $V$  (ordonnee) alors il existe une unique forme lineaire alternee  $\Lambda_{\mathcal{B}}$  telle que*

$$\Lambda_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d) = 1.$$

Pour toute autre forme  $d$ -lineaire alternee  $\Lambda$ , il existe un unique  $\lambda_{\Lambda} \in k$  tel que

$$\Lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d) = \lambda_{\Lambda} \cdot \Lambda_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d).$$

On a la formule

$$\lambda_{\Lambda} = \Lambda(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d).$$

DÉFINITION 4.14. *Pour  $V = k^d$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$  la base canonique cette forme lineaire est appelee la forme lineaire determinant et est notee  $\det$ . Identifiant l'espace produit des  $d$  uplet de vecteurs de dimension  $d$ ,*

$$(k^d)^d = \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d), \vec{x}_i \in k^d\}$$

avec l'espace des matrices carree  $d \times d$ ,  $M_d(k)$  (a une matrice on associe le  $d$ -uplet de ses vecteur colonnes), on defini une application "determinant"

$$\det : \begin{array}{ccc} M_d(k) & \mapsto & k \\ M & \mapsto & \det M \end{array}$$

*qui est d-linéaire alternée en les colonnes de la matrice.*



## CHAPITRE 5

# Rudiments de geometrie differentielle

### 1. Courbes dans l'espace

DÉFINITION 5.1. Une courbe parametree est une application continue injective

$$\varphi : \begin{array}{l} I \mapsto \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \varphi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

ou  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle.

- Les fonctions continues

$$t \in I \mapsto x_1(t), \dots, x_n(t) \in \mathbb{R}$$

sont les fonctions coordonnees de la courbe.

- La variable  $t$  est appelee parametre de la courbe.
- La courbe geometrique associee ( appelee egalement trace) a la courbe parametree est l'image

$$C_\varphi = \varphi(I).$$

La fonction  $\varphi$  est un parametrage de la courbe geometrique  $C_\varphi$ .

- Si  $\varphi(I)$  est contenu dans un plan de  $\mathbb{R}^3$  on dira que la courbe est plane.

DÉFINITION 5.2. Un courbe parametree est differentiable en  $t_0 \in I$  si la limite de la famille de vecteurs

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$$

existe. C'est le cas ssi  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sont derivables en  $t_0$ . Dans ce cas

- la limite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))$$

est appele vecteur vitesse au temps  $t_0$  et est note  $\dot{\varphi}(t_0)$ .

- La vitesse au temps  $t_0$  est la longueur euclidienne du vecteur vitesse:

$$v_\varphi(t_0) = \|\dot{\varphi}(t_0)\|.$$

- On dit que la courbe est reguliere en  $t_0$  si la vitesse  $\|\dot{\varphi}(t_0)\| \neq 0$ .
- Dans ce dernier cas, la tangente a la courbe au temps  $t_0$  est la droite affine de  $\mathbb{R}^3$  passant par  $\varphi(t_0)$  de direction  $\dot{\varphi}(t_0)$ : c'est la droite donnee sous forme parametrique par

$$t \mapsto \varphi(t_0) + t\dot{\varphi}(t_0).$$

- Le vecteur tangent au temps  $t_0$  est le vecteur vitesse normalise pour etre unitaire

$$T_\varphi(t_0) = \frac{\dot{\varphi}(t_0)}{\|\dot{\varphi}(t_0)\|}.$$

- Si la courbe est deux fois différentiable au voisinage du temps  $t_0$  le vecteur accélération est défini par

$$\ddot{\varphi}(t_0) = (x_1''(t_0), \dots, x_n''(t_0)).$$

La courbe est différentiable si elle est différentiable en tout temps. Si les fonctions  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^\infty$  on dira que la courbe est  $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^\infty$  (on dira également "lisse" si elle est  $\mathcal{C}^\infty$ .)

La courbe est régulière si elle l'est en tout temps.

EXEMPLE 1.1. Quelques exemples des courbes:

- La cubique  $t \mapsto (at, bt^2, ct^3)$ ,  $abc \neq 0$ :

$$\dot{\varphi}(t) = (a, 2bt, 3ct^2), \quad \ddot{\varphi}(t) = (0, 2b, 6ct),$$

$$v(t) = (a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4)^{1/2}, \quad T(t) = \frac{1}{v(t)}\dot{\varphi}(t).$$

- Le cercle: soit  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  des vecteurs unitaires orthogonaux et  $P = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  le plan vectoriel qu'ils engendrent,  $P \in \mathbb{R}^3$ ,  $r > 0$ ,  $\omega \neq 0$ , le cercle de rayon  $r$ , centre en  $P$  dans le plan affine  $P + P$  parcouru à vitesse angulaire  $\omega$  est donné par

$$t \in [0, 2\pi/\omega[ \mapsto P + r \cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + r \sin(\omega t)\mathbf{e}_2.$$

On a

$$\dot{\varphi}(t) = -r\omega \sin(\omega t)\mathbf{e}_1 + r\omega \cos(\omega t)\mathbf{e}_2,$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -r\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{e}_1 - r\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{e}_2 = -\omega^2(\varphi(t) - P).$$

On a

$$v(t) = r|\omega|$$

et on remarque que  $\dot{\varphi}(t) \perp \ddot{\varphi}(t)$ .

- L'hélice circulaire: soit  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  des vecteurs unitaires orthogonaux, une hélice circulaire d'axe  $P + \mathbb{R}\mathbf{e}_3$  de rayon  $r$  et de vitesse angulaire  $\omega$  est donnée par

$$t \in \mathbb{R} \mapsto P + r \cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + r \sin(\omega t)\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3.$$

On a

$$\dot{\varphi}(t) = -r\omega \sin(\omega t)\mathbf{e}_1 + r\omega \cos(\omega t)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -r\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{e}_1 - r\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{e}_2.$$

On a

$$v(t) = (r^2\omega^2 + c^2)^{1/2}$$

et on remarque que  $\dot{\varphi}(t) \perp \ddot{\varphi}(t)$ .

- Soit  $f : t \in I \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable. Son graphe est la courbe paramétrée

$$\Gamma_f : t \in I \mapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

On a

$$\dot{\varphi}(t) = (1, f'(t)), \quad \ddot{\varphi}(t) = (0, f''(t)), \quad v(t) = (1 + f'(t)^2)^{1/2}$$

**1.1. Changement de parametre.** Il existe un ensemble non-dénombrable de courbes paramétrées ayant la même trace. En particulier, celles obtenues par changement de parametre:

DÉFINITION 5.3. Soit  $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ . Un changement de parametre est une fonction  $\mathcal{C}^k$

$$t : u \in J \mapsto t(u) \in I$$

telle que  $t(u)$  est de dérivée strictement positive et  $t(J) = I$  (et donc  $t$  est une bijection de  $J$  sur  $I$  et sa réciproque est  $\mathcal{C}^k$ ).

Un changement de parametre définit alors une courbe paramétrée de parametre  $u$ :

$$\psi = \varphi \circ t : u \in J \mapsto \varphi(t(u)) \in \mathbb{R}^n$$

et de même courbe géométrique

$$\varphi(I) = \psi(J).$$

Par ailleurs les deux courbes ont le même type de régularité.

On a alors

$$\dot{\psi}(u) = t'(u)\varphi'(t(u)) = t'(u)\dot{\varphi}(t(u))$$

et pour la vitesse

$$v_\psi(u) = t'(u)v_\varphi(t(u)).$$

Ainsi la courbe  $\psi$  est régulière ssi  $\varphi$  l'est.

**1.2. Longueur d'une courbe, abscisse curviligne.** On veut définir la longueur d'une courbe géométrique. Si la courbe est un segment droite rectiligne  $[PQ]$  sa longueur est

$$l([P, Q]) = \|\vec{PQ}\| = ((x_{Q,1} - x_{P,1})^2 + \cdots + (x_{Q,n} - x_{P,n})^2).$$

Ce segment peut être parcouru à vitesse constante en un temps  $t_0$  par la courbe paramétrée

$$t \in [0, t_0] : \varphi(t) = (1 - t/t_0)P + (t/t_0)Q.$$

On a

$$\dot{\varphi}(t) = (1/t_0)(Q - P) = \vec{PQ}/t_0 = v$$

et on trouve que

$$l([P, Q]) = v \cdot t_0 = \int_0^{t_0} v dt.$$

DÉFINITION 5.4. Soit  $\varphi$  une courbe paramétrée  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle borné  $I$ , la longueur de la courbe  $C_\varphi = \varphi(I)$  est définie comme

$$l_\varphi := \int_{t \in I} v_\varphi(t) dt.$$

REMARQUE 1.1. La motivation derrière cette définition est que toute courbe paramétrée  $\mathcal{C}^1$  peut être approchée par une suite de courbes polygonales formées d'une succession de segment rectilignes parcourus à vitesse constante: supposons que les extrémités de  $I$  soient 0 et 1. Pour  $n \geq 1$  et  $0 \leq i \leq n$  on pose

$$P_{n,i} = \varphi(i/n)$$

et pour  $i \leq n - 1$

$$\varphi_{n,i} : t \in [i/n, (i+1)/n] \mapsto \varphi_{n,i}(t) := (1 - t)P_{n,i} + tP_{n,i+1}.$$

Alors

$$v_{\varphi_{n,i}}(t) = P_{n,i} \vec{P}_{n,i+1}$$

et pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $n$  est grand, on a pour tout  $i$  et tout  $t \in [i + n, i/n + 1/n]$

$$P_{n,i} \vec{P}_{n,i+1} = \dot{\varphi}(i/n) + \frac{1}{n} \varepsilon_{i,n} \vec{\varepsilon}(t),$$

avec

$$\|\varepsilon_{i,n} \vec{\varepsilon}(t)\| \leq \varepsilon.$$

La longueur de cette ligne est approximée par la somme de Riemann

$$\sum_{i=0}^n \|P_{n,i} \vec{P}_{n,i+1}\| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|\dot{\varphi}(i/n)\| + O(\varepsilon)$$

qui converge vers l'intégrale  $l_{\varphi}$ .

**PROPOSITION 5.1.** *La longueur est invariante par changement de paramètre: si  $t : u \in J \mapsto t(u) \in I$  est un changement de paramètre et  $\psi = \varphi \circ t$*

$$I_{\varphi} = I_{\psi}.$$

**Preuve:** On a

$$I_{\varphi} = \int_{t \in I} v_{\varphi}(t) dt.$$

On fait le changement de variable avec  $u \in J$   $t = t(u)$ . On a  $dt = t'(u) du$  et

$$v_{\varphi}(t) dt = t'(u) v_{\psi}(t(u)) du = v_{\psi}(u) du$$

et par changement de variable

$$\int_{t \in I} v_{\varphi}(t) dt = \int_{u \in J} v_{\psi}(u) du = I_{\psi}.$$

□

La longueur ne dépend donc que de la courbe géométrique: on dit alors que la longueur est une quantité géométrique.

**DÉFINITION 5.5.** *Soit  $\varphi$  une courbe paramétrée et  $t_0 \in I$ , l'abscisse curviligne de la courbe par rapport à  $t_0$  est la fonction*

$$l_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t v_{\varphi}(t) dt = \begin{cases} \ell(\varphi([t_0, t])) & t \geq t_0 \\ -\ell(\varphi([t, t_0])) & t \leq t_0 \end{cases}.$$

L'abscisse curviligne permet de repérer un point sur une courbe par sa longueur au point  $P_0 := \varphi(t_0)$ :

**PROPOSITION 5.2.** *La fonction  $t \mapsto l_{t_0}(t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  établissant une bijection de  $I$  sur son image et la fonction réciproque  $l_{t_0}^{(-1)}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  défini un changement de paramètre.*

**Preuve:** L'abscisse curviligne est une primitive de la vitesse qui est  $\mathcal{C}^{k-1}$  elle est donc  $\mathcal{C}^k$  et

$$l'_{t_0}(t) = v_{\varphi}(t) > 0$$

donc la fonction  $t \mapsto l_{t_0}(t)$  est bijective sur son image et sa réciproque est dans la même classe. □



La fonction reciproque  $\ell_{t_0}^{(-1)}$  defini donc un changement de parametre de la courbe et par l'invariance de la longueur par changement de parametre, depend du point  $P_0 = \varphi(t_0)$  mais pas du parametrage initial  $\varphi$ : si  $\psi$  est un autre parametrage et  $\psi(u_0) = \varphi(t_0) = P_0$  on a pour tout  $\ell$

$$\ell_{t_0}^{(-1)}(\ell) = \ell_{u_0}^{(-1)}(\ell).$$

DÉFINITION 5.6. *La parametrage*

$$\ell \mapsto \varphi(\ell_{t_0}^{(-1)}(\ell))$$

est appellee parametrisation naturelle de la courbe a partir du point  $P_0$ .

Calculons le vecteur vitesse pour cette parametrisation: posant  $t = \ell_{t_0}^{(-1)}(\ell)$  on a

$$\varphi(\ell_{t_0}^{(-1)})'(\ell) = (\ell_{t_0}^{(-1)})'(\ell)\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{v_\varphi(\ell_{t_0}^{(-1)}(\ell))}\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{v_\varphi(t)}\dot{\varphi}(t) = T_\varphi(t)$$

est le vecteur tangent en  $t$ .

Ainsi la vitesse a laquelle la courbe geometrique est parcourue sous la parametrisation naturelle est contante egale a 1 et le vecteur tangent au point  $P = \varphi(t)$  ne depend pas de la parametrisation choisie.

## 2. Champs de vecteurs le long d'une courbe

DÉFINITION 5.7. *Soit  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Un champ de vecteurs le long d'une courbe geometrique  $C_\varphi$  est la donnee d'une fonction de*

$$\vec{w} : \begin{array}{l} C_\varphi \mapsto W \\ p \mapsto \vec{w}(p) \end{array}$$

Comme  $\varphi : I \mapsto C_\varphi$  est bijective cela est equivalent a se donner une fonction

$$\vec{w}_\varphi : t \in I \mapsto \vec{w}(\varphi(t)) \in W.$$

Le champ est dit de classe  $\mathcal{C}^k$   $k = 0, \dots, \infty$  si pour une base de  $W$ , les coordonnees de  $\vec{w}_\varphi$  dans cette base sont de classe  $\mathcal{C}^k$ .

REMARQUE 2.1. Si un champs est de classe  $\mathcal{C}^k$  dans une base donnee et pour un parametre donne, il l'est dans toute base et pour tout autre parametre: les fonctions coordonnees dans la nouvelle base sont des combinaisons lineaires des coordonnees dans l'ancienne et ont donc la meme regularite.

EXEMPLE 2.1. Une courbe est un champs de vecteurs a valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Les vecteurs vitesses, vecteurs tangents et accelarations sont des champs de vecteurs. Un champs de vecteurs a valeurs dans  $\mathbb{R}$  est une fonction numerique.

A partir d'un ou de plusieurs champs de vecteurs a valeurs dans divers espaces vectoriels et d'applications entre espaces vectoriels, il est possible de fabriquer de nouveaux champs a partir d'anciens.

Par exemple:

- Combinaisons lineaires: soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  des champs a valeurs dans  $W$  et  $f, g : C_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions alors

$$f.\vec{w}_1 + g.\vec{w}_2 : p \mapsto f(p)\vec{w}_1(p) + g(p)\vec{w}_2(p)$$

est un champs de vecteurs a valeurs dans  $W$ .

- Derivation: le champ derive (si le champ est derivable sur  $I$ )

$$\dot{\vec{w}}_\varphi : t \mapsto \vec{w}'_\varphi(t).$$

- Produit scalaire: Si  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont deux champs d'un espace euclidien  $W$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on peut former le produit scalaire

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle_\varphi : t \mapsto \langle \vec{w}_1(\varphi(t)), \vec{w}_2(t) \rangle \in \mathbb{R}.$$

- $\times$ -produit: Soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 : C \mapsto \mathbb{R}^3$ , le cross product est defini par

$$\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 : p \mapsto \vec{w}_1(p) \times \vec{w}_2(p).$$

En particulier on a

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 \rangle : p \mapsto \langle \vec{w}_1(p), \vec{w}_1(p) \times \vec{w}_2(p) \rangle = 0.$$

- Determinant: Soit  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$   $n$ -champs a valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  alors le determinant est le champ

$$\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) : p \mapsto \det(\vec{w}_1(p), \dots, \vec{w}_n(p)) \in \mathbb{R}.$$

On le note egalement  $\vec{w}_1 \wedge \dots \wedge \vec{w}_n$ .

- Soit  $\vec{w}$  un champ a valeur dans  $\mathbb{R}^n$  partout non-nul ( $\forall p, \vec{w}(p) \neq 0$ ) alors l'aplication

$$\text{sym}_{\vec{w}} : p \mapsto \text{sym}_{\vec{w}(p)} \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$$

qui au vecteur  $\vec{w}(p)$  associe la symetrie orthogonale par rapport au plan  $\vec{w}(p)^\perp$  est un champs a valeurs dans  $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ .

**PROPOSITION 5.3** (Regle de Leibniz). *Soit  $(\dots, \dots) : W \times W \mapsto Z$  une application bilineaire entre  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  des champs de vecteurs derivables a valeurs dans  $W$ . On a*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}_{1,\varphi}, \vec{w}_{2,\varphi}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{w}_{1,\varphi}, \vec{w}_{2,\varphi} \right) + \left( \vec{w}_{1,\varphi}, \frac{\partial}{\partial t} \vec{w}_{1,\varphi}, \vec{w}_{2,\varphi} \right).$$

**Preuve:** Pour simplifie les notations on oublie  $\varphi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\vec{w}_1(t_0 + h), \vec{w}_2(t_0 + h)) - (\vec{w}_1(t_0), \vec{w}_2(t_0))).$$

On a

$$\vec{w}_i(t_0 + h) = \vec{w}_i(t_0) + h\vec{w}'_i(t_0) + o(h), \quad i = 1, 2$$

et par bilinearite

$$(\vec{w}_1(t_0 + h), \vec{w}_2(t_0 + h)) - (\vec{w}_1(t_0), \vec{w}_2(t_0)) = h(\vec{w}'_1(t_0), \vec{w}_2(t_0)) + h(\vec{w}_1(t_0), \vec{w}'_2(t_0)) + o(h)$$

et donc

$$\frac{1}{h} ((\vec{w}_1(t_0 + h), \vec{w}_2(t_0 + h)) - (\vec{w}_1(t_0), \vec{w}_2(t_0))) = (\vec{w}'_1(t_0), \vec{w}_2(t_0)) + (\vec{w}_1(t_0), \vec{w}'_2(t_0)) + o(1).$$

□

### 2.1. Intégrale d'un champ le long d'une courbe.

DÉFINITION 5.8. *Etant donné  $\vec{w} : C \mapsto W$  un champ le long d'une courbe qu'on suppose suffisamment régulier (par exemple continu) alors l'intégrale curviligne du champ  $\vec{w}$  le long de la courbe est l'intégrale*

$$I_\varphi(\vec{w}) := \int_{t \in I} \vec{w}(\varphi(t)) v_\varphi(t) dt.$$

REMARQUE 2.2. En pratique pour calculer l'intégrale on choisit une base de  $W$  et on exprime  $\vec{w}(\varphi(t))$  dans cette base:

$$\vec{w}(\varphi(t)) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n(t)\mathbf{e}_n$$

et

$$\int_{t \in I} \vec{w}(\varphi(t)) dt = \int_{t \in I} x_1(t) v_\varphi(t) dt \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \int_{t \in I} x_n(t) v_\varphi(t) dt \cdot \mathbf{e}_n.$$

Le résultat ne dépend pas du choix de la base.

REMARQUE 2.3. Quand  $\vec{w} \equiv 1$ , on obtient la longueur.

Etant donné un champ  $\vec{w} : C \mapsto W$ , tout changement de paramètre  $u \mapsto t(u)$  induit une nouvelle paramétrisation de ce champ:

$$\vec{w}_\psi : u \mapsto \vec{w}(t(u)).$$

PROPOSITION 5.4. *L'intégrale curviligne  $I_\varphi(\vec{w})$  est invariante par changement de paramètre:*

$$I_\varphi(\vec{w}) = I_\psi(\vec{w} \circ t).$$

**Preuve:** On a

$$I_\varphi(\vec{w}) = \int_{t \in I} \vec{w}(t) v_\varphi(t) dt.$$

On fait le changement de variable avec  $u \in J$   $t = t(u)$ . On a  $dt = t'(u) du$  et

$$v_\varphi(t) dt = t'(u) v_\varphi(t(u)) du = v_\psi(u) du$$

et par changement de variable

$$\int_{t \in I} \vec{w}(t) v_\varphi(t) dt = \int_{u \in J} \vec{w}(t(u)) v_\psi(u) du = I_\psi(\vec{w})$$

□

On notera cette intégrale

$$\oint_C \vec{w} = \int_C \vec{w}(\ell) d\ell$$

**2.2. Champs sur  $\mathbb{R}^n$ .** De nombreux champs de vecteurs sur une courbe à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  sont en fait obtenus par restriction de champs de vecteurs sur des domaines de  $\mathbb{R}^n$ :

DÉFINITION 5.9. *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble. Un champ de vecteur sur  $\Omega$  à valeurs dans un  $\mathbb{R}$ -EV de dimension finie  $W$  est une application*

$$\vec{w} : \Omega \mapsto W.$$

On dispose d'une notion naturelle de régularité pour de tels champs en considérant les fonctions de plusieurs variables

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \vec{w}(x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n)$$

ou  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  sont tels que  $x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n \in \Omega$ .

Etant donné un champ  $\vec{w} : \Omega \mapsto W$  et une courbe  $C \mapsto \Omega$  contenue dans  $\Omega$ , on obtient un champ sur  $C$  par restriction.

Une classe de champs particulièrement importante en physique sont les champs de gradients:

DÉFINITION 5.10. Soit  $V : (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Le gradient de  $V$  en  $P = (x_1, \dots, x_n)$  est le vecteur

$$\nabla V(P) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(P) \right).$$

La fonction

$$P \mapsto \nabla V(P)$$

est le champ de gradient de  $V$ .