Math 125 - Chap 2

16 Mars 2020

THÉORÈME 2.2 (Fedorov pour les groupes de rotations). *Il existe 5 classes d'isomorphismes possibles pour le sous-groupe de isometrie directes $G^+ \subset G$ d'un groupe cristallographique.*

Notations: $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \supset$ cristal.

$T(G) = T(\mathbb{R}^2) \cap G$ distingués ds G

$G^+ = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+ \cap G$

$T(G) = T_\Gamma = \{ t_\gamma \; \gamma \in \Gamma \}$ $\quad \Gamma < \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$\simeq$

THÉORÈME 2.3. *Le groupe $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est un reseau: il existe $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{C}$ non-colineaires tels que*

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1. \simeq \mathbb{Z}^2$$

$\mathbb{R}$

Preuve: On a montré la dernière fois le

PROPOSITION 2.4. *Pour tout disque $D(z,r) = \{z' \in \mathbb{C},\ |z' - z| \leqslant r\}$, l'ensemble $\Gamma \cap D(z,r)$ est fini.*

$\{\gamma \in \Gamma \quad \gamma \in D(z,r)\}$ est fini

Construction de γ_0 et γ_1:

G est cristallographique

$T(G)$ contient 2 translation par des vecteurs $\mathbb{R}$-lin indep.

$\exists\ \gamma, \gamma' \in \Gamma$ $\mathbb{R}$-lin indep.

Soit $R > 0$ tq $D(0, R) \ni \gamma, \gamma'$

$D(0,R) \cap \Gamma \ni \gamma, \gamma'$

Soit $\gamma_0 \in D(0,\underline{\underline{R}}) \cap \Gamma$ $\gamma_0 \neq 0$

- tq $|\gamma_0|$ est minimum pour tout $\Gamma - \{0\}$

- $\gamma_1 \in D(0,R) \cap \Gamma$ tq $\gamma_1 \notin \mathbb{R} . \gamma_0$ et tq $|\gamma_1|$ est minimum pour tout $\Gamma - \mathbb{R}\gamma_0 \cap \Gamma$.

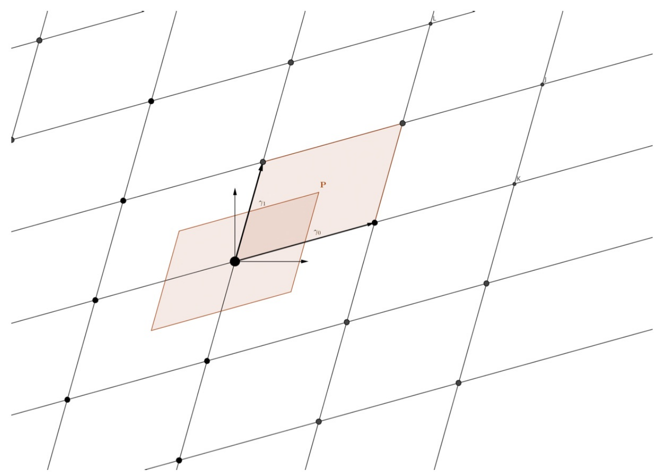
Con va mg

$$\Gamma_{g} = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1 = \Gamma_0$$

Soit

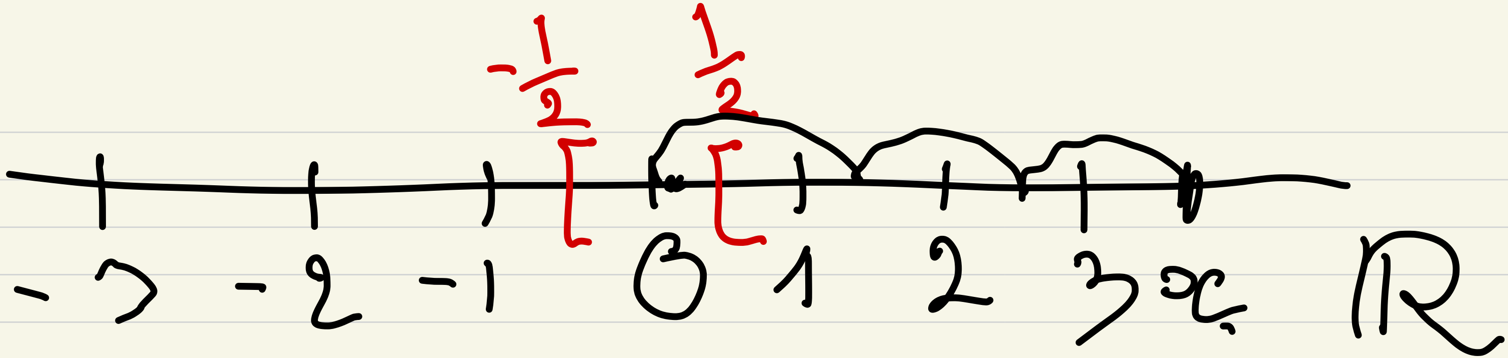
$$\mathbf{P}_0 = \{x\gamma_0 + y\gamma_1,\ x, y \in [-1/2, 1/2[\}.$$

LEMME 2.2. *Le parallelogramme $\mathbf{P}_0$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ_0 sur $\mathbb{C}$ par addition.* (translation)



Pour $z \in \mathbb{C}$ $z + \Gamma_0 = \{z + m\gamma_0 + n\gamma_1 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ intersecte P_0 en un unique point.

- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est un domaine fondamental pour l'action $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ par translation additive



$$x = n_x + v_x \qquad n_x \in \mathbb{Z} \qquad v_x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

$$n_x = \begin{cases} [x] & \text{si } \{x\} = x - [x] < \frac{1}{2} \\ [x] - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq \{x\} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$v_x = x - n_x \ldots\ldots$$

$$z = x\gamma_0 + y\gamma_1$$

$$z = (n_x + v_x)\gamma_0 + (n_y + v_y)\gamma_1$$

$$= n_x\gamma_0 + n_y\gamma_1 + \underbrace{(v_x\gamma_0 + v_y\gamma_1)}_{\in P_0}$$

$$\underline{\underline{\gamma_0(z) \in \Gamma_0}}$$

$$\square$$

Preuve du Thm 2.3 : $\Gamma_0 = \Gamma$

$\gamma \in \Gamma$ $\qquad \gamma = \underbrace{\gamma_0(\gamma)}_{\in \Gamma_0} + \underbrace{\gamma - \gamma_0(\gamma)}_{\in \mathbb{P}_0}$

$\overset{?}{=} 0$

On utilise les propriétés de γ_0 et γ_1.

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| = |u\gamma_0 + v\gamma_1|$$

$$u, v \in]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[$$

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| \leqslant |u||\gamma_0| + |v||\gamma_1| \leqslant \frac{1}{2}(|\gamma_0| + |\gamma_1|)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(|\gamma_1| + |\gamma_1|) = |\gamma_1|$$

$$|\gamma_0| \leqslant |\gamma_1|$$

l'inégalité est stricte

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| < |\gamma_1|$$

$\Longrightarrow$ $\underset{\overset{\parallel}{u\gamma_0 + v\gamma_1}}{\gamma - \gamma_0(\gamma)} \in \mathbb{R}\gamma_0$ par déf de γ'.

$\Longrightarrow$ $\boxed{v = 0}$ $\quad \gamma - \gamma_0(\gamma) = u\gamma_0$

$\Longrightarrow$ $|\gamma - \gamma_0(\gamma)| = \underset{\leq \frac{1}{2}}{|u|}\,|\gamma_0| \leq \frac{1}{2}|\gamma_0|$

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| \leq \frac{1}{2}|\gamma_0| < |\gamma_0|$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\gamma - \gamma_0(\gamma) = 0}} \text{ par def de } \gamma_0$$

Cas d'égalité.

$$|\gamma - \gamma_0(\gamma)| = \left| -\frac{1}{2}\gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_1 \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\gamma_0| + |\gamma_1|\right) = |\gamma_1|$$

$$|u| = |v| = \frac{1}{2} \qquad \boxed{|\gamma_0| = |\gamma_1|}$$

$$u = v = \frac{-1}{2}. \qquad \gamma - \gamma_0(\gamma) = -\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)$$

$$\Rightarrow |\gamma_0+\gamma_1| = |\gamma_0| + |\gamma_1| = 2|\gamma_1|$$

= dans l'inégalité $\triangle$

$\Rightarrow$ γ_0 et γ_1 sont $\mathbb{R}$-linéairement dépendants

exclu le cas = ne se produit pas.

On est dans le cas $<$

$$\Rightarrow \gamma - \gamma_0(\gamma) = 0$$

$\gamma \in \Gamma_0$.

$\square$

Le gpe des Rotations

- $T(G) = T_\Gamma \quad \Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1$

$G^+ = G \cap \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$

$$\begin{array}{l|lcl} & \mathrm{lin} : G^+ & \longrightarrow & \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_0 \\ G_0^+ = \mathrm{lin}(G^+) & \varphi & \longrightarrow & \varphi_0 \end{array}$$

$G_0^+ = \mathrm{lin}(G^+)$ $G_0^+ \subset \mathbb{C}^1$

On va montrer que

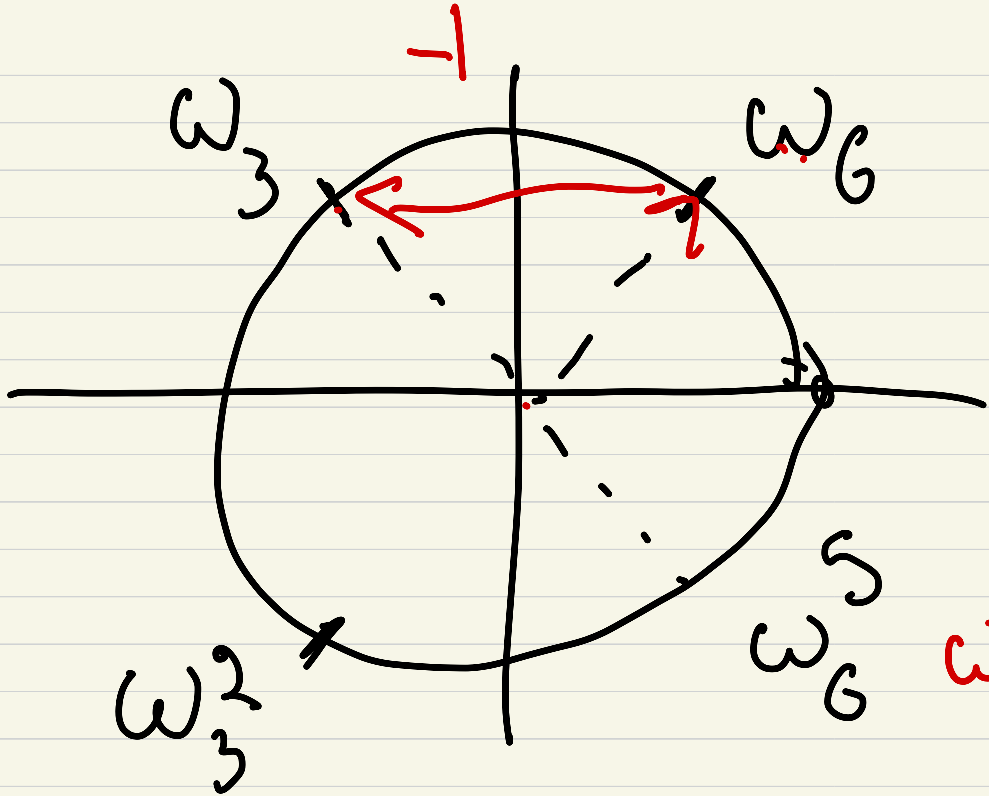
THÉORÈME 2.4. *Le groupe G_0^+ (identifie a un sous-groupe de $\mathbb{C}^1$) est soit*

1. *le groupe trivial $\{1\}$,*
2. *le groupe d'ordre 2, $\mu_2 = \{\pm 1\}$,*
3. *le groupe cyclique d'ordre 3 $\mu_3 = \omega_3^{\mathbb{Z}} = \{1, \omega_3, \omega_3^2\}$, avec $\omega_3 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,*
4. *le groupe cyclique d'ordre 4, $\mu_4 = i^{\mathbb{Z}} = \{\pm 1, \pm i\}$,*
5. *le groupe cyclique d'ordre 6, $\mu_6 = \omega_6^{\mathbb{Z}}$ avec $\omega_6 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

De plus, il existe $\gamma_0 \in \mathbb{C}^\times$ tel que

– *Si $G_0^+ = \mu_3$,*
$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0\omega_3,$$
– *Si $G_0^+ = \mu_4$,*
$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0 i,$$
– *Si $G_0^+ = \mu_6$,*
$$\Gamma = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6) = \gamma_0(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3) = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_0\omega_3.$$

$\mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\omega_6 = \mathbb{Z}1. + \mathbb{Z}\omega_3$



$\omega_6 = \omega_3 + 1$

$\omega_3 = \omega_6 - 1$

Preuve: On commence par le lemme

LEMME 2.3. *Soit $r \in G^+$ une rotation d'angle α alors*

$$\alpha\Gamma = \Gamma.$$

$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1$

Preuve du Lemme: $|\alpha| = 1$

$$\{\alpha.\gamma \;\; \gamma \in \Gamma\} = \Gamma$$

Si $G^+ = T_\Gamma$ $\alpha = 1$ et le lemme est evident.

Supposons $G^+ \neq T_\Gamma$

$G_0^+ \neq \{1\}$ soit $r = r_{\alpha,v} \in G^+$

t_γ $\gamma \in \Gamma$ $\mathrm{Ad}(r_{\alpha,v})(t_\gamma) = r \circ t_\gamma \circ r^{-1}$

$T_\Gamma \curvearrowleft$ $= t_{\alpha.\gamma} \in T_\Gamma$

$\alpha\gamma \in \Gamma$. On a utilise le fait que $T_\Gamma \triangleleft G^+$

$\Rightarrow \quad \alpha\Gamma \subset \Gamma$

Inclusion inverse : si $r_{\alpha,v} \in G^+$

$\Rightarrow \quad r_{\alpha,v}^{-1} = r_{\alpha^{-1},v'} \in G^+$

en faisant le même raisonnement

$$\alpha^{-1}\Gamma \subset \Gamma \underset{\times\alpha^{-1}}{\Rightarrow} \Gamma \subset \alpha\Gamma$$

$\square$

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1$$
$$= \gamma_0(\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\gamma_1')$$

$\gamma_1' = \gamma_1/\gamma_0$. γ_0 & γ_1 sont $\mathbb{R}$-lin indep

$\iff 1, \gamma_1'$ sont $\mathbb{R}$-lin indep

$\iff \gamma_1' \notin \mathbb{R}$.

Γ' est obtenu à partir de Γ

par × par $1/\gamma_0 = \underbrace{\frac{1}{|\gamma_0|}}_{\in \mathbb{R}_{>0}} \cdot \underbrace{\frac{|\gamma_0|}{\gamma_0}}_{\in \mathbb{C}^1}$

Γ' est obtenu à partir de Γ en composant l'homothétie de rapport $1/|\gamma_0|$ et la rotation d'angle $|\gamma_0|/\gamma_0$

$\Gamma' = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}\gamma_1'$

par définition de γ_0 et γ_1

- $1 \in \Gamma'$ est un elt de $\Gamma' - \{0\}$ de module minimal
- $\gamma_1' \in \Gamma'$ est un elt de $\Gamma' - \mathbb{R}.1 \cap \Gamma'$ de module minimal.

- $\alpha \Gamma = \Gamma \quad \alpha \gamma_0 \Gamma' = \gamma_0 \Gamma'$

$$\gamma_0 \alpha \Gamma' = \gamma_0 \Gamma'$$

$$\iff \alpha \Gamma' = \Gamma' \quad \forall \alpha \in G_0^+$$

- $1 \in \Gamma' \quad \alpha . 1 \in \Gamma' \implies \alpha \in \Gamma'$

$$G_0^+ \subset \Gamma'$$

$\alpha \in \Gamma' \quad \alpha^{-1} = \bar{\alpha} \in \Gamma' \quad |\alpha| = 1$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \alpha^{-1} = \alpha + \bar{\alpha} = 2\operatorname{Re}\alpha \in \Gamma'$$

$$2\operatorname{Re}\alpha \subset \Gamma' \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}.1 = \mathbb{Z}$$

<u>Aparté</u>: $\Gamma' \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ si $x \in \Gamma' \cap \mathbb{R}$

$$\{x\} = \underset{\Gamma'}{\underset{\cap}{x}} - \underset{\Gamma'}{\underset{\cap}{[x]}} \in \Gamma'$$

$\{x\} \in [0,1[\Rightarrow \{x\} = 0$

$x = [x] \in \mathbb{Z}$

$$2\operatorname{Re}\alpha \in \mathbb{Z} \qquad |\alpha| = 1$$

$$2\operatorname{Re}\alpha \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2] = \{0, \pm 1, \pm 2\}$$

- $2\operatorname{Re}\alpha = \pm 2 \qquad \operatorname{Re}\alpha = \pm 1$

$$\alpha = \pm 1$$

- $2\operatorname{Re}\alpha = \pm 1 \qquad \operatorname{Re}\alpha = \pm \frac{1}{2}$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha \in \omega_6^{\mathbb{Z}}$$

$\mathrm{Re}\,\alpha = 0 \qquad \alpha = \pm i$

$\Rightarrow \quad G_0^+ \subset \{\pm 1, \omega_6^{\mathbb{Z}}, i^{\mathbb{Z}}, \omega_3^{\mathbb{Z}}\}$

qui est fini.

G_0^+ est un gpe fini donc cyclique dont les generateurs sont d'ordre

$G_0^+ = \alpha^{\mathbb{Z}}$ α d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6

$\alpha = 1$ $\alpha = \omega_3$ ou ω_3^2

$\alpha = -1$ $\alpha = i$ ou -1

$\alpha = \omega_6$ ou ω_6^{-1}

$$G_0^+ = \{1\}, \mu_2, \mu_3 = \omega_3^{\mathbb{Z}}, \mu_4 = i^{\mathbb{Z}}$$

$$\mu_6 = \omega_6^{\mathbb{Z}}$$

- Si $G_0^+ = \{1\}$ ou $\{\pm 1\}$ on n'a rien de plus a dire.

Si $G_0^+ = \omega_3^{\mathbb{Z}}, i^{\mathbb{Z}}, \omega_6^{\mathbb{Z}}$

On remarque ω_3, i, ω_6 sont de module 1 et non colinéaire à 1.

$$1. \Rightarrow \Gamma' = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}\gamma_1'$$

$$|\gamma_0'| = \underset{\lambda}{\underset{\shortparallel}{|1|}} \leq |\gamma_1'| \leq |\omega_3|, |i|, |\omega_6| = 1$$

$$\gamma_1' \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow$ on a alors

$$\Gamma' = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}f_1' \supset \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\omega_3$$

$$\mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}.i$$

$$\Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3 \quad \text{ou bien}$$

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}.i$$

$$\left(\text{Rmq} \quad \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_6 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_3\right)$$

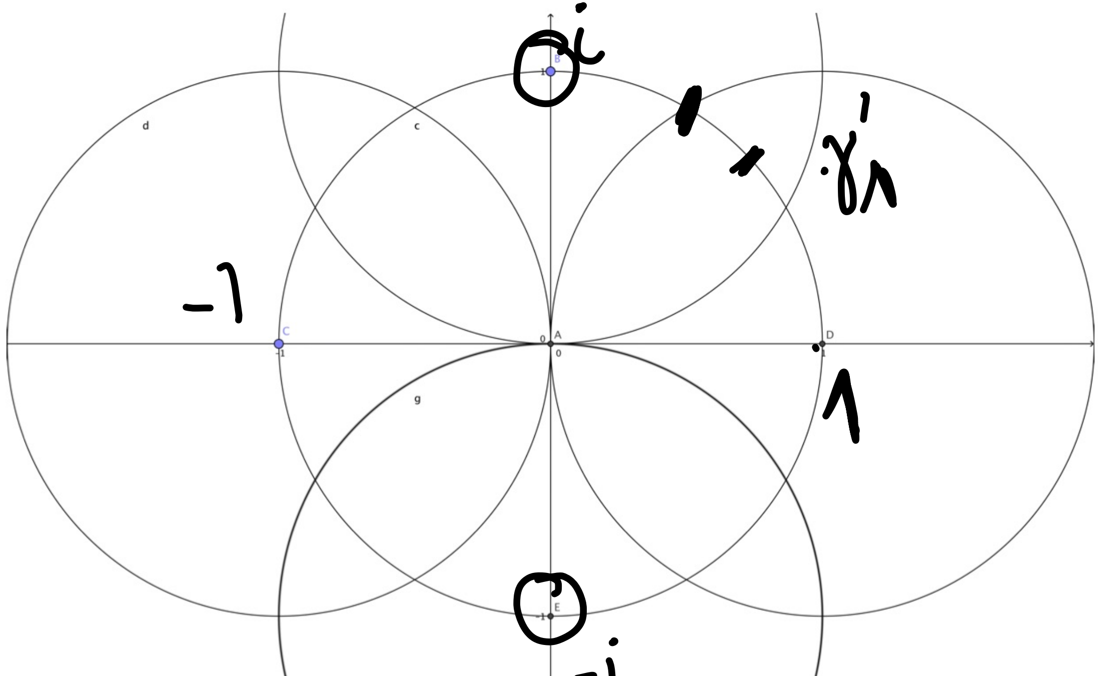
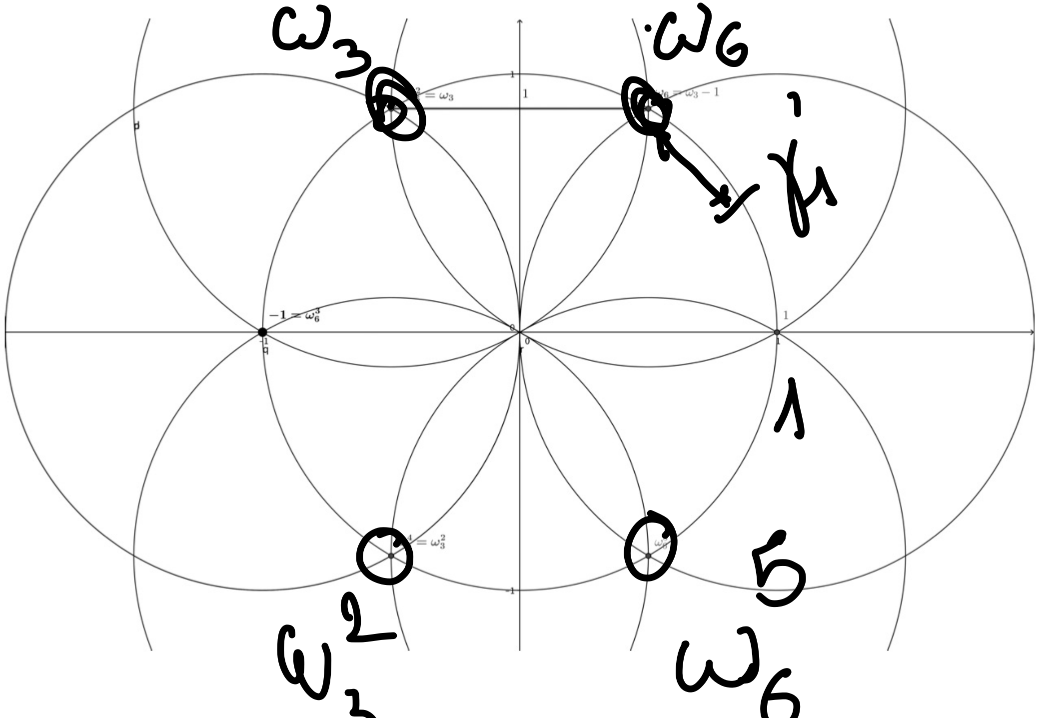


FIGURE 5.



ω_3
ω_6
$= \omega_3$
$\omega_6 = \omega_3 - 1$
$-1 = \omega_6^3$
$= \omega_3^2$
1
ω_3^2
ω_6^5

FIGURE 6.