M2.L2 : Série d'exercices sur l'échantillonnage de signaux

Rappel de trigonométrie

Soient *a, b ,u, v* des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

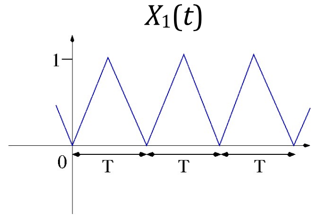
2 sin(u) sin(v) = cos(u - v) – cos(u + v)	cos(*a* + *b*) = cos(*a*)cos(*b*) − sin(*a*)sin(*b*)
2 cos(u) sin(v) = sin(u + v) – sin (u - v)	cos(*a* − *b*) = cos(*a*)cos(*b*) + sin(*a*)sin(*b*)
cos(b) – cos(a) = 2 sin((a + b)/2) sin((a - b)/2)	sin(*a* + *b*) = sin(*a*)cos(*b*) + cos(*a*)sin(*b*)
sin(b) – sin(a) = 2 cos((a + b)/2) sin((b - a)/2)	sin(*a* − *b*) = sin(*a*)cos(*b*) − cos(*a*)sin(*b*)

On rappelle également que cos(−*a*) = cos(*a*) et sin(−*a*) = −sin(*a*).

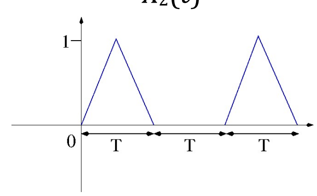
1 Filtre à moyenne mobile (suite)

a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$? Pas besoin ici de formules mathématiques : des dessins suffiront!

$X_1(t)$



$X_2(t)$



$X_3(t)$

$X_4(t)$

b) Soit $X(t) = \sin(2\pi f t)$, une sinusoïde pure de fréquence *f*. Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période T_c, l'amplitude du signal sortant $\hat{X}(t)$ satisfait l'inégalité

$$|\hat{X}(t)| \leq |\mathrm{sinc}(f\,T_c)| \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où on rappelle que $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ par définition.

2 Filtrer avant d'échantillonner

La question 1d) de la semaine dernière a précisé que lorsqu'on joue une note de musique sur instrument (p.ex. la note \La" _a 440 Hz), on joue bien plus qu'une sinusoïde pure! Le son produit est en fait une somme de sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence *fondamentale* f_0 :

$$X(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Les fréquences nf_0 sont les fréquences des *harmoniques* qui composent la note. Les amplitudes a_n des harmoniques dépendent de l'instrument sur lequel est joué la note ; elles déterminent le *timbre* de l'instrument (i.e. l'allure du signal X(t)).

a) Quelle est la bande passante du signal X?
b) Pour enregistrer cette note de musique, on échantillonne le signal X à une certaine fréquence fe. Si toutefois on veut éviter l'effet stroboscopique lors de la reconstruction du signal, il est nécessaire de filtrer le signal avant de l'échantillonner.

Pour chacune des fréquences fondamentales f0 et fréquences d'échantillonnage fe ci-dessous, déterminer quelle(s) fréquence(s) de coupure fc il est possible d'utiliser afin de préserver un nombre maximum d'harmoniques du signal tout en évitant l'effet stroboscopique; déterminer également le nombre d'harmoniques préservées dans chaque cas :

1. f0 = 440 Hz (\La") et fe = 44.1 kHz
2. f0 = 495 Hz (\Si") et fe = 44.1 kHz
3. f0 = 330 Hz (\Mi") et fe = 8’820 Hz

c) Beaucoup de systèmes de téléphonie mobile filtrent les signaux transmis à 3.4 kHz[1] (ce qui permet de transmettre à peu près correctement la voix humaine, tout en réduisant le nombre de données à transmettre, mais certainement pas la musique!): combien de bits au minimum sont nécessaires pour enregistrer correctement une conversation de 5 minutes avec un tel système (avec une représentation des nombres réels en virgule flottante sur 64 bits)?

3 Accordage d’une guitare et phénomène dit de “battement”

Cet exercice illustre une famille spéciale de signaux obtenus en faisant la somme de deux sinusoïdes pures. Pour accorder une guitare, on joue en même temps sur deux cordes voisines deux notes qui sont censées être identiques en théorie. Si la guitare est mal accordée, on entend une vibration caractéristique (un “battement”), qui disparaît lorsque la guitare est bien accordée. Dans cet exercice, on se propose de comprendre ce phénomène du point de vue mathématique. Supposons pour simplifier que les notes qui sortent d’une guitare soient des sinusoïdes pures. L’onde émise par la première corde est donc $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, tandis que celle émise par la deuxième est $X_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$, avec f_1 et f_2 proches l’une de l’autre. Quelle est la forme de l’onde résultante $X_1(t) + X_2(t)$.

a) lorsque f_1 et f_2 sont très proches?
Remplacer f_2 par $f_1+\epsilon$ et transformer la somme des deux sinusoïdes en un produit de deux termes à l’aide des formules de trigonométrie. Quelles sont les fréquences apparaissant dans ces deux termes?

b) lorsque $f_1 = f_2$?
Là aussi, vous pouvez vous aider de www.wolframalpha.com pour visualiser le résultat pour f_1 et f_2 valant respectivement 16 Hz et 17 Hz.

4 Un peu de radio

Cet exercice montre l’application du filtrage à travers un exemple du monde réel. On s’intéresse à la modulation en amplitude (AM). Un signal modulé en amplitude est formé par le produit de deux signaux

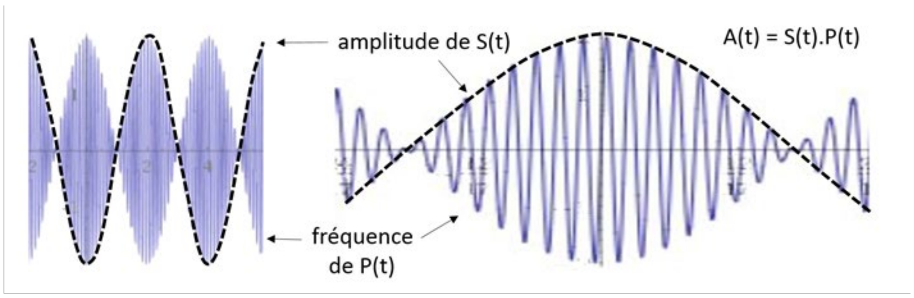
[1] La téléphonie large-bande (avec une bande passante de 7 kHz, ou même de 22 kHz) est progressivement en train de remplacer cet ancien système

distincts : le signal contenant l'information que l'on désire transmettre $S(t)$ (du son en général) et l'onde porteuse $P(t)$. Dans cet exercice, on désire transmettre une sinusoïde à 1 kHz en utilisant une onde radio porteuse à 300 kHz. $S(t) = \sin(2\pi f_s t)$ $P(t) = \sin(2\pi f_p t)$

$f_s =$ 1 kHz $f_p =$ 300 kHz

Le signal émis par l'émetteur radio est finalement donné par $A(t) = S(t)P(t)$.

Voici une illustration conceptuelle de ce à quoi peut ressembler $A(t)$; les fréquences ne sont pas correctes mais leur grande différence produit ce type de signal qui d'ailleurs a été rencontré dans un exercice précédent.



L'onde porteuse est la sinusoïde de haute fréquence tandis que le signal $S(t)$ est rendu visible par l'enveloppe de l'amplitude de la porteuse.

a) Dans un premier temps, un petit rappel de Physique est nécessaire pour justifier l'emploi de l'onde porteuse. En effet pourquoi n'est-il pas possible de simplement transmettre le signal $S(t)$ directement en émettant une onde radio à 1 kHz?

En pratique, la longueur d'une antenne pour un récepteur radio doit au moins être de l'ordre du quart de la longueur d'onde du signal à recevoir. La relation entre la fréquence f et la longueur d'onde λ d'une onde électromagnétique est $c = \lambda f$, où $c = 3\times10^8$ m/s est la vitesse de la lumière. Sachant cela, calculer et comparer la longueur d'antenne nécessaire pour les deux valeurs de fréquences fournies (signal et porteuse).

b) Ensuite, du coté de la réception, on obtient $A(t)$ et on cherche à récupérer le signal $S(t)$. On suppose pour ça qu'on connaît la fréquence f_p, mais pas forcément la fréquence f_s (seulement qu'elle est bien plus petite que f_p).

Que se passe-t-il si on filtre le signal reçu $A(t)$ avec un filtre à moyenne mobile ayant une durée d'intégration égale à 4 fois la période de l'onde porteuse? Faire une ébauche du résultat en appliquant le filtre sur le dessin conceptuel de droite et en déduire ce qui se passerait sur le cas réel. Quelle est la cause principale de cet effet?

c) Il s'agit maintenant de transformer $A(t)$ pour 1) conserver l'enveloppe de l'amplitude de $S(t)$, mais 2) tout en supprimant l'effet d'alternance de signe de l'amplitude causée par $P(t)$. L'idée est la suivante : pour supprimer la variation de signe de l'amplitude causée par $P(t)$, il faut rendre ce terme toujours positif au lieu d'alterner entre positif et négatif. Cela se fait facilement en multipliant $A(t)$ une nouvelle fois par $P(t)$. On a alors : $A^0(t) = S(t)P(t)P(t)$.

Utiliser les formules trigonométriques pour transformer $A^0(t)$ en une somme de sinusoïdes. En déduire comment récupérer $S(t)$ à partir de $A^0(t)$.